Matemática Discreta

Unidade 69: Composições de Inteiros

Renato Carmo
David Menotti

Departamento de Informática da UFPR

Segundo Período Especial de 2020

Composições de Inteiros

Composições de Inteiros

$n \geq k \in \mathbb{N}$

Composições de Inteiros

$n \geq k \in \mathbb{N}$

k-**composição de** n

Composições de Inteiros

$n \geq k \in \mathbb{N}$

k-**composição de** n: sequência $(x_1, \ldots, x_k) \ \in \ [n]^k$

Composições de Inteiros

$n \geq k \in \mathbb{N}$

k-**composição de** n: sequência $(x_1, \ldots, x_k) \ \in \ [n]^k$ satisfazendo $\sum_{i=1}^{k} x_i = n$

Composições de Inteiros

$n \geq k \in \mathbb{N}$

k-**composição de** *n*: sequência $(x_1, \ldots, x_k) \in [n]^k$ satisfazendo $\sum_{i=1}^{k} x_i = n$

3-composições de 5

Composições de Inteiros

$n \geq k \in \mathbb{N}$

k-**composição de** n: sequência $(x_1, \ldots, x_k) \in [n]^k$ satisfazendo $\sum_{i=1}^{k} x_i = n$

3-composições de 5: $(1, 1, 3)$

Composições de Inteiros

$n \geq k \in \mathbb{N}$

k-**composição de** n: sequência $(x_1, \ldots, x_k) \in [n]^k$ satisfazendo $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} x_i = n$

3-composições de 5: $(1, 1, 3)$, $(1, 2, 2)$

Composições de Inteiros

$n \geq k \in \mathbb{N}$

k-**composição de** *n*: sequência $(x_1, \ldots, x_k) \in [n]^k$ satisfazendo $\sum_{i=1}^{k} x_i = n$

3-composições de 5: $(1, 1, 3)$, $(1, 2, 2)$, $(1, 3, 1)$

Composições de Inteiros

$n \geq k \in \mathbb{N}$

k-**composição de** n: sequência $(x_1, \ldots, x_k) \ \in \ [n]^k$ satisfazendo $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} x_i = n$

3-composições de 5: $(1, 1, 3)$, $(1, 2, 2)$, $(1, 3, 1)$, $(2, 1, 2)$

Composições de Inteiros

$n \geq k \in \mathbb{N}$

k-**composição de** n: sequência $(x_1, \ldots, x_k) \ \in \ [n]^k$ satisfazendo $\sum_{i=1}^{k} x_i = n$

3-composições de 5: $(1, 1, 3)$, $(1, 2, 2)$, $(1, 3, 1)$, $(2, 1, 2)$, $(2, 2, 1)$

Composições de Inteiros

$n \geq k \in \mathbb{N}$

k-**composição de** n: sequência $(x_1, \ldots, x_k) \in [n]^k$ satisfazendo $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} x_i = n$

3-composições de 5: $(1, 1, 3)$, $(1, 2, 2)$, $(1, 3, 1)$, $(2, 1, 2)$, $(2, 2, 1)$, $(3, 1, 1)$

Composições de Inteiros

$n \geq k \in \mathbb{N}$

k-**composição de** n: sequência $(x_1, \ldots, x_k) \in [n]^k$ satisfazendo $\sum_{i=1}^{k} x_i = n$

3-composições de 5: $(1,1,3)$, $(1,2,2)$, $(1,3,1)$, $(2,1,2)$, $(2,2,1)$, $(3,1,1)$

Quantas k-composições admite um inteiro n?

Quantas k-composições admite um inteiro n?

Quantas k-composições admite um inteiro n?

4-composições de 10

Quantas k-composições admite um inteiro n?

4-composições de 10

$$10 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$$

Quantas k-composições admite um inteiro n?

4-composições de 10

$$10 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$$

Quantas k-composições admite um inteiro n?

4-composições de 10

$$10 = 1+1+1 \textcolor{red}{+} 1 \textcolor{red}{+} 1+1+1+1 \textcolor{red}{+} 1+1 = 3 \textcolor{red}{+} 1 \textcolor{red}{+} 4 \textcolor{red}{+} 2$$

Quantas k-composições admite um inteiro n?

4-composições de 10

$10 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 3 + 1 + 4 + 2$

escolha de $4 - 1 = 3$ sinais de $+$ dentre os $10 - 1$ possíveis determina uma 4-composição de 10

Quantas k-composições admite um inteiro n?

4-composições de 10

$10 = 1 + 1 + 1 {\color{red}+} 1 {\color{red}+} 1 + 1 + 1 + 1 {\color{red}+} 1 + 1 = 3 {\color{red}+} 1 {\color{red}+} 4 {\color{red}+} 2$

escolha de $4 - 1 = 3$ sinais de $+$ dentre os $10 - 1$ possíveis determina uma 4-composição de 10

bijeção: $\binom{[10-1]}{4-1} \sim$ 4-composições de 10

Quantas k-composições admite um inteiro n?

4-composições de 10

$10 = 1 + 1 + 1 \color{red}{+} 1 \color{red}{+} 1 + 1 + 1 + 1 \color{red}{+} 1 + 1 = 3 \color{red}{+} 1 \color{red}{+} 4 \color{red}{+} 2$

escolha de $4 - 1 = 3$ sinais de $+$ dentre os $10 - 1$ possíveis determina uma 4-composição de 10

bijeção: $\binom{[10-1]}{4-1} \sim$ 4-composições de 10

bijeção: $\binom{[n-1]}{k-1} \sim$ k-composições de n

Teorema 75

Teorema 75

existem $\binom{n-1}{k-1}$ k-composições de n

Composições, bolas e urnas

Composições, bolas e urnas

k-composições de n

Composições, bolas e urnas

k-composições de n $\quad\sim\quad$ distribuição de n bolas idênticas por k urnas distintas

Composições, bolas e urnas

k-composições de n $\sim$ distribuição de n bolas idênticas por k urnas distintas sem que nenhuma urna fique vazia

Composições, bolas e urnas

k-composições de n $\sim$ distribuição de n bolas idênticas por k urnas distintas sem que nenhuma urna fique vazia

$$u_1 + \ldots + u_k = n$$

Corolário 76

Corolário 76

existem $\binom{n-1}{k-1}$ maneiras de distribuir n bolas idênticas por k urnas distintas de maneira que nenhuma urna fique vazia