

Matemática Discreta

Unidade 70: Composições Fracas de Inteiros

Renato Carmo
David Menotti

Departamento de Informática da UFPR

Segundo Período Especial de 2020

Composições Fracas de Inteiros

Composições Fracas de Inteiros

$$n \geq k \in \mathbb{N}$$

Composições Fracas de Inteiros

$$n \geq k \in \mathbb{N}$$

k*-composição fraca de *n

Composições Fracas de Inteiros

$$n \geq k \in \mathbb{N}$$

k -composição fraca de n : sequência $(x_1, \dots, x_k) \in [0..n]^k$

Composições Fracas de Inteiros

$$n \geq k \in \mathbb{N}$$

k -composição fraca de n : sequência $(x_1, \dots, x_k) \in [0..n]^k$ satisfazendo $\sum_{i=1}^k x_i = n$

Composições Fracas de Inteiros

$$n \geq k \in \mathbb{N}$$

k -composição fraca de n : sequência $(x_1, \dots, x_k) \in [0..n]^k$ satisfazendo $\sum_{i=1}^k x_i = n$

3-composições fracas de 5

Composições Fracas de Inteiros

$$n \geq k \in \mathbb{N}$$

k -composição fraca de n : sequência $(x_1, \dots, x_k) \in [0..n]^k$ satisfazendo $\sum_{i=1}^k x_i = n$

3-composições fracas de 5: $(0, 0, 5)$

Composições Fracas de Inteiros

$$n \geq k \in \mathbb{N}$$

k -composição fraca de n : sequência $(x_1, \dots, x_k) \in [0..n]^k$ satisfazendo $\sum_{i=1}^k x_i = n$

3-composições fracas de 5: $(0, 0, 5)$, $(0, 1, 4)$

Composições Fracas de Inteiros

$$n \geq k \in \mathbb{N}$$

k -composição fraca de n : sequência $(x_1, \dots, x_k) \in [0..n]^k$ satisfazendo $\sum_{i=1}^k x_i = n$

3-composições fracas de 5: $(0, 0, 5)$, $(0, 1, 4)$, $(0, 2, 3)$

Composições Fracas de Inteiros

$$n \geq k \in \mathbb{N}$$

k -composição fraca de n : sequência $(x_1, \dots, x_k) \in [0..n]^k$ satisfazendo $\sum_{i=1}^k x_i = n$

3-composições fracas de 5: $(0, 0, 5)$, $(0, 1, 4)$, $(0, 2, 3)$, $(0, 3, 2)$

Composições Fracas de Inteiros

$$n \geq k \in \mathbb{N}$$

k -composição fraca de n : sequência $(x_1, \dots, x_k) \in [0..n]^k$ satisfazendo $\sum_{i=1}^k x_i = n$

3-composições fracas de 5: $(0, 0, 5)$, $(0, 1, 4)$, $(0, 2, 3)$, $(0, 3, 2)$, $(0, 4, 1)$

Composições Fracas de Inteiros

$$n \geq k \in \mathbb{N}$$

k -composição fraca de n : sequência $(x_1, \dots, x_k) \in [0..n]^k$ satisfazendo $\sum_{i=1}^k x_i = n$

3-composições fracas de 5: $(0, 0, 5)$, $(0, 1, 4)$, $(0, 2, 3)$, $(0, 3, 2)$, $(0, 4, 1)$, $(0, 5, 0)$

Composições Fracas de Inteiros

$$n \geq k \in \mathbb{N}$$

k -composição fraca de n : sequência $(x_1, \dots, x_k) \in [0..n]^k$ satisfazendo $\sum_{i=1}^k x_i = n$

3-composições fracas de 5: $(0, 0, 5)$, $(0, 1, 4)$, $(0, 2, 3)$, $(0, 3, 2)$, $(0, 4, 1)$, $(0, 5, 0)$,
 $(1, 0, 4)$

Composições Fracas de Inteiros

$$n \geq k \in \mathbb{N}$$

k -composição fraca de n : sequência $(x_1, \dots, x_k) \in [0..n]^k$ satisfazendo $\sum_{i=1}^k x_i = n$

3-composições fracas de 5: $(0, 0, 5)$, $(0, 1, 4)$, $(0, 2, 3)$, $(0, 3, 2)$, $(0, 4, 1)$, $(0, 5, 0)$,
 $(1, 0, 4)$, $(1, 1, 3)$

Composições Fracas de Inteiros

$$n \geq k \in \mathbb{N}$$

k -composição fraca de n : sequência $(x_1, \dots, x_k) \in [0..n]^k$ satisfazendo $\sum_{i=1}^k x_i = n$

3-composições fracas de 5: $(0, 0, 5)$, $(0, 1, 4)$, $(0, 2, 3)$, $(0, 3, 2)$, $(0, 4, 1)$, $(0, 5, 0)$,
 $(1, 0, 4)$, $(1, 1, 3)$, $(1, 2, 2)$

Composições Fracas de Inteiros

$$n \geq k \in \mathbb{N}$$

k -composição fraca de n : sequência $(x_1, \dots, x_k) \in [0..n]^k$ satisfazendo $\sum_{i=1}^k x_i = n$

3-composições fracas de 5: $(0, 0, 5)$, $(0, 1, 4)$, $(0, 2, 3)$, $(0, 3, 2)$, $(0, 4, 1)$, $(0, 5, 0)$,
 $(1, 0, 4)$, $(1, 1, 3)$, $(1, 2, 2)$, $(1, 3, 1)$

Composições Fracas de Inteiros

$$n \geq k \in \mathbb{N}$$

k -composição fraca de n : sequência $(x_1, \dots, x_k) \in [0..n]^k$ satisfazendo $\sum_{i=1}^k x_i = n$

3-composições fracas de 5: $(0, 0, 5)$, $(0, 1, 4)$, $(0, 2, 3)$, $(0, 3, 2)$, $(0, 4, 1)$, $(0, 5, 0)$,
 $(1, 0, 4)$, $(1, 1, 3)$, $(1, 2, 2)$, $(1, 3, 1)$, $(1, 4, 0)$

Composições Fracas de Inteiros

$$n \geq k \in \mathbb{N}$$

k -composição fraca de n : sequência $(x_1, \dots, x_k) \in [0..n]^k$ satisfazendo $\sum_{i=1}^k x_i = n$

3-composições fracas de 5: $(0, 0, 5)$, $(0, 1, 4)$, $(0, 2, 3)$, $(0, 3, 2)$, $(0, 4, 1)$, $(0, 5, 0)$,
 $(1, 0, 4)$, $(1, 1, 3)$, $(1, 2, 2)$, $(1, 3, 1)$, $(1, 4, 0)$, $(2, 0, 3)$

Composições Fracas de Inteiros

$$n \geq k \in \mathbb{N}$$

k -composição fraca de n : sequência $(x_1, \dots, x_k) \in [0..n]^k$ satisfazendo $\sum_{i=1}^k x_i = n$

3-composições fracas de 5: $(0, 0, 5)$, $(0, 1, 4)$, $(0, 2, 3)$, $(0, 3, 2)$, $(0, 4, 1)$, $(0, 5, 0)$,
 $(1, 0, 4)$, $(1, 1, 3)$, $(1, 2, 2)$, $(1, 3, 1)$, $(1, 4, 0)$, $(2, 0, 3)$, $(2, 1, 2)$

Composições Fracas de Inteiros

$$n \geq k \in \mathbb{N}$$

k -composição fraca de n : sequência $(x_1, \dots, x_k) \in [0..n]^k$ satisfazendo $\sum_{i=1}^k x_i = n$

3-composições fracas de 5: $(0, 0, 5)$, $(0, 1, 4)$, $(0, 2, 3)$, $(0, 3, 2)$, $(0, 4, 1)$, $(0, 5, 0)$,
 $(1, 0, 4)$, $(1, 1, 3)$, $(1, 2, 2)$, $(1, 3, 1)$, $(1, 4, 0)$, $(2, 0, 3)$, $(2, 1, 2)$, $(2, 2, 1)$

Composições Fracas de Inteiros

$$n \geq k \in \mathbb{N}$$

k -composição fraca de n : sequência $(x_1, \dots, x_k) \in [0..n]^k$ satisfazendo $\sum_{i=1}^k x_i = n$

3-composições fracas de 5: $(0, 0, 5)$, $(0, 1, 4)$, $(0, 2, 3)$, $(0, 3, 2)$, $(0, 4, 1)$, $(0, 5, 0)$,
 $(1, 0, 4)$, $(1, 1, 3)$, $(1, 2, 2)$, $(1, 3, 1)$, $(1, 4, 0)$, $(2, 0, 3)$, $(2, 1, 2)$, $(2, 2, 1)$, $(2, 3, 0)$

Composições Fracas de Inteiros

$$n \geq k \in \mathbb{N}$$

k -composição fraca de n : sequência $(x_1, \dots, x_k) \in [0..n]^k$ satisfazendo $\sum_{i=1}^k x_i = n$

3-composições fracas de 5: $(0, 0, 5)$, $(0, 1, 4)$, $(0, 2, 3)$, $(0, 3, 2)$, $(0, 4, 1)$, $(0, 5, 0)$,
 $(1, 0, 4)$, $(1, 1, 3)$, $(1, 2, 2)$, $(1, 3, 1)$, $(1, 4, 0)$, $(2, 0, 3)$, $(2, 1, 2)$, $(2, 2, 1)$, $(2, 3, 0)$,
 $(3, 0, 2)$

Composições Fracas de Inteiros

$$n \geq k \in \mathbb{N}$$

k -composição fraca de n : sequência $(x_1, \dots, x_k) \in [0..n]^k$ satisfazendo $\sum_{i=1}^k x_i = n$

3-composições fracas de 5: $(0, 0, 5)$, $(0, 1, 4)$, $(0, 2, 3)$, $(0, 3, 2)$, $(0, 4, 1)$, $(0, 5, 0)$,
 $(1, 0, 4)$, $(1, 1, 3)$, $(1, 2, 2)$, $(1, 3, 1)$, $(1, 4, 0)$, $(2, 0, 3)$, $(2, 1, 2)$, $(2, 2, 1)$, $(2, 3, 0)$,
 $(3, 0, 2)$, $(3, 1, 1)$

Composições Fracas de Inteiros

$$n \geq k \in \mathbb{N}$$

k -composição fraca de n : sequência $(x_1, \dots, x_k) \in [0..n]^k$ satisfazendo $\sum_{i=1}^k x_i = n$

3-composições fracas de 5: $(0, 0, 5)$, $(0, 1, 4)$, $(0, 2, 3)$, $(0, 3, 2)$, $(0, 4, 1)$, $(0, 5, 0)$,
 $(1, 0, 4)$, $(1, 1, 3)$, $(1, 2, 2)$, $(1, 3, 1)$, $(1, 4, 0)$, $(2, 0, 3)$, $(2, 1, 2)$, $(2, 2, 1)$, $(2, 3, 0)$,
 $(3, 0, 2)$, $(3, 1, 1)$, $(3, 2, 0)$

Composições Fracas de Inteiros

$$n \geq k \in \mathbb{N}$$

k -composição fraca de n : sequência $(x_1, \dots, x_k) \in [0..n]^k$ satisfazendo $\sum_{i=1}^k x_i = n$

3-composições fracas de 5: $(0, 0, 5)$, $(0, 1, 4)$, $(0, 2, 3)$, $(0, 3, 2)$, $(0, 4, 1)$, $(0, 5, 0)$,
 $(1, 0, 4)$, $(1, 1, 3)$, $(1, 2, 2)$, $(1, 3, 1)$, $(1, 4, 0)$, $(2, 0, 3)$, $(2, 1, 2)$, $(2, 2, 1)$, $(2, 3, 0)$,
 $(3, 0, 2)$, $(3, 1, 1)$, $(3, 2, 0)$, $(4, 0, 1)$

Composições Fracas de Inteiros

$$n \geq k \in \mathbb{N}$$

k -composição fraca de n : sequência $(x_1, \dots, x_k) \in [0..n]^k$ satisfazendo $\sum_{i=1}^k x_i = n$

3-composições fracas de 5: $(0, 0, 5)$, $(0, 1, 4)$, $(0, 2, 3)$, $(0, 3, 2)$, $(0, 4, 1)$, $(0, 5, 0)$,
 $(1, 0, 4)$, $(1, 1, 3)$, $(1, 2, 2)$, $(1, 3, 1)$, $(1, 4, 0)$, $(2, 0, 3)$, $(2, 1, 2)$, $(2, 2, 1)$, $(2, 3, 0)$,
 $(3, 0, 2)$, $(3, 1, 1)$, $(3, 2, 0)$, $(4, 0, 1)$, $(4, 1, 0)$

Composições Fracas de Inteiros

$$n \geq k \in \mathbb{N}$$

k -composição fraca de n : sequência $(x_1, \dots, x_k) \in [0..n]^k$ satisfazendo $\sum_{i=1}^k x_i = n$

3-composições fracas de 5: $(0, 0, 5)$, $(0, 1, 4)$, $(0, 2, 3)$, $(0, 3, 2)$, $(0, 4, 1)$, $(0, 5, 0)$,
 $(1, 0, 4)$, $(1, 1, 3)$, $(1, 2, 2)$, $(1, 3, 1)$, $(1, 4, 0)$, $(2, 0, 3)$, $(2, 1, 2)$, $(2, 2, 1)$, $(2, 3, 0)$,
 $(3, 0, 2)$, $(3, 1, 1)$, $(3, 2, 0)$, $(4, 0, 1)$, $(4, 1, 0)$, $(5, 0, 0)$

Composições Fracas de Inteiros

$$n \geq k \in \mathbb{N}$$

k -composição fraca de n : sequência $(x_1, \dots, x_k) \in [0..n]^k$ satisfazendo $\sum_{i=1}^k x_i = n$

3-composições fracas de 5: $(0, 0, 5)$, $(0, 1, 4)$, $(0, 2, 3)$, $(0, 3, 2)$, $(0, 4, 1)$, $(0, 5, 0)$,
 $(1, 0, 4)$, $(1, 1, 3)$, $(1, 2, 2)$, $(1, 3, 1)$, $(1, 4, 0)$, $(2, 0, 3)$, $(2, 1, 2)$, $(2, 2, 1)$, $(2, 3, 0)$,
 $(3, 0, 2)$, $(3, 1, 1)$, $(3, 2, 0)$, $(4, 0, 1)$, $(4, 1, 0)$, $(5, 0, 0)$

Quantas k -composições fracas admite um inteiro n ?

Quantas k -composições fracas admite um inteiro n ?

Quantas k -composições fracas admite um inteiro n ?

k -composição fraca de n

Quantas k -composições fracas admite um inteiro n ?

k -composição fraca de n : $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$

Quantas k -composições fracas admite um inteiro n ?

$$\begin{array}{l} k\text{-composição fraca de } n: \\ x_1 + x_2 + \dots + x_k = n \\ 1 + 1 + \dots + 1 = k \end{array}$$

Quantas k -composições fracas admite um inteiro n ?

$$\begin{array}{r} k\text{-composição fraca de } n: \\ x_1 + x_2 + \dots + x_k = n \\ 1 + 1 + \dots + 1 = k \\ x_1 + 1 + x_2 + 1 + \dots + x_k + 1 = n + k \end{array}$$

Quantas k -composições fracas admite um inteiro n ?

$$\begin{array}{l} k\text{-composição fraca de } n: \quad x_1 \quad + \quad x_2 \quad + \quad \dots \quad + \quad x_k \quad = \quad n \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad 1 \quad + \quad 1 \quad + \quad \dots \quad + \quad 1 \quad = \quad k \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad x_1 + 1 \quad + \quad x_2 + 1 \quad + \quad \dots \quad + \quad x_k + 1 \quad = \quad n + k \end{array}$$

bijeção

Quantas k -composições fracas admite um inteiro n ?

$$\begin{array}{llllllll} k\text{-composição fraca de } n: & x_1 & + & x_2 & + & \dots & + & x_k & = & n \\ & \mathbf{1} & + & \mathbf{1} & + & \dots & + & \mathbf{1} & = & k \\ & x_1 + \mathbf{1} & + & x_2 + \mathbf{1} & + & \dots & + & x_k + \mathbf{1} & = & n + k \end{array}$$

bijeção: k -composições fracas de n

Quantas k -composições fracas admite um inteiro n ?

$$\begin{array}{l} k\text{-composição fraca de } n: \quad x_1 \quad + \quad x_2 \quad + \quad \dots \quad + \quad x_k \quad = \quad n \\ \quad \quad \quad \quad \quad 1 \quad + \quad 1 \quad + \quad \dots \quad + \quad 1 \quad = \quad k \\ \quad \quad \quad \quad \quad x_1 + 1 \quad + \quad x_2 + 1 \quad + \quad \dots \quad + \quad x_k + 1 \quad = \quad n + k \end{array}$$

bijeção: k -composições fracas de $n \sim k$ -composições de $n + k$

Teorema 77

Teorema 77

existem $\binom{n+k-1}{k-1}$ k -composições fracas de n

Composições fracas, bolas e urnas

Composições fracas, bolas e urnas

k -composições fracas de n

Composições fracas, bolas e urnas

k -composições fracas de $n \sim$ distribuição de n bolas idênticas por k urnas distintas

existem $\binom{n+k-1}{k-1}$ maneiras de distribuir n bolas idênticas por k urnas distintas