Matemática Discreta

Unidade 67: Subconjuntos com Número Fixo de Elementos (4)

Renato Carmo
David Menotti

Departamento de Informática da UFPR

Segundo Período Especial de 2020

Teorema 70

Teorema

Se A é um conjunto, então

$$\binom{A}{k} = \binom{A - \{a\}}{k} \cup \left\{ S \cup \{a\} \mid S \in \binom{A - \{a\}}{k-1} \right\},$$

para todo $a \in A$.

Demonstração.

Exercício 13. $\square$

Corolário 71

Corolário

Para todo $n, k > 0$*,*

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

Corolário 71

Demonstração.

Sejam $n > 0$ e $k > 0$. Vamos provar que

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}.$$

Do Teorema 70 temos que

$$\begin{aligned}\binom{[n]}{k} &= \binom{[n]-\{n\}}{k} \cup \left\{ S \cup \{n\} \mid S \in \binom{[n]-\{n\}}{k-1} \right\} \\ &= \binom{[n-1]}{k} \cup \left\{ S \cup \{n\} \mid S \in \binom{[n-1]}{k-1} \right\},\end{aligned}$$

Corolário 71

Demonstração.

e portanto,

$$\left|\binom{[n]}{k}\right| =$$

Corolário 71

Demonstração.

e portanto,

$$\left|\binom{[n]}{k}\right| = \left|\binom{[n-1]}{k} \cup \left\{S \cup \{n\} \mid S \in \binom{[n-1]}{k-1}\right\}\right|.$$

Corolário 71

Demonstração.

e portanto,

$$\left|\binom{[n]}{k}\right| = \left|\binom{[n-1]}{k} \cup \left\{S \cup \{n\} \mid S \in \binom{[n-1]}{k-1}\right\}\right|.$$

Como $\binom{[n]-\{n\}}{k}$ e $\left\{S \cup \{n\} \mid S \in \binom{[n-1]}{k-1}\right\}$ são disjuntos entre si, então (Teorema 43)

$$\begin{aligned}\left|\binom{[n]}{k}\right| &= \left|\binom{[n-1]}{k}\right| + \left|\left\{S \cup \{n\} \mid S \in \binom{[n-1]}{k-1}\right\}\right| \\ &= \end{aligned}$$

Corolário 71

Demonstração.

e portanto,

$$\left|\binom{[n]}{k}\right| = \left|\binom{[n-1]}{k} \cup \left\{S \cup \{n\} \mid S \in \binom{[n-1]}{k-1}\right\}\right|.$$

Como $\binom{[n]-\{n\}}{k}$ e $\left\{S \cup \{n\} \mid S \in \binom{[n-1]}{k-1}\right\}$ são disjuntos entre si, então (Teorema 43)

$$\begin{aligned}\left|\binom{[n]}{k}\right| &= \left|\binom{[n-1]}{k}\right| + \left|\left\{S \cup \{n\} \mid S \in \binom{[n-1]}{k-1}\right\}\right| \\ &= \binom{n-1}{k} + \left|\binom{[n-1]}{k-1}\right| \\ &= \end{aligned}$$

Corolário 71

Demonstração.

e portanto,

$$\left|\binom{[n]}{k}\right| = \left|\binom{[n-1]}{k} \cup \left\{S \cup \{n\} \mid S \in \binom{[n-1]}{k-1}\right\}\right|.$$

Como $\binom{[n]-\{n\}}{k}$ e $\left\{S \cup \{n\} \mid S \in \binom{[n-1]}{k-1}\right\}$ são disjuntos entre si, então (Teorema 43)

$$\begin{aligned}\left|\binom{[n]}{k}\right| &= \left|\binom{[n-1]}{k}\right| + \left|\left\{S \cup \{n\} \mid S \in \binom{[n-1]}{k-1}\right\}\right| \\ &= \binom{n-1}{k} + \left|\binom{[n-1]}{k-1}\right| \\ &= \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}.\end{aligned}$$

$\square$

Bolas e Urnas

Teorema

O número de maneiras de distribuir k bolas idênticas por n urnas distintas de maneira que nenhuma urna receba mais do que uma bola é $\binom{n}{k}$.

Teorema

O número de maneiras de distribuir k bolas idênticas por n urnas distintas de maneira que nenhuma urna receba mais do que uma bola é $\binom{n}{k}$.

Demonstração.

Cada distribuição de k bolas idênticas por n urnas distintas de maneira que nenhuma urna receba mais do que uma bola corresponde à escolha de um subconjunto de k dentre as n urnas que receberão uma bola cada. $\square$