

Matemática Discreta

Unidade 73: Desarranjos

Renato Carmo

David Menotti

Departamento de Informática da UFPR

Segundo Período Especial de 2020

desarranjo

desarranjo: permutação sem ponto fixo

desarranjo: permutação sem ponto fixo

qual o número de desarranjos sobre um conjunto de n elementos?

Desarranjos

$D(n) :=$ desarranjos sobre $[n]$

Desarranjos

$D(n) :=$ desarranjos sobre $[n]$

$F(n) :=$ conjunto das permutações sobre $[n]$ com algum ponto fixo

Desarranjos

$D(n) :=$ desarranjos sobre $[n]$

$F(n) :=$ conjunto das permutações sobre $[n]$ com algum ponto fixo

$D(n) = [n]! - F(n)$

Desarranjos

$D(n) :=$ desarranjos sobre $[n]$

$F(n) :=$ conjunto das permutações sobre $[n]$ com algum ponto fixo

$D(n) = [n]! - F(n)$

$$|D(n)| = |[n]! - F(n)|$$

Desarranjos

$D(n) :=$ desarranjos sobre $[n]$

$F(n) :=$ conjunto das permutações sobre $[n]$ com algum ponto fixo

$D(n) = [n]! - F(n)$

$$\begin{aligned} |D(n)| &= |[n]! - F(n)| \\ &\stackrel{C. 47}{=} |[n]!| - |F(n)| \end{aligned}$$

Desarranjos

$D(n) :=$ desarranjos sobre $[n]$

$F(n) :=$ conjunto das permutações sobre $[n]$ com algum ponto fixo

$D(n) = [n]! - F(n)$

$$|D(n)| = |[n]! - F(n)|$$

$$\stackrel{\text{C. 47}}{=} |[n]! - |F(n)||$$

$$\stackrel{\text{C. 65, T. 83}}{=} n! - n! \left(1 - \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} \right)$$

Desarranjos

$D(n) :=$ desarranjos sobre $[n]$

$F(n) :=$ conjunto das permutações sobre $[n]$ com algum ponto fixo

$D(n) = [n]! - F(n)$

$$\begin{aligned} |D(n)| &= |[n]! - F(n)| \\ &\stackrel{\text{C. 47}}{=} |[n]! - |F(n)|| \\ &\stackrel{\text{C. 65, T. 83}}{=} n! - n! \left(1 - \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} \right) \\ &= n! \left(1 - \left(1 - \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k!} \right) \right) \end{aligned}$$

Desarranjos

$D(n) :=$ desarranjos sobre $[n]$

$F(n) :=$ conjunto das permutações sobre $[n]$ com algum ponto fixo

$D(n) = [n]! - F(n)$

$$\begin{aligned} |D(n)| &= |[n]! - F(n)| \\ &\stackrel{\text{C. 47}}{=} |[n]! - |F(n)|| \\ &\stackrel{\text{C. 65, T. 83}}{=} n! - n! \left(1 - \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} \right) \\ &= n! \left(1 - \left(1 - \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k!} \right) \right) \\ &= n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} \end{aligned}$$

Desarranjos

$D(n) :=$ desarranjos sobre $[n]$

$F(n) :=$ conjunto das permutações sobre $[n]$ com algum ponto fixo

$D(n) = [n]! - F(n)$

$$\begin{aligned} |D(n)| &= |[n]! - F(n)| \\ &\stackrel{\text{C. 47}}{=} |[n]! - |F(n)|| \\ &\stackrel{\text{C. 65, T. 83}}{=} n! - n! \left(1 - \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} \right) \\ &= n! \left(1 - \left(1 - \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k!} \right) \right) \\ &= n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} \approx \frac{n!}{e} \end{aligned}$$

Teorema 87

Teorema 87

desarranjos sobre $[n]$

desarranjos sobre $[n]$

$$\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} n!$$

desarranjos sobre $[n]$

$$\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} n! \approx \frac{n!}{e}$$

desarranjos sobre A

desarranjos sobre A

$$|A|! \sum_{k=0}^{|A|} \frac{(-1)^k}{k!}$$

desarranjos sobre A

$$|A|! \sum_{k=0}^{|A|} \frac{(-1)^k}{k!} \approx \frac{|A|!}{e}$$

Corolário 89

probabilidade de permutação sobre conjunto de n elementos ser desarranjo

probabilidade de permutação sobre conjunto de n elementos ser desarranjo

$$\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$$

probabilidade de permutação sobre conjunto de n elementos ser desarranjo

$$\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} \approx \frac{1}{e}$$

probabilidade de permutação sobre conjunto de n elementos ser desarranjo

$$\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} \approx \frac{1}{e}$$

$$36\% < \frac{1}{e} < 37\%$$

probabilidade de permutação sobre conjunto de n elementos ser desarranjo

$$\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} \approx \frac{1}{e}$$

$$36\% < \frac{1}{e} < 37\%$$

$$36\% < \sum_{k=0}^4 \frac{(-1)^k}{k!} < 37\%$$

Corolário 90

Corolário 90

maneiras de distribuir n bolas distintas por n urnas distintas

Corolário 90

- # maneiras de distribuir n bolas distintas por n urnas distintas
- cada urna receba exatamente uma bola

maneiras de distribuir n bolas distintas por n urnas distintas

- cada urna receba exatamente uma bola
- nenhuma bola caia na “sua” urna

maneiras de distribuir n bolas distintas por n urnas distintas

- cada urna receba exatamente uma bola
- nenhuma bola caia na “sua” urna

$$n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$$

maneiras de distribuir n bolas distintas por n urnas distintas

- cada urna receba exatamente uma bola
- nenhuma bola caia na “sua” urna

$$n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} \approx \frac{n!}{e}$$