Matemática Discreta

Primeira Prova

18 de outubro de 2021

Instruções

As respostas devem ser enviadas como um arquivo pdf anexo a uma mensagem de e-mail.

1. A mensagem deve ser **enviada** até as 20h00 para renato.carmo.rc@gmail.com (turma A) ou menottid@gmail.com (turma B).
2. O Subject: da mensagem deve ser "CI1237: Prova 1";
3. Quanto ao arquivo pdf anexo à mensagem,
   (a) o nome do arquivo deve ser seu "login" na rede do Departamento de Informática (por exemplo, jbas18.pdf);
   (b) O arquivo pode ser produzido digitalmente com LaTeX ou qualquer outro software, ou pode ser uma série de fotos de folhas manuscritas;
   (c) as respostas devem estar na mesma ordem das questões;
   (d) a resposta de cada questão deve iniciar uma página nova;
   (e) a resposta de cada questão pode ocupar várias páginas;
   (f) em cada questão, apresente o raciocínio que conduz à solução;
   (g) caso o arquivo seja produzido a partir de fotos de folhas manuscritas,
      i. escreva com clareza, bom contraste e boa letra;
      ii. cuide para que a fotografia/"scan" seja feita paralela à superfície do papel.

Durante o período de prova o Professor Renato estará em https://bbb.c3sl.ufpr.br/b/ren-qhs-xmc-oz9 para esclarecer eventuais dúvidas.

Você pode usar todos os resultados já vistos na disciplina como **lemas, teoremas e corolários** (inclusive aqueles cujas demonstrações são deixadas como exercícios) **sem necessidade de prová-los**: basta enunciá-los.

Você pode consultar o material online da disciplina (notas de aula, slides etc) mas não pode comunicar-se com os colegas até as 19h45.

Boa prova.

1. (30 pontos) É possível ter $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ tal que $f(n) \notin \mathbb{N}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e mesmo assim

$$\sum_{i=1}^{n} \lfloor f(i) \rfloor \approx \sum_{i=1}^{n} f(i)?$$

Justifique sua resposta.

2. (20 pontos) Seja $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que

$$f(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n \leq 1, \\ f(n-2) + 2, & \text{se } n > 1. \end{cases}$$

Prove, por indução em n, que

$$f(n) = n - (n \bmod 2) + f(n \bmod 2), \ \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

3. (25 pontos) Considere o seguinte algoritmo para computar o valor de n^3 a partir de n.

```
A(n)
---
  Se n = 0
      Devolva 0
  k ← n − 1
  Devolva A(k) + 3nk + 1
```

Prove por indução em n que o algoritmo está correto, isto é, que $A(n) = n^3$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

4. (25 pontos) Sejam $x \in \mathbb{R}$ e $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ tais que $f(0) \leq 0$ e $f(n) \leq f\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + x$ para todo $n > 0$. Prove que

$$\lfloor \lg n \rfloor \geq \frac{f(n) - x}{2}, \ \text{para todo } n > 0.$$

1. Sim, por exemplo, $f(n) = n + 1/n$.

   Neste caso
$$\sum_{i=1}^{n} \lfloor f(i) \rfloor = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n^2+n}{2}$$
   e
$$\sum_{i=1}^{n} \lfloor f(i) \rfloor = \sum_{i=1}^{n} (i + 1/i) = \sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n} 1/i = \frac{n^2+n}{2} + H(n) \approx \frac{n^2+n}{2} + \ln n.$$

2.

HI: Seja $a \in \mathbb{N}$ tal que

$$f(k) = k - (k \bmod 2) + f(k \bmod 2),\ \textsf{para todo}\ k \in [0..a].$$

Passo: Vamos provar que

$$f(a+1) = (a+1) - ((a+1) \bmod 2) + f((a+1) \bmod 2).$$

Pela definição e se $a+1 \geq 2$, então

$$f(a+1) = f(((a+1)-2)) + 2 = f((a-1) \bmod 2) + 2.$$

Se $a+1 \geq 2$, então $a-1 \geq 0$, então

$$\begin{aligned} f(a+1) &= f((a-1) \bmod 2) + 2 \\ &\overset{\text{HI}}{=} (a-1) - ((a-1) \bmod 2) + f((a-1) \bmod 2) + 2 \\ &= (a+1) - ((a-1) \bmod 2) + f((a-1) \bmod 2) \\ &= (a+1) - ((a+1) \bmod 2) + f((a+1) \bmod 2). \end{aligned}$$

Base: Vamos provar que

$$f(b) = b - (b \bmod 2) + f(b \bmod 2),\ \textsf{para todo}\ b \in \{0,1\}.$$

Por um lado,

$$f(0) = f(0)\ \textsf{e}\ f(1) = f(1).$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} 0 - (0 \bmod 2) + f(0 \bmod 2) &= 0 + f(0) = f(0), \\ 1 - (1 \bmod 2) + f(1 \bmod 2) &= 0 + f(1) = f(1). \end{aligned}$$

3. **HI:** Seja $a \in \mathbb{N}$ tal que

$$A(k) = k^3, \text{ para todo } k \in [0..a]$$

Passo: Provar que $A(a+1) = (a+1)^3$

Se $a + 1 \geq 0$, então

$$\begin{aligned} A(a+1) &= A(a) + 3(a+1)a + 1 \\ &\stackrel{\text{HI}}{=} a^3 + 3a^2 + 3a + 1 \\ &= (a+1)^3 \end{aligned}$$

Base: Provar que $A(k) = k^3$ para todo $k \in \{0\}$.

Basta verificar que $\mathsf{A}(0) = 0 = 0^3$.

4. Vamos provar por indução em n que

$$\lfloor \lg n \rfloor \geq \frac{f(n) - x}{2},$$

para todo $x \in \mathbb{R}$ e todo $n > 0$.

HI: Sejam $x \in \mathbb{R}$ e $a > 0$ tal que

$$\lfloor \lg k \rfloor \geq \frac{f(k) - x}{2}, \text{ para todo } k \in [1..a].$$

Passo: Vamos provar que

$$\lfloor \lg(a + 1) \rfloor \geq \frac{f(a + 1) - x}{2}$$

Para $1 \leq \left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor \leq a$,

$$\begin{aligned}
f(a + 1) &\leq f\left(\left\lfloor \frac{a + 1}{2} \right\rfloor\right) + x \\
&\overset{\text{HI}}{\leq} 2\left\lfloor \lg \left\lfloor \frac{a + 1}{2} \right\rfloor \right\rfloor + x \\
&= 2\left\lfloor \lg\left(\frac{a + 1}{2}\right) \right\rfloor + x \\
&= 2\left\lfloor \lg\left(\frac{a + 1}{2}\right) + 1 \right\rfloor + x - 2 \\
&= 2\left\lfloor \lg\left(\frac{a + 1}{2}\right) + \lg 2 \right\rfloor + x - 2 \\
&= 2\left\lfloor \lg\left(2\left(\frac{a + 1}{2}\right)\right) \right\rfloor + x - 2 \\
&= 2\lfloor \lg(a + 1) \rfloor + x - 2 \\
&\leq 2\lfloor \lg(a + 1) \rfloor + x,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\lfloor \lg(a + 1) \rfloor \geq \frac{f(a + 1) - x}{2}.$$

Base: Vamos provar que

$$f(1) \leq 2\lfloor \lg 1 \rfloor + x.$$

Como

$$f(1) = f(\lfloor 1/2 \rfloor) + x = f(0) + x \leq x,$$

pois $f(0) \leq 0$.

Como

$$2\lfloor \lg 1 \rfloor + x = 2 \times 0 + x = x,$$

temos

$$f(1) \leq 2\lfloor \lg 1 \rfloor + x.$$