Matemática Discreta

Unidade 72: Permutações com Ponto Fixo

Renato Carmo
David Menotti

Departamento de Informática da UFPR

Segundo Período Especial de 2020

Ponto Fixo de uma Permutação

Ponto Fixo de uma Permutação

f

Ponto Fixo de uma Permutação

f: permutação sobre A

Ponto Fixo de uma Permutação

f: permutação sobre A

a é **ponto fixo** de f

Ponto Fixo de uma Permutação

f: permutação sobre A

a é **ponto fixo** de f: $f(a) = a$

Ponto Fixo de uma Permutação

f: permutação sobre A

a é **ponto fixo** de f: $f(a) = a$

quantas permutações sobre A tem ponto fixo?

Pontos Fixos de uma Permutação

Pontos Fixos de uma Permutação

$n \in \mathbb{N}$

Pontos Fixos de uma Permutação

$n \in \mathbb{N}$

$I \subseteq [n]$

Pontos Fixos de uma Permutação

$n \in \mathbb{N}$

$I \subseteq [n]$

$F(n, I)$

Pontos Fixos de uma Permutação

$n \in \mathbb{N}$

$I \subseteq [n]$

$F(n, I) :=$ permutações sobre $[n]$ nas quais todo elemento de I é ponto fixo

Teorema 81

Teorema 81

$$|F(n, l)|$$

Teorema 81

$$|F(n, I)| = (n - |I|)!$$

Teorema 81

$$|F(n, I)| = (n - |I|)!$$

Demonstração.

$G\colon F(n, I) \to ([n] - I)!$

Teorema 81

$$|F(n, I)| = (n - |I|)!$$

Demonstração.

$G\colon F(n, I) \to ([n] - I)!$ $\qquad\qquad (G(f))$

Teorema 81

$$|F(n, I)| = (n - |I|)!$$

Demonstração.

$G\colon F(n, I) \to ([n] - I)!$ $\qquad$ $(G(f))(a)$

Teorema 81

$$|F(n, I)| = (n - |I|)!$$

Demonstração.

$G\colon F(n, I) \to ([n] - I)!$ $\qquad (G(f))(a) = f(a), \text{ para todo } a \in [n] - I$

Teorema 81

$$|F(n, I)| = (n - |I|)!$$

Demonstração.

$G \colon F(n, I) \to ([n] - I)!$ $\qquad$ $(G(f))(a) = f(a), \text{ para todo } a \in [n] - I$

$n = 10$

Teorema 81

$$|F(n, I)| = (n - |I|)!$$

Demonstração.

$G: F(n, I) \to ([n] - I)!$ $\qquad$ $(G(f))(a) = f(a),$ para todo $a \in [n] - I$

$n = 10$ $\qquad$ $I = \{2, 5, 7\}$

Teorema 81

$$|F(n, I)| = (n - |I|)!$$

Demonstração.

$G\colon F(n, I) \to ([n] - I)!$ $\qquad (G(f))(a) = f(a), \text{ para todo } a \in [n] - I$

$n = 10$ $\qquad I = \{2, 5, 7\}$ $\qquad f = (3, 2, 4, 10, 5, 6, 7, 9, 8, 1)$

Teorema 81

$$|F(n, I)| = (n - |I|)!$$

Demonstração.

$G\colon F(n, I) \to ([n] - I)!$ $\qquad (G(f))(a) = f(a), \text{ para todo } a \in [n] - I$

$n = 10$ $\qquad I = \{2, 5, 7\}$ $\qquad f = (3, 2, 4, 10, 5, 6, 7, 9, 8, 1) \in [10]!$

Teorema 81

$$|F(n, I)| = (n - |I|)!$$

Demonstração.

$G\colon F(n, I) \to ([n] - I)!$ $\qquad (G(f))(a) = f(a)$, para todo $a \in [n] - I$

$n = 10$ $\qquad I = \{2, 5, 7\}$ $\qquad f = (3, 2, 4, 10, 5, 6, 7, 9, 8, 1) \in [10]!$

$G(f)$

Teorema 81

$$|F(n, I)| = (n - |I|)!$$

Demonstração.

$G\colon F(n, I) \to ([n] - I)!$ $\qquad (G(f))(a) = f(a),$ para todo $a \in [n] - I$

$n = 10$ $\qquad I = \{2, 5, 7\}$ $\qquad f = (3, 2, 4, 10, 5, 6, 7, 9, 8, 1) \in [10]!$

$G(f) = (3, 4, 10, 6, 9, 8, 1)$

Teorema 81

$$|F(n, I)| = (n - |I|)!$$

Demonstração.

$G \colon F(n, I) \to ([n] - I)!$ $\qquad$ $(G(f))(a) = f(a)$, para todo $a \in [n] - I$

$n = 10$ $\qquad$ $I = \{2, 5, 7\}$ $\qquad$ $f = (3, 2, 4, 10, 5, 6, 7, 9, 8, 1) \in [10]!$

$G(f) = (3, 4, 10, 6, 9, 8, 1) \in ([10] - \{2, 5, 7\})!$

Teorema 81

$$|F(n, I)| = (n - |I|)!$$

Demonstração.

$G \colon F(n, I) \to ([n] - I)!$ $\qquad$ $(G(f))(a) = f(a)$, para todo $a \in [n] - I$

$n = 10$ $\qquad$ $I = \{2, 5, 7\}$ $\qquad$ $f = (3, 2, 4, 10, 5, 6, 7, 9, 8, 1) \in [10]!$

$G(f) = (3, 4, 10, 6, 9, 8, 1) \in ([10] - \{2, 5, 7\})! = \{1, 3, 4, 6, 8, 9, 10\}!$

Teorema 81

$$|F(n, I)| = (n - |I|)!$$

Demonstração.

$G \colon F(n, I) \to ([n] - I)!$ $\qquad (G(f))(a) = f(a),$ para todo $a \in [n] - I$

$n = 10$ $\qquad I = \{2, 5, 7\}$ $\qquad f = (3, 2, 4, 10, 5, 6, 7, 9, 8, 1) \in [10]!$

$G(f) = (3, 4, 10, 6, 9, 8, 1) \in ([10] - \{2, 5, 7\})! = \{1, 3, 4, 6, 8, 9, 10\}!$

G é bijetora

Teorema 81

$$|F(n, I)| = (n - |I|)!$$

Demonstração.

$G\colon F(n, I) \to ([n] - I)!$ $\qquad$ $(G(f))(a) = f(a),$ para todo $a \in [n] - I$

$n = 10$ $\qquad$ $I = \{2, 5, 7\}$ $\qquad$ $f = (3, 2, 4, 10, 5, 6, 7, 9, 8, 1) \in [10]!$

$G(f) = (3, 4, 10, 6, 9, 8, 1) \in ([10] - \{2, 5, 7\})! = \{1, 3, 4, 6, 8, 9, 10\}!$

G é bijetora

$|F(n, I)|$

Teorema 81

$$|F(n, I)| = (n - |I|)!$$

Demonstração.

$G\colon F(n, I) \to ([n] - I)!$ $\qquad (G(f))(a) = f(a), \text{ para todo } a \in [n] - I$

$n = 10 \qquad I = \{2, 5, 7\} \qquad f = (3, 2, 4, 10, 5, 6, 7, 9, 8, 1) \in [10]!$

$G(f) = (3, 4, 10, 6, 9, 8, 1) \in ([10] - \{2, 5, 7\})! = \{1, 3, 4, 6, 8, 9, 10\}!$

G é bijetora

$|F(n, I)| \overset{\text{C. 42}}{=} |([n] - I)!|$

Teorema 81

$$|F(n, I)| = (n - |I|)!$$

Demonstração.

$G\colon F(n, I) \to ([n] - I)!$ $\qquad (G(f))(a) = f(a), \text{ para todo } a \in [n] - I$

$n = 10 \qquad I = \{2, 5, 7\} \qquad f = (3, 2, 4, 10, 5, 6, 7, 9, 8, 1) \in [10]!$

$G(f) = (3, 4, 10, 6, 9, 8, 1) \in ([10] - \{2, 5, 7\})! = \{1, 3, 4, 6, 8, 9, 10\}!$

G é bijetora

$|F(n, I)| \overset{\text{C. 42}}{=} |([n] - I)!| \overset{\text{C. 47}}{=} (|[n]| - |I|)!$

Teorema 81

$$|F(n, I)| = (n - |I|)!$$

Demonstração.

$G\colon F(n, I) \to ([n] - I)!$ $\qquad$ $(G(f))(a) = f(a)$, para todo $a \in [n] - I$

$n = 10$ $\qquad$ $I = \{2, 5, 7\}$ $\qquad$ $f = (3, 2, 4, 10, 5, 6, 7, 9, 8, 1) \in [10]!$

$G(f) = (3, 4, 10, 6, 9, 8, 1) \in ([10] - \{2, 5, 7\})! = \{1, 3, 4, 6, 8, 9, 10\}!$

G é bijetora

$|F(n, I)| \overset{\text{C. 42}}{=} |([n] - I)!| \overset{\text{C. 47}}{=} (|[n]| - |I|)! = (n - |I|)!$ $\square$

Corolário 82

Corolário 82

$\#$ permutações sobre A

Corolário 82

$\#$ permutações sobre A em que todo elemento de I é ponto fixo

Corolário 82

$\#$ permutações sobre A em que todo elemento de I é ponto fixo

$$(|A| - |I|)!$$

Teorema 83

Teorema 83

$\#$ permutações sobre $[n]$ com algum ponto fixo

Teorema 83

$\#$ permutações sobre $[n]$ com algum ponto fixo

$$\left(1 - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}\right) n!$$

Teorema 83

$\#$ permutações sobre $[n]$ com algum ponto fixo

$$\left(1-\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}\right)n! \approx \left(1-\frac{1}{e}\right)n!$$

Teorema 83

$\#$ permutações sobre $[n]$ com algum ponto fixo

$$\left(1-\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}\right)n! \approx \left(1-\frac{1}{e}\right)n!$$

$F(n) :=$ permutações sobre $[n]$ com algum ponto fixo

Teorema 83

$$\#\text{ permutações sobre } [n] \text{ com algum ponto fixo}$$

$$\left(1 - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}\right) n! \approx \left(1 - \frac{1}{e}\right) n!$$

$F(n) :=$ permutações sobre $[n]$ com algum ponto fixo

$$F(n) = \bigcup_{k=1}^{n} F(n, \{k\})$$

Teorema 83

$$\# \text{ permutações sobre } [n] \text{ com algum ponto fixo}$$

$$\left(1 - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}\right) n! \approx \left(1 - \frac{1}{e}\right) n!$$

$F(n) :=$ permutações sobre $[n]$ com algum ponto fixo

$$F(n) = \bigcup_{k=1}^{n} F(n, \{k\})$$

$|F(n)|$

Teorema 83

$$\# \text{ permutações sobre } [n] \text{ com algum ponto fixo}$$

$$\left(1-\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}\right)n! \approx \left(1-\frac{1}{e}\right)n!$$

$F(n) :=$ permutações sobre $[n]$ com algum ponto fixo

$$F(n) = \bigcup_{k=1}^{n} F(n,\{k\})$$

$$|F(n)| = \left|\bigcup_{k=1}^{n} F(n,\{k\})\right|$$

Teorema 83

$$\# \text{ permutações sobre } [n] \text{ com algum ponto fixo}$$

$$\left(1 - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}\right) n! \approx \left(1 - \frac{1}{e}\right) n!$$

$F(n) :=$ permutações sobre $[n]$ com algum ponto fixo

$$F(n) = \bigcup_{k=1}^{n} F(n, \{k\})$$

$$|F(n)| = \left|\bigcup_{k=1}^{n} F(n, \{k\})\right| \overset{\text{T. 80}}{=} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{I \in \binom{[n]}{k}} \left|\bigcap_{i \in I} F(n, \{i\})\right|$$

$$\bigcap_{i \in I} F(n, \{i\})$$

$\bigcap_{i \in I} F(n, \{i\})$

$$\bigcap_{i \in I} F(n, \{i\})$$

$\bigcap_{i \in I} F(n, \{i\})$

$$\bigcap_{i \in I} F(n, \{i\}) = \text{permutações sobre } [n] \text{ nas quais cada elemento de } I \text{ é ponto fixo}$$

$\bigcap_{i \in I} F(n, \{i\})$

$$\begin{aligned}\bigcap_{i \in I} F(n, \{i\}) &= \text{permutações sobre } [n] \text{ nas quais cada elemento de } I \text{ é ponto fixo} \\ &= \text{permutações sobre } [n] \text{ nas quais todo elemento de } I \text{ é ponto fixo}\end{aligned}$$

$\bigcap_{i \in I} F(n, \{i\})$

$$\begin{aligned}
\bigcap_{i \in I} F(n, \{i\}) &= \text{permutações sobre } [n] \text{ nas quais cada elemento de } I \text{ é ponto fixo} \\
&= \text{permutações sobre } [n] \text{ nas quais todo elemento de } I \text{ é ponto fixo} \\
&= F(n, I)
\end{aligned}$$

$\bigcap_{i \in I} F(n, \{i\})$

$$\begin{aligned}
\bigcap_{i \in I} F(n, \{i\}) &= \text{permutações sobre } [n] \text{ nas quais cada elemento de } I \text{ é ponto fixo} \\
&= \text{permutações sobre } [n] \text{ nas quais todo elemento de } I \text{ é ponto fixo} \\
&= F(n, I)
\end{aligned}$$

$$\left| \bigcap_{i \in I} F(n, \{i\}) \right|$$

$\bigcap_{i \in I} F(n, \{i\})$

$$\begin{aligned}
\bigcap_{i \in I} F(n, \{i\}) &= \text{permutações sobre } [n] \text{ nas quais cada elemento de } I \text{ é ponto fixo} \\
&= \text{permutações sobre } [n] \text{ nas quais todo elemento de } I \text{ é ponto fixo} \\
&= F(n, I)
\end{aligned}$$

$$\left| \bigcap_{i \in I} F(n, \{i\}) \right| = |F(n, I)|$$

$\bigcap_{i \in I} F(n, \{i\})$

$$\bigcap_{i \in I} F(n, \{i\}) = \text{permutações sobre } [n] \text{ nas quais cada elemento de } I \text{ é ponto fixo}$$
$$= \text{permutações sobre } [n] \text{ nas quais todo elemento de } I \text{ é ponto fixo}$$
$$= F(n, I)$$

$$\left| \bigcap_{i \in I} F(n, \{i\}) \right| = |F(n, I)| \overset{\text{T. } 81}{=} (n - |I|)!$$

Teorema 83 (prova)

Teorema 83 (prova)

$$|F(n)|$$

Teorema 83 (prova)

$$|F(n)| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{I \in \binom{[n]}{k}} \left| \bigcap_{i \in I} F(n, \{i\}) \right|$$

Teorema 83 (prova)

$$|F(n)| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{I \in \binom{[n]}{k}} \left| \bigcap_{i \in I} F(n, \{i\}) \right| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{I \in \binom{[n]}{k}} (n - |I|)!$$

Teorema 83 (prova)

$$|F(n)| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{I \in \binom{[n]}{k}} \left| \bigcap_{i \in I} F(n, \{i\}) \right| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{I \in \binom{[n]}{k}} (n - |I|)!$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{I \in \binom{[n]}{k}} (n - k)!$$

Teorema 83 (prova)

$$|F(n)| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{I \in \binom{[n]}{k}} \left| \bigcap_{i \in I} F(n, \{i\}) \right| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{I \in \binom{[n]}{k}} (n - |I|)!$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{I \in \binom{[n]}{k}} (n-k)! = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \left| \binom{[n]}{k} \right| (n-k)!$$

Teorema 83 (prova)

$$
\begin{aligned}
|F(n)| &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{I \in \binom{[n]}{k}} \left| \bigcap_{i \in I} F(n, \{i\}) \right| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{I \in \binom{[n]}{k}} (n - |I|)! \\
&= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{I \in \binom{[n]}{k}} (n-k)! = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \left| \binom{[n]}{k} \right| (n-k)! \\
&= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \binom{n}{k} (n-k)!
\end{aligned}
$$

Teorema 83 (prova)

$$
\begin{aligned}
|F(n)| &= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1} \sum_{I \in \binom{[n]}{k}} \left| \bigcap_{i \in I} F(n, \{i\}) \right| = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1} \sum_{I \in \binom{[n]}{k}} (n - |I|)! \\
&= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1} \sum_{I \in \binom{[n]}{k}} (n-k)! = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1} \left| \binom{[n]}{k} \right| (n-k)! \\
&= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1} \binom{n}{k} (n-k)! = \dots
\end{aligned}
$$

Teorema 83 (prova)

$$
\begin{aligned}
|F(n)| &= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\sum_{I\in\binom{[n]}{k}}\left|\bigcap_{i\in I}F(n,\{i\})\right| = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\sum_{I\in\binom{[n]}{k}}(n-|I|)! \\
&= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\sum_{I\in\binom{[n]}{k}}(n-k)! = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\left|\binom{[n]}{k}\right|(n-k)! \\
&= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\binom{n}{k}(n-k)! = \ldots \\
&= \left(1-\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}\right)n!
\end{aligned}
$$

Teorema 83 (prova)

Teorema 83 (prova)

$$e^x = \sum_{k \geq 0} \frac{x^k}{k!}$$

Teorema 83 (prova)

$$e^x = \sum_{k \geq 0} \frac{x^k}{k!} \qquad \text{(série de Taylor para } e^x\text{)}$$

Teorema 83 (prova)

$$e^x = \sum_{k \geq 0} \frac{x^k}{k!} \qquad \text{(série de Taylor para } e^x\text{)}$$

$$e^{-1} = \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{k!}$$

Teorema 83 (prova)

$$e^x = \sum_{k \geq 0} \frac{x^k}{k!}$$ (série de Taylor para e^x)

$$e^{-1} = \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{k!}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \approx e^{-1}$$

Teorema 83 (prova)

$$e^x = \sum_{k \geq 0} \frac{x^k}{k!} \qquad \text{(série de Taylor para } e^x\text{)}$$

$$e^{-1} = \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{k!}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \approx e^{-1} = \frac{1}{e}$$

Teorema 83 (prova)

$$e^x = \sum_{k \geq 0} \frac{x^k}{k!} \qquad \text{(série de Taylor para } e^x\text{)}$$

$$e^{-1} = \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{k!}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \approx e^{-1} = \frac{1}{e}$$

$$|F(n)| = \left(1 - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}\right) n!$$

Teorema 83 (prova)

$$e^x = \sum_{k \geq 0} \frac{x^k}{k!} \qquad \text{(série de Taylor para } e^x\text{)}$$

$$e^{-1} = \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{k!}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \approx e^{-1} = \frac{1}{e}$$

$$|F(n)| = \left(1 - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}\right) n! \approx \left(1 - \frac{1}{e}\right) n!$$

$$1 - \frac{1}{e}$$

$1 - \frac{1}{e}$

$$63\% < 1 - \frac{1}{e} < 64\%$$

$1 - \frac{1}{e}$

$$63\% < 1 - \frac{1}{e} < 64\%$$

$$63\% < 1 - \sum_{k=0}^{4} \frac{(-1)^k}{k!} < 64\%$$

Corolário 84

Corolário 84

$\#$ permutações sobre A com algum ponto fixo

Corolário 84

$\#$ permutações sobre A com algum ponto fixo

$$\left(1 - \sum_{k=0}^{|A|} \frac{(-1)^k}{k!}\right) |A|!$$

Corolário 84

$\#$ permutações sobre A com algum ponto fixo

$$\left(1 - \sum_{k=0}^{|A|} \frac{(-1)^k}{k!}\right) |A|! \approx \left(1 - \frac{1}{e}\right) |A|!$$

Corolário 85

Corolário 85

probabilidade de permutação sobre conjunto de n elementos ter ponto fixo

Corolário 85

probabilidade de permutação sobre conjunto de n elementos ter ponto fixo

$$1 - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$$

Corolário 85

probabilidade de permutação sobre conjunto de n elementos ter ponto fixo

$$1 - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \approx 1 - \frac{1}{e}$$

Corolário 86

Corolário 86

$\#$ maneiras de distribuir n bolas distintas por n urnas distintas

Corolário 86

\# maneiras de distribuir n bolas distintas por n urnas distintas

- cada urna receba exatamente uma bola

Corolário 86

$\#$ maneiras de distribuir n bolas distintas por n urnas distintas

- cada urna receba exatamente uma bola
- ao menos uma bola caia na "sua" urna

Corolário 86

\# maneiras de distribuir n bolas distintas por n urnas distintas

- cada urna receba exatamente uma bola
- ao menos uma bola caia na "sua" urna

$$\left(1 - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}\right) n!$$

Corolário 86

$\#$ maneiras de distribuir n bolas distintas por n urnas distintas

- cada urna receba exatamente uma bola
- ao menos uma bola caia na “sua” urna

$$\left(1 - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}\right) n! \approx \left(1 - \frac{1}{e}\right) n!$$