Matemática Discreta

Segunda Prova

19 de novembro de 2021

Instruções

As respostas devem ser enviadas como um arquivo pdf anexo a uma mensagem de e-mail.

1. A mensagem deve ser **enviada** até as 19h15 para `renato.carmo.rc@gmail.com` (turma A) ou `menottid@gmail.com` (turma B).

2. O Subject: da mensagem deve ser "`CI1237: Prova 2`";

3. Quanto ao arquivo pdf anexo à mensagem,

   (a) o nome do arquivo deve ser seu "login" na rede do Departamento de Informática (por exemplo, `jbas18.pdf`);

   (b) O arquivo pode ser produzido digitalmente com LaTeX ou qualquer outro software, ou pode ser uma série de fotos de folhas manuscritas;

   (c) as respostas devem estar na mesma ordem das questões;

   (d) a resposta de cada questão deve iniciar uma página nova;

   (e) a resposta de cada questão pode ocupar várias páginas;

   (f) em cada questão, apresente o raciocínio que conduz à solução;

   (g) caso o arquivo seja produzido a partir de fotos de folhas manuscritas,

      i. escreva com clareza, bom contraste e boa letra;

      ii. cuide para que a fotografia/"scan" seja feita paralela à superfície do papel.

Durante o período de prova o Professor Renato estará em `https://bbb.c3sl.ufpr.br/b/ren-qhs-xmc-oz9` para esclarecer eventuais dúvidas.

Você pode usar todos os resultados já vistos na disciplina como **lemas, teoremas e corolários** (inclusive aqueles cujas demonstrações são deixadas como exercícios) **sem necessidade de prová-los**: basta enunciá-los.

Você pode consultar o material online da disciplina (notas de aula, slides etc) mas não pode comunicar-se com os colegas até as 19h15.

Boa prova.

Em cada questão, apresente o raciocínio que conduz à resposta final.

1. (25 pontos) Resolva a seguinte recorrência.

$$f(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n = 0, \\ 1, & \text{se } 1 \leq n \leq 3, \\ 4f\left(\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor\right) + n - 3, & \text{para todo } n \geq 4. \end{cases}$$

2. (25 pontos) Resolva a seguinte recorrência.

$$f(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n \leq 2, \\ 15f(n-1) - 71f(n-2) + 105f(n-3), & \text{se } n \geq 3. \end{cases}$$

3. (25 pontos) Resolva a seguinte recorrência.

$$f(n) = \begin{cases} n^3, & \text{se } n \leq 2, \\ 10f(n-1) - 25f(n-2) + 7^n, & \text{se } n > 2. \end{cases}$$

4. (25 pontos) Dê uma expressão livre de somatórios para

$$\sum_{i=0}^{n} 3i^2 7^i.$$

1.

$$f(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n = 0. \\ 1, & \text{se } 0 < n < 4. \\ 4f\left(\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor\right) + n - 3, & \text{para todo } n \geq 4. \end{cases}$$

Temos

$$f(n) = m(n)f(h(n)) + s(n), \text{ para todo } n \geq n_0,$$

onde

$$\begin{aligned} h(n) &= \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor, \\ m(n) &= 4, \\ s(n) &= n - 3, \\ n_0 &= 1, \end{aligned}$$

e, portanto,

$$h^k(n) = \left\lfloor \frac{n}{4^k} \right\rfloor,$$

e

$$h^k(n) < n_0,$$

se e somente se

$$\left\lfloor \frac{n}{4^k} \right\rfloor < 4,$$

ou seja,

$$\frac{n}{4^k} < 4,$$

isto é,

$$4^{k+1} > n,$$

ou seja

$$k > \log_4 n - 1$$

e

$$u = \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid h^k(n) < n_0\right\} = \lfloor \log_4 n - 1 \rfloor + 1 = \lfloor \log_4 n \rfloor - 1 + 1 = \lfloor \log_4 n \rfloor$$

Então

$$\begin{aligned}
f(n) &= f(h^u(n)) \prod_{i=0}^{u-1} m(h^i(n)) + \sum_{i=0}^{u-1} s(h^i(n)) \prod_{j=0}^{i-1} m(h^j(n)) \\
&= f\left(\left\lfloor \frac{n}{4^{\lfloor \log_4 n \rfloor}} \right\rfloor\right) \prod_{i=0}^{\lfloor \log_4 n \rfloor - 1} 4 + \sum_{i=0}^{\lfloor \log_4 n \rfloor - 1} s\left(\left\lfloor \frac{n}{4^i} \right\rfloor\right) \prod_{j=0}^{i-1} 4 \\
&= f\left(\left\lfloor \frac{n}{4^{\lfloor \log_4 n \rfloor}} \right\rfloor\right) 4^{\lfloor \log_4 n \rfloor} + \sum_{i=0}^{\lfloor \log_4 n \rfloor - 1} 4^i \left(\left\lfloor \frac{n}{4^i} \right\rfloor - 3\right) \\
&= 4^{\lfloor \log_4 n \rfloor} f\left(\left\lfloor \frac{n}{4^{\lfloor \log_4 n \rfloor}} \right\rfloor\right) + \sum_{i=0}^{\lfloor \log_4 n \rfloor - 1} 4^i \left\lfloor \frac{n}{4^i} \right\rfloor - 3 \sum_{i=0}^{\lfloor \log_4 n \rfloor - 1} 4^i \\
&= 4^{\lfloor \log_4 n \rfloor} f\left(\left\lfloor \frac{n}{4^{\lfloor \log_4 n \rfloor}} \right\rfloor\right) + \sum_{i=0}^{\lfloor \log_4 n \rfloor - 1} 4^i \left\lfloor \frac{n}{4^i} \right\rfloor - 3(\frac{4^{\lfloor \log_4 n \rfloor} - 1}{3}) \\
&= 4^{\lfloor \log_4 n \rfloor} f\left(\left\lfloor \frac{n}{4^{\lfloor \log_4 n \rfloor}} \right\rfloor\right) + \sum_{i=0}^{\lfloor \log_4 n \rfloor - 1} 4^i \left\lfloor \frac{n}{4^i} \right\rfloor - 4^{\lfloor \log_4 n \rfloor} + 1 \\
&= 4^{\lfloor \log_4 n \rfloor} \left(f\left(\left\lfloor \frac{n}{4^{\lfloor \log_4 n \rfloor}} \right\rfloor\right) - 1\right) + \sum_{i=0}^{\lfloor \log_4 n \rfloor - 1} 4^i \left\lfloor \frac{n}{4^i} \right\rfloor + 1.
\end{aligned}$$

Como

$$\frac{n}{4^{\log_4 n}} = 1 \leq \frac{n}{4^{\lfloor \log_4 n \rfloor}} < 4 = \frac{n}{4^{\log_4 n/4}},$$

vem que

$$\left\lfloor \frac{n}{4^{\lfloor \log_4 n \rfloor}} \right\rfloor \in \{1, 2, 3\}$$

e

$$f(\left\lfloor \frac{n}{4^{\lfloor \log_4 n \rfloor}} \right\rfloor) = f(i) = 1, i \in \{1, 2, 3\}.$$

Então,

$$\begin{aligned}
f(n) &= 4^{\lfloor \log_4 n \rfloor} \left(f\left(\left\lfloor \frac{n}{4^{\lfloor \log_4 n \rfloor}} \right\rfloor\right) - 1\right) + \sum_{i=0}^{\lfloor \log_4 n \rfloor - 1} 4^i \left\lfloor \frac{n}{4^i} \right\rfloor + 1 \\
&= 4^{\lfloor \log_4 n \rfloor}(1 - 1) + \sum_{i=0}^{\lfloor \log_4 n \rfloor - 1} 4^i \left\lfloor \frac{n}{4^i} \right\rfloor + 1 \\
&= \sum_{i=0}^{\lfloor \log_4 n \rfloor - 1} 4^i \left\lfloor \frac{n}{4^i} \right\rfloor + 1.
\end{aligned}$$

2. $f(n)$ satisfaz uma RLH cujo PC é

$$X^3 - 15X^2 + 71X - 105 = (X-3)(X-5)(X-7)$$

e

$$f(n) = a3^n + b5^n + c7^n$$

Os coeficientes a, b e c são dados por

$$\begin{aligned} f(0) &= a3^0 + b5^0 + c7^0, \\ f(1) &= a3^1 + b5^1 + c7^1, \\ f(2) &= a3^2 + b5^2 + c7^2, \end{aligned}$$

ou seja

$$\begin{aligned} (1)\ 0 &= a + b + c, \\ (2)\ 1 &= 3a + 5b + 7c, \\ (3)\ 2 &= 9a + 25b + 49c, \end{aligned}$$

fazendo (2)-3×(1) e (3)-9×(1), vem que,

$$\begin{aligned} 1 &= 2b + 4c, \\ 2 &= 16b + 40c, \end{aligned}$$

ou seja

$$\begin{aligned} (4)\ 10 &= 20b + 40c, \\ (5)\ 2 &= 16b + 40c, \end{aligned}$$

fazendo (4)-(5), vem que,

$$b = 2,$$

e substituindo $b = 2$ em (1) e (2), vem que

$$\begin{aligned} (6)\ -2 &= a + c, \\ (7)\ -9 &= 3a + 7c, \end{aligned}$$

fazendo (7)-3×(6), vem que

$$c = -\frac{3}{4},$$

e então

$$a = -\frac{5}{4}.$$

Portanto

$$f(n) = a3^n + b5^n + c7^n = -\frac{5}{4}.3^n + 2.5^n - \frac{3}{4}.7^n = \frac{8.5^n - 5.3^n - 3.7^n}{4}, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

3. Usando a notação do Teorema **??** temos

$$\begin{aligned} a_1 &= 10, \\ a_2 &= -25, \\ g(n) &= 7^n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Como

$$g(n) = 7g(n-1), \text{ para todo } n > 0,$$

então g satisfaz uma RLH cujo polinômio característico é

$$G = (X - 7)$$

Pelo Teorema **??** temos que f pertence ao espaço vetorial cujo polinômio característico é

$$G(X^2 - 10X + 25) = (X-7)(X-5)(X-5) = (X-5)^2(X-7),$$

e, portanto, pelo Corolário **??**, temos

$$f(n) = a5^n + bn5^n + c7^n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

onde $\{a, b, c\}$ é a solução do sistema

$$f(t) = a5^t + bt5^t + c7^t, 0 \leq t < 3,$$

isto é,

$$\begin{aligned} f(0) &= a5^0 + b(0)5^0 + c7^0, \\ f(1) &= a5^1 + b(1)5^1 + c7^1, \\ f(2) &= a5^2 + b(2)5^2 + c7^2. \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} 0 &= a + c, \\ 1 &= 5a + 5b + 7c, \\ 8 &= 25a + 50b + 49c, \end{aligned}$$

e portanto

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{2}, \\ b &= \frac{2}{5}, \\ c &= -\frac{1}{2}, \end{aligned}$$

temos

$$f(n) = -\frac{1}{2}5^n + \frac{2}{5}n5^n - \frac{1}{2}7^n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

4.
$$\sum_{i=0}^{n} 3i^2 7^i.$$

Usando a notação do Corolário **??** temos

$$s(n) = \sum_{i=0}^{n} g(i),$$

com

$$g(n) = 3n^2 7^n.$$

Como

$$g(n) = 3n^{2}7^n$$

podemos concluir que a função s satisfaz uma recorrência linear homogênea cujo polinômio característico é $(X-1)(X-7)^{2+1} = (X-1)(X-7)^3$.

Pelo Teorema **??**, temos

$$s(n) = a1^n + bn^0 7^n + cn^1 7^n + dn^2 7^n = a + b7^n + cn7^n + dn^2 7^n,$$

onde (a, b, c, d) é dado pela solução do sistema

$$\begin{aligned}
s(0) &= a + b7^0 + c.0.7^0 + d.0^2.7^0,\\
s(1) &= a + b7^1 + c.1.7^1 + d.1^2.7^1,\\
s(2) &= a + b7^2 + c.2.7^2 + d.2^2.7^2,\\
s(3) &= a + b7^3 + c.3.7^3 + d.3^2.7^3,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0 &= a + b + 0c + 0d,\\
21 &= a + 7b + 7c + 7d,\\
609 &= a + 49b + 98c + 196d,\\
9870 &= a + 343b + 1029c + 3087d,
\end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned}
s(n) &= a + b7^n + cn7^n + dn^2 7^n\\
&= -\frac{7}{9} + \frac{7}{9}.7^n - \frac{7}{6}n7^n + \frac{7}{2}n^2 7^n\\
&= 7\left(\frac{7^n}{9} - \frac{n7^n}{6} + \frac{n^2 7^n}{2} - \frac{1}{9}\right), \qquad = \frac{7}{18}(2 \times 7^n - 3n7^n + 9n^2 7^n - 2)
\end{aligned}$$

---

rc: a resposta não devia ser múltiplo de 3?

dm: faz sentido a resposta ser múltiplo de 3, mas parece que a resposta é coerente. conferi que a resposta satisfaz os valores para $n \in \{0, 1, 2, 3\}$. veja abaixo como obtive os coeficiente (python3). conferi também os valores iniciai dos somatórios, o que eu fiz de errado?

```
>>> import numpy as np
>>> a = np.array([[1,1,0,0],[1,7,7,7],[1,49,98,196],[1,343,1029,3087]])
>>> b = np.array([0,21,609,9870])
>>> x = np.linalg.solve(a,b)
>>> x
array([-0.77777778,  0.77777778, -1.16666667,  3.5       ])
>>> print(-7/9, +7/9, -7/6, +7/2)
-0.7777777777777778 0.7777777777777778 -1.1666666666666667 3.5
```

depois conferi para $n = 10$ (e também para $n = 100$), mas não provei! :-D

```
>>> sum([3*i**2*7**i for i in range(0,10+1)])
95790495549
>>> n=10;7*(7**n/9 - n*7**n/6+n**2*7**n/2 -1/9)
95790495549.0
```

rc: então, apesar de não ser evidente, deve ser verdade que

$$\frac{7^n}{9} - \frac{n7^n}{6} + \frac{n^2 7^n}{2} - \frac{1}{9} = \frac{(2 - 3n + 9n^2)7^n - 2}{18}$$

é múltiplo de 3 para todo n. Dá um exercício interessante de indução ...