Matemática Discreta

Unidade 68: Permutações com Repetição

Renato Carmo
David Menotti

Departamento de Informática da UFPR

Segundo Período Especial de 2020

Anagramas

Anagramas

$\#$ anagramas de fruta

Anagramas

$\#$ anagramas de fruta $= \#$ permutações sobre $\{\mathsf{f}, \mathsf{r}, \mathsf{u}, \mathsf{t}, \mathsf{a}\}$

Anagramas

$\#$ anagramas de fruta $= \#$ permutações sobre $\{\mathsf{f}, \mathsf{r}, \mathsf{u}, \mathsf{t}, \mathsf{a}\}$

$|\{\mathsf{f}, \mathsf{r}, \mathsf{u}, \mathsf{t}, \mathsf{a}\}!|$

Anagramas

$\#$ anagramas de fruta $= \#$ permutações sobre $\{\mathsf{f}, \mathsf{r}, \mathsf{u}, \mathsf{t}, \mathsf{a}\}$

$|\{\mathsf{f}, \mathsf{r}, \mathsf{u}, \mathsf{t}, \mathsf{a}\}!| \overset{\text{C. 65}}{=} |\{\mathsf{f}, \mathsf{r}, \mathsf{u}, \mathsf{t}, \mathsf{a}\}|!$

Anagramas

$\#$ anagramas de fruta $= \#$ permutações sobre $\{\mathsf{f}, \mathsf{r}, \mathsf{u}, \mathsf{t}, \mathsf{a}\}$

$|\{\mathsf{f}, \mathsf{r}, \mathsf{u}, \mathsf{t}, \mathsf{a}\}!| \overset{\text{C. 65}}{=} |\{\mathsf{f}, \mathsf{r}, \mathsf{u}, \mathsf{t}, \mathsf{a}\}|! = 5!$

Anagramas

$\#$ anagramas de fruta $= \#$ permutações sobre $\{f, r, u, t, a\}$

$$|\{f, r, u, t, a\}!| \overset{\text{C. 65}}{=} |\{f, r, u, t, a\}|! = 5! = 120$$

Anagramas

$\#$ anagramas de fruta $= \#$ permutações sobre $\{\mathsf{f}, \mathsf{r}, \mathsf{u}, \mathsf{t}, \mathsf{a}\}$

$|\{\mathsf{f}, \mathsf{r}, \mathsf{u}, \mathsf{t}, \mathsf{a}\}!| \overset{\text{C. 65}}{=} |\{\mathsf{f}, \mathsf{r}, \mathsf{u}, \mathsf{t}, \mathsf{a}\}|! = 5! = 120$

$\#$ anagramas de laranja

Anagramas

$\#$ anagramas de fruta $= \#$ permutações sobre $\{\mathsf{f}, \mathsf{r}, \mathsf{u}, \mathsf{t}, \mathsf{a}\}$

$$|\{\mathsf{f}, \mathsf{r}, \mathsf{u}, \mathsf{t}, \mathsf{a}\}!| \overset{\text{C. 65}}{=} |\{\mathsf{f}, \mathsf{r}, \mathsf{u}, \mathsf{t}, \mathsf{a}\}|! = 5! = 120$$

$\#$ anagramas de laranja: $7!$

Anagramas

$\#$ anagramas de fruta $= \#$ permutações sobre $\{\mathsf{f}, \mathsf{r}, \mathsf{u}, \mathsf{t}, \mathsf{a}\}$

$$|\{\mathsf{f}, \mathsf{r}, \mathsf{u}, \mathsf{t}, \mathsf{a}\}!| \overset{\text{C. 65}}{=} |\{\mathsf{f}, \mathsf{r}, \mathsf{u}, \mathsf{t}, \mathsf{a}\}|! = 5! = 120$$

$\#$ anagramas de laranja: $7! = 5040$

Anagramas

$\#$ anagramas de fruta $= \#$ permutações sobre $\{f, r, u, t, a\}$

$$|\{f, r, u, t, a\}!| \overset{\text{C. 65}}{=} |\{f, r, u, t, a\}|! = 5! = 120$$

$\#$ anagramas de laranja: $7! = 5040$???

Anagramas

$\#$ anagramas de fruta $= \#$ permutações sobre $\{f, r, u, t, a\}$

$|\{f, r, u, t, a\}!| \stackrel{C.\ 65}{=} |\{f, r, u, t, a\}|! = 5! = 120$

$\#$ anagramas de laranja: $7! = 5040$???

laranja

Anagramas

$\#$ anagramas de fruta $= \#$ permutações sobre $\{f, r, u, t, a\}$

$|\{f, r, u, t, a\}!| \overset{\text{C. 65}}{=} |\{f, r, u, t, a\}|! = 5! = 120$

$\#$ anagramas de laranja: $7! = 5040$???

laranja

laranja

Anagramas

$\#$ anagramas de fruta $= \#$ permutações sobre $\{f, r, u, t, a\}$

$|\{f, r, u, t, a\}!| \stackrel{\text{C. 65}}{=} |\{f, r, u, t, a\}|! = 5! = 120$

$\#$ anagramas de laranja: $7! = 5040$???

laranja laranja laranja

Anagramas

$\#$ anagramas de fruta $= \#$ permutações sobre $\{f, r, u, t, a\}$

$|\{f, r, u, t, a\}!| \stackrel{\text{C. 65}}{=} |\{f, r, u, t, a\}|! = 5! = 120$

$\#$ anagramas de laranja: $7! = 5040$???

laranja laranja laranja ...

Anagramas

$\#$ anagramas de fruta $= \#$ permutações sobre $\{f, r, u, t, a\}$

$|\{f, r, u, t, a\}!| \overset{C.\ 65}{=} |\{f, r, u, t, a\}|! = 5! = 120$

$\#$ anagramas de laranja: $7! = 5040$???

laranja laranja laranja ... $3! = 6$

Anagramas

$\#$ anagramas de fruta $= \#$ permutações sobre $\{f, r, u, t, a\}$

$|\{f, r, u, t, a\}!| \stackrel{\text{C. 65}}{=} |\{f, r, u, t, a\}|! = 5! = 120$

$\#$ anagramas de laranja: $7! = 5040$???

laranja laranja laranja $\ldots$ $3! = 6$

$$\frac{7!}{3!}$$

Anagramas

$\#$ anagramas de fruta $= \#$ permutações sobre $\{f, r, u, t, a\}$

$|\{f, r, u, t, a\}!| \overset{C.\ 65}{=} |\{f, r, u, t, a\}|! = 5! = 120$

$\#$ anagramas de laranja: $7! = 5040$???

laranja laranja laranja ... $3! = 6$

$$\frac{7!}{3!} = \frac{5040}{6} = 840$$

Mais Anagramas

Mais Anagramas

$\#$ anagramas de banana

Mais Anagramas

$\#$ anagramas de banana: $\frac{6!}{3!}$

Mais Anagramas

$\#$ anagramas de banana: $\frac{6!}{3!} = 120$

Mais Anagramas

$\#$ anagramas de banana: $\frac{6!}{3!} = 120$???

Mais Anagramas

$\#$ anagramas de banana: $\frac{6!}{3!} = 120$???

banana

Mais Anagramas

anagramas de banana: $\frac{6!}{3!} = 120$???

banana

$$\frac{\frac{6!}{3!}}{2!}$$

Mais Anagramas

$\#$ anagramas de banana: $\frac{6!}{3!} = 120$???

banana

$$\frac{\frac{6!}{3!}}{2!} = \frac{6!}{3!2!}$$

Mais Anagramas

\# anagramas de banana: $\frac{6!}{3!} = 120$???

banana

$$\frac{\frac{6!}{3!}}{2!} = \frac{6!}{3!2!} = 60$$

Coeficientes Multinomiais

Coeficientes Multinomiais

$n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$

Coeficientes Multinomiais

$n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$

coeficiente multinomial

Coeficientes Multinomiais

$n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$

coeficiente multinomial: $\displaystyle\binom{n_1 + \ldots + n_k}{n_1, \ldots, n_k}$

Coeficientes Multinomiais

$n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$

coeficiente multinomial: $\binom{n_1 + \ldots + n_k}{n_1, \ldots, n_k} := \dfrac{(n_1 + \ldots + n_k)!}{n_1! n_2! \ldots n_k!}$

Coeficientes Multinomiais

$n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$

coeficiente multinomial: $\displaystyle\binom{n_1 + \ldots + n_k}{n_1, \ldots, n_k} := \frac{(n_1 + \ldots + n_k)!}{n_1! n_2! \ldots n_k!} = \frac{\left(\sum_{i=1}^{k} n_i\right)!}{\prod_{i=1}^{k} n_i!}$

Coeficientes Multinomiais

$n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$

coeficiente multinomial: $\binom{n_1 + \ldots + n_k}{n_1, \ldots, n_k} := \frac{(n_1 + \ldots + n_k)!}{n_1! n_2! \ldots n_k!} = \frac{\left(\sum_{i=1}^{k} n_i\right)!}{\prod_{i=1}^{k} n_i!}$

$\binom{n}{k}$

Coeficientes Multinomiais

$n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$

coeficiente multinomial: $\binom{n_1 + \ldots + n_k}{n_1, \ldots, n_k} := \frac{(n_1 + \ldots + n_k)!}{n_1! n_2! \ldots n_k!} = \frac{\left(\sum_{i=1}^{k} n_i\right)!}{\prod_{i=1}^{k} n_i!}$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Coeficientes Multinomiais

$n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$

coeficiente multinomial: $\binom{n_1 + \ldots + n_k}{n_1, \ldots, n_k} := \frac{(n_1 + \ldots + n_k)!}{n_1! n_2! \ldots n_k!} = \frac{\left(\sum_{i=1}^k n_i\right)!}{\prod_{i=1}^k n_i!}$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{(k + (n-k))!}{k!(n-k)!}$$

Coeficientes Multinomiais

$n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$

coeficiente multinomial: $\binom{n_1 + \ldots + n_k}{n_1, \ldots, n_k} := \frac{(n_1 + \ldots + n_k)!}{n_1! n_2! \ldots n_k!} = \frac{\left(\sum_{i=1}^{k} n_i\right)!}{\prod_{i=1}^{k} n_i!}$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{(k + (n-k))!}{k!(n-k)!} = \frac{((n-k)+k)!}{(n-k)!k!}$$

Coeficientes Multinomiais

$n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$

coeficiente multinomial: $\binom{n_1 + \ldots + n_k}{n_1, \ldots, n_k} := \frac{(n_1 + \ldots + n_k)!}{n_1! n_2! \ldots n_k!} = \frac{\left(\sum_{i=1}^{k} n_i\right)!}{\prod_{i=1}^{k} n_i!}$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{(k+(n-k))!}{k!(n-k)!} = \frac{((n-k)+k)!}{(n-k)!k!} = \binom{k+(n-k)}{k, n-k}$$

Coeficientes Multinomiais

$n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$

coeficiente multinomial: $\binom{n_1 + \ldots + n_k}{n_1, \ldots, n_k} := \frac{(n_1 + \ldots + n_k)!}{n_1! n_2! \ldots n_k!} = \frac{\left(\sum_{i=1}^{k} n_i\right)!}{\prod_{i=1}^{k} n_i!}$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{(k + (n-k))!}{k!(n-k)!} = \frac{((n-k)+k)!}{(n-k)!k!} = \binom{k + (n-k)}{k, n-k} = \binom{n}{n-k}$$

Teorema 73

Teorema 73

$$\binom{n_1 + \ldots + n_k}{n_1, \ldots, n_k} = \binom{n_1 + \ldots + n_{k-1}}{n_1, \ldots, n_{k-1}} \binom{n_1 + \ldots + n_k}{n_k}$$

Teorema 73

$$\binom{n_1 + \ldots + n_k}{n_1, \ldots, n_k} = \binom{n_1 + \ldots + n_{k-1}}{n_1, \ldots, n_{k-1}} \binom{n_1 + \ldots + n_k}{n_k}$$

Demonstração.

Exercício 57 $\square$

Teorema 74

Teorema 74

$A = \{a_1, \ldots, a_k\}$

Teorema 74

$A = \{a_1, \ldots, a_k\}$, n_1 exemplares de a_1

Teorema 74

$A = \{a_1, \ldots, a_k\}$, n_1 exemplares de a_1, n_2 exemplares de a_2

Teorema 74

$A = \{a_1, \ldots, a_k\}$, n_1 exemplares de a_1, n_2 exemplares de a_2, ...

Teorema 74

$A = \{a_1, \ldots, a_k\}$, n_1 exemplares de a_1, n_2 exemplares de a_2, ..., n_k exemplares de a_k

Teorema 74

$A = \{a_1, \ldots, a_k\}$, n_1 exemplares de a_1, n_2 exemplares de a_2, $\ldots$, n_k exemplares de a_k

$\#$ permutações distintas de elementos de A

Teorema 74

$A = \{a_1, \ldots, a_k\}$, n_1 exemplares de a_1, n_2 exemplares de a_2, ..., n_k exemplares de a_k

\# permutações distintas de elementos de A

$$\binom{n_1 + \ldots + n_k}{n_1, \ldots, n_k}$$

Teorema 74

$A = \{a_1, \ldots, a_k\}$, n_1 exemplares de a_1, n_2 exemplares de a_2, ..., n_k exemplares de a_k

$\#$ permutações distintas de elementos de A

$$\binom{n_1 + \ldots + n_k}{n_1, \ldots, n_k}$$

Demonstração.

Indução em k $\square$