Matemática Discreta

Unidade 2: Predicados e Quantificadores

Renato Carmo
David Menotti

Departamento de Informática da UFPR

Segundo Período Especial de 2020

Predicados

Predicado: “proposição parametrizada”

Predicados

Predicado: "proposição parametrizada"

$P(x)$: $x \leq x^2$

Predicados

Predicado: "proposição parametrizada"

$P(x)$: $x \leq x^2$

x: **variável livre** do predicado

Predicados

Predicado: "proposição parametrizada"

$P(x)$: $x \leq x^2$

x: **variável livre** do predicado

Predicados não são verdadeiros nem falsos

Predicados

Predicado: "proposição parametrizada"

$P(x)$: $x \leq x^2$

x: **variável livre** do predicado

Predicados não são verdadeiros nem falsos

Predicados podem ter várias variáveis livres

Predicados

Predicado: “proposição parametrizada”

$P(x)$: $x \leq x^2$

x: **variável livre** do predicado

Predicados não são verdadeiros nem falsos

Predicados podem ter várias variáveis livres

$Q(x, y)$: $x \leq y^2$.

Predicados

Predicado: “proposição parametrizada”

$P(x)$: $x \leq x^2$

x: **variável livre** do predicado

Predicados não são verdadeiros nem falsos

Predicados podem ter várias variáveis livres

$Q(x, y)$: $x \leq y^2$.

variáveis livres “especificadas” (“instanciadas”) $\longrightarrow$ proposição

Exercício 3

$$\begin{aligned} P(x) &: \quad x \leq x^2, \\ Q(x,y) &: \quad x \leq y^2. \end{aligned}$$

Exercício 3

$$
\begin{aligned}
P(x) &: \quad x \leq x^2, \\
Q(x, y) &: \quad x \leq y^2.
\end{aligned}
$$

1. $P(2)$

Exercício 3

$$\begin{aligned} P(x) &: \quad x \leq x^2, \\ Q(x,y) &: \quad x \leq y^2. \end{aligned}$$

1. $P(2)$ é a proposição "$2 \leq 2^2$"

Exercício 3

$$\begin{aligned} P(x) &: \quad x \leq x^2, \\ Q(x,y) &: \quad x \leq y^2. \end{aligned}$$

1. $P(2)$ é a proposição "$2 \leq 2^2$" verdadeira

Exercício 3

$$\begin{aligned} P(x) &: \quad x \leq x^2, \\ Q(x,y) &: \quad x \leq y^2. \end{aligned}$$

1. $P(2)$ é a proposição "$2 \leq 2^2$" verdadeira
2. $P(1/2)$

Exercício 3

$$\begin{aligned} P(x) &: x \leq x^2, \\ Q(x,y) &: x \leq y^2. \end{aligned}$$

1. $P(2)$ é a proposição "$2 \leq 2^2$" verdadeira
2. $P(1/2)$ é a proposição "$1/2 \leq (1/2)^2$"

Exercício 3

$$\begin{aligned} P(x) &: x \leq x^2, \\ Q(x,y) &: x \leq y^2. \end{aligned}$$

1. $P(2)$ é a proposição "$2 \leq 2^2$" verdadeira

2. $P(1/2)$ é a proposição "$1/2 \leq (1/2)^2$" falsa

Exercício 3

$$
\begin{aligned}
P(x) &: \quad x \leq x^2, \\
Q(x, y) &: \quad x \leq y^2.
\end{aligned}
$$

1. $P(2)$ é a proposição "$2 \leq 2^2$" verdadeira
2. $P(1/2)$ é a proposição "$1/2 \leq (1/2)^2$" falsa
3. $Q(1, 1)$

Exercício 3

$$
\begin{aligned}
P(x) &: \quad x \leq x^2, \\
Q(x, y) &: \quad x \leq y^2.
\end{aligned}
$$

1. $P(2)$ é a proposição "$2 \leq 2^2$" verdadeira
2. $P(1/2)$ é a proposição "$1/2 \leq (1/2)^2$" falsa
3. $Q(1, 1)$ é a proposição "$1 \leq 1^2$".

Exercício 3

$$\begin{aligned} P(x) &: \quad x \leq x^2, \\ Q(x,y) &: \quad x \leq y^2. \end{aligned}$$

1. $P(2)$ é a proposição "$2 \leq 2^2$" verdadeira
2. $P(1/2)$ é a proposição "$1/2 \leq (1/2)^2$" falsa
3. $Q(1,1)$ é a proposição "$1 \leq 1^2$". verdadeira

Exercício 3

$$\begin{aligned} P(x) &: \quad x \leq x^2, \\ Q(x,y) &: \quad x \leq y^2. \end{aligned}$$

1. $P(2)$ é a proposição "$2 \leq 2^2$" verdadeira
2. $P(1/2)$ é a proposição "$1/2 \leq (1/2)^2$" falsa
3. $Q(1,1)$ é a proposição "$1 \leq 1^2$". verdadeira
4. $Q(1,t)$

Exercício 3

$$\begin{aligned} P(x) &: \quad x \leq x^2, \\ Q(x,y) &: \quad x \leq y^2. \end{aligned}$$

1. $P(2)$ é a proposição "$2 \leq 2^2$" verdadeira
2. $P(1/2)$ é a proposição "$1/2 \leq (1/2)^2$" falsa
3. $Q(1,1)$ é a proposição "$1 \leq 1^2$". verdadeira
4. $Q(1,t)$ não é uma proposição

Exercício 3

$$\begin{aligned} P(x) &: \quad x \leq x^2, \\ Q(x,y) &: \quad x \leq y^2. \end{aligned}$$

1. $P(2)$ é a proposição "$2 \leq 2^2$" verdadeira
2. $P(1/2)$ é a proposição "$1/2 \leq (1/2)^2$" falsa
3. $Q(1,1)$ é a proposição "$1 \leq 1^2$". verdadeira
4. $Q(1,t)$ não é uma proposição
   $Q(1,t)$ é o predicado "$1 \leq t^2$"

Quantificadores

$P(x)$: predicado

X: conjunto

$P(x)$, para todo $x \in X$ é uma proposição

Quantificadores

$P(x)$: predicado

X: conjunto

$P(x)$, para todo $x \in X$ é uma proposição **quantificação universal de P em X**

Quantificadores

$P(x)$: predicado

X: conjunto

$P(x)$, para todo $x \in X$ é uma proposição **quantificação universal de P em X**

"$P(x)$, para todo $x \in X$" é uma proposição verdadeira quando

Quantificadores

$P(x)$: predicado

X: conjunto

$P(x)$, para todo $x \in X$ é uma proposição **quantificação universal de P em X**

"$P(x)$, para todo $x \in X$" é uma proposição verdadeira quando $P(\overline{x})$ for verdadeira para todo elemento $\overline{x} \in X$

Quantificadores

$P(x)$: predicado

X: conjunto

$P(x)$, para todo $x \in X$ é uma proposição **quantificação universal de P em X**

"$P(x)$, para todo $x \in X$" é uma proposição verdadeira quando $P(\overline{x})$ for verdadeira para todo elemento $\overline{x} \in X$

$P(x)$, para algum $x \in X$ é uma proposição

Quantificadores

$P(x)$: predicado

X: conjunto

$P(x)$, para todo $x \in X$ é uma proposição **quantificação universal de P em X**

"$P(x)$, para todo $x \in X$" é uma proposição verdadeira quando $P(\overline{x})$ for verdadeira para todo elemento $\overline{x} \in X$

$P(x)$, para algum $x \in X$ é uma proposição **quantificação existencial de P em X**

Quantificadores

$P(x)$: predicado

X: conjunto

$P(x)$, para todo $x \in X$ é uma proposição **quantificação universal de P em X**

"$P(x)$, para todo $x \in X$" é uma proposição verdadeira quando $P(\overline{x})$ for verdadeira para todo elemento $\overline{x} \in X$

$P(x)$, para algum $x \in X$ é uma proposição **quantificação existencial de P em X**

"$P(x)$, para algum $x \in X$" é uma proposição verdadeira quando

Quantificadores

$P(x)$: predicado

X: conjunto

$P(x)$, para todo $x \in X$ é uma proposição **quantificação universal de P em X**

"$P(x)$, para todo $x \in X$" é uma proposição verdadeira quando $P(\overline{x})$ for verdadeira para todo elemento $\overline{x} \in X$

$P(x)$, para algum $x \in X$ é uma proposição **quantificação existencial de P em X**

"$P(x)$, para algum $x \in X$" é uma proposição verdadeira quando $P(\overline{x})$ for verdadeira para algum elemento $\overline{x} \in X$

Exercicio 4

$P(x)$: "$x \leq x^2$"

Exercicio 4

$P(x)$: "$x \leq x^2$"

1. $P(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$

Exercicio 4

$P(x)$: "$x \leq x^2$"

1. $P(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$ é uma proposição falsa

Exercicio 4

$P(x)$: "$x \leq x^2$"

1. $P(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$ é uma proposição falsa porque $\frac{1}{2} \in X$

Exercicio 4

$P(x)$: "$x \leq x^2$"

1. $P(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$ é uma proposição falsa
   porque $\frac{1}{2} \in X$ e
   $P\left(\frac{1}{2}\right)$

Exercicio 4

$P(x)$: "$x \leq x^2$"

1. $P(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$ é uma proposição falsa porque $\frac{1}{2} \in X$ e $P\left(\frac{1}{2}\right)$ é a proposição $\frac{1}{2} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^2$

Exercicio 4

$P(x)$: "$x \leq x^2$"

1. $P(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$ é uma proposição falsa
   porque $\frac{1}{2} \in X$ e
   $P\left(\frac{1}{2}\right)$ é a proposição $\frac{1}{2} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^2$ que é falsa

Exercicio 4

$P(x)$: "$x \leq x^2$"

1. $P(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$ é uma proposição falsa
   porque $\frac{1}{2} \in X$ e
   $P\left(\frac{1}{2}\right)$ é a proposição $\frac{1}{2} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^2$ que é falsa

2. $P(x)$, para algum $x \in \mathbb{R}$

Exercicio 4

$P(x)$: "$x \leq x^2$"

1. $P(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$ é uma proposição falsa
   porque $\frac{1}{2} \in X$ e
   $P\left(\frac{1}{2}\right)$ é a proposição $\frac{1}{2} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^2$ que é falsa

2. $P(x)$, para algum $x \in \mathbb{R}$ é uma proposição verdadeira

Exercicio 4

$P(x)$: "$x \leq x^2$"

1. $P(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$ é uma proposição falsa
   porque $\frac{1}{2} \in X$ e
   $P\left(\frac{1}{2}\right)$ é a proposição $\frac{1}{2} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^2$ que é falsa

2. $P(x)$, para algum $x \in \mathbb{R}$ é uma proposição verdadeira
   porque $2 \in X$

Exercicio 4

$P(x)$: "$x \leq x^2$"

1. $P(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$ é uma proposição falsa
   porque $\frac{1}{2} \in X$ e
   $P\left(\frac{1}{2}\right)$ é a proposição $\frac{1}{2} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^2$ que é falsa

2. $P(x)$, para algum $x \in \mathbb{R}$ é uma proposição verdadeira
   porque $2 \in X$ e
   $P(2)$ é a proposição $2 \leq 2^2$

Exercicio 4

$P(x)$: "$x \leq x^2$"

1. $P(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$ é uma proposição falsa
   porque $\frac{1}{2} \in X$ e
   $P\left(\frac{1}{2}\right)$ é a proposição $\frac{1}{2} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^2$ que é falsa

2. $P(x)$, para algum $x \in \mathbb{R}$ é uma proposição verdadeira
   porque $2 \in X$ e
   $P(2)$ é a proposição $2 \leq 2^2$ que é verdadeira

Exercicio 4

$P(x)$: "$x \leq x^2$"

1. $P(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$ é uma proposição falsa
   porque $\frac{1}{2} \in X$ e
   $P\left(\frac{1}{2}\right)$ é a proposição $\frac{1}{2} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^2$ que é falsa

2. $P(x)$, para algum $x \in \mathbb{R}$ é uma proposição verdadeira
   porque $2 \in X$ e
   $P(2)$ é a proposição $2 \leq 2^2$ que é verdadeira

3. $P(x)$, para todo $x \geq 1$ é uma proposição verdadeira

Exercicio 4

$P(x)$: "$x \leq x^2$"

1. $P(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$ é uma proposição falsa
   porque $\frac{1}{2} \in X$ e
   $P\left(\frac{1}{2}\right)$ é a proposição $\frac{1}{2} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^2$ que é falsa

2. $P(x)$, para algum $x \in \mathbb{R}$ é uma proposição verdadeira
   porque $2 \in X$ e
   $P\left(2\right)$ é a proposição $2 \leq 2^2$ que é verdadeira

3. $P(x)$, para todo $x \geq 1$ é uma proposição verdadeira

4. $P(x)$, para algum $0 < x < 1$ é uma proposição falsa

Teorema 2

$P(x)$: predicado

Teorema 2

$P(x)$: predicado

$$\text{não } (P(x), \text{ para todo } x \in X)$$

Teorema 2

$P(x)$: predicado

$$\text{não } (P(x), \text{ para todo } x \in X) \equiv (\text{ não } P(x)), \text{ para algum } x \in X$$

Teorema 2

$P(x)$: predicado

$$\text{não } (P(x), \text{ para todo } x \in X) \equiv (\text{ não } P(x)), \text{ para algum } x \in X,$$

$$\text{não } (P(x), \text{ para algum } x \in X)$$

Teorema 2

$P(x)$: predicado

$$\text{não } (P(x), \text{ para todo } x \in X) \equiv (\text{ não } P(x)), \text{ para algum } x \in X,$$

$$\text{não } (P(x), \text{ para algum } x \in X) \equiv (\text{ não } P(x)), \text{ para todo } x \in X.$$

Quantificação no conjunto vazio

$P(x)$: predicado,

X: $\emptyset$

Quantificação no conjunto vazio

$P(x)$: predicado,

X: $\emptyset$

1. $P(x)$, para algum $x \in X$

Quantificação no conjunto vazio

$P(x)$: predicado,

X: $\emptyset$

1. $P(x)$, para algum $x \in X$ é uma proposição falsa

Quantificação no conjunto vazio

$P(x)$: predicado,

X: $\emptyset$

1. $P(x)$, para algum $x \in X$ é uma proposição falsa
   porque a proposição $P(\overline{x})$ não é verdadeira para nenhum $\overline{x} \in X$

Quantificação no conjunto vazio

$P(x)$: predicado,

X: $\emptyset$

1. $P(x)$, para algum $x \in X$ é uma proposição falsa
   porque a proposição $P(\overline{x})$ não é verdadeira para nenhum $\overline{x} \in X$

2. (não $P(x)$), para algum $x \in X$

Quantificação no conjunto vazio

$P(x)$: predicado,
X: $\emptyset$

1. $P(x)$, para algum $x \in X$ é uma proposição falsa
   porque a proposição $P(\overline{x})$ não é verdadeira para nenhum $\overline{x} \in X$

2. (não $P(x)$), para algum $x \in X$ **também** é uma proposição falsa

Quantificação no conjunto vazio

$P(x)$: predicado,

X: $\emptyset$

1. $P(x)$, para algum $x \in X$ é uma proposição falsa
   porque a proposição $P(\overline{x})$ não é verdadeira para nenhum $\overline{x} \in X$
2. (não $P(x)$), para algum $x \in X$ **também** é uma proposição falsa
3. não ((não $P(x)$), para algum $x \in X$)

Quantificação no conjunto vazio

$P(x)$: predicado,

X: $\emptyset$

1. $P(x)$, para algum $x \in X$ é uma proposição falsa
   porque a proposição $P(\overline{x})$ não é verdadeira para nenhum $\overline{x} \in X$

2. (não $P(x)$), para algum $x \in X$ **também** é uma proposição falsa

3. não ((não $P(x)$), para algum $x \in X$) é uma proposição verdadeira

Quantificação no conjunto vazio

$P(x)$: predicado,
X: $\emptyset$

1. $P(x)$, para algum $x \in X$ é uma proposição falsa
   porque a proposição $P(\overline{x})$ não é verdadeira para nenhum $\overline{x} \in X$
2. (não $P(x)$), para algum $x \in X$ **também** é uma proposição falsa
3. não ((não $P(x)$), para algum $x \in X$) é uma proposição verdadeira
4. não ((não $P(x)$), para algum $x \in X$)

Quantificação no conjunto vazio

$P(x)$: predicado,
X: $\emptyset$

1. $P(x)$, para algum $x \in X$ é uma proposição falsa
   porque a proposição $P(\overline{x})$ não é verdadeira para nenhum $\overline{x} \in X$

2. (não $P(x)$), para algum $x \in X$ **também** é uma proposição falsa

3. não ((não $P(x)$), para algum $x \in X$) é uma proposição verdadeira

4. não ((não $P(x)$), para algum $x \in X$)
   $\equiv$ (não (não $P(x)$), para todo $x \in X$)

Quantificação no conjunto vazio

$P(x)$: predicado,
X: $\emptyset$

1. $P(x)$, para algum $x \in X$ é uma proposição falsa
   porque a proposição $P(\overline{x})$ não é verdadeira para nenhum $\overline{x} \in X$

2. (não $P(x)$), para algum $x \in X$ **também** é uma proposição falsa

3. não ((não $P(x)$), para algum $x \in X$) é uma proposição verdadeira

4. não ((não $P(x)$), para algum $x \in X$)
   $\equiv$ (não (não $P(x)$), para todo $x \in X$) $\qquad (T.\ 2)$

Quantificação no conjunto vazio

$P(x)$: predicado,
X: $\emptyset$

1. $P(x)$, para algum $x \in X$ é uma proposição falsa
   porque a proposição $P(\overline{x})$ não é verdadeira para nenhum $\overline{x} \in X$

2. (não $P(x)$), para algum $x \in X$ **também** é uma proposição falsa

3. não ((não $P(x)$), para algum $x \in X$) é uma proposição verdadeira

4. $$\begin{aligned} & \text{não }((\text{ não } P(x)),\ \text{para algum } x \in X) \\ \equiv\ & (\text{ não }(\text{ não } P(x)),\ \text{para todo } x \in X) && (T.\ 2) \\ \equiv\ & P(x),\ \text{para todo } x \in X \end{aligned}$$

Quantificação no conjunto vazio

$P(x)$: predicado,
X: $\emptyset$

1. $P(x)$, para algum $x \in X$ é uma proposição falsa
   porque a proposição $P(\overline{x})$ não é verdadeira para nenhum $\overline{x} \in X$
2. (não $P(x)$), para algum $x \in X$ **também** é uma proposição falsa
3. não ((não $P(x)$), para algum $x \in X$) é uma proposição verdadeira
4. $$\begin{aligned} & \text{não ((não } P(x)\text{), para algum } x \in X) \\ \equiv\ & \text{(não (não } P(x)\text{), para todo } x \in X) \qquad (T.\ 2) \\ \equiv\ & P(x)\text{, para todo } x \in X \text{ é uma proposição verdadeira} \end{aligned}$$

Corolário 3

$P(x)$: predicado,

X: $\emptyset$

Corolário 3

$P(x)$: predicado,

X: $\emptyset$

1. $P(x)$, para todo $x \in X$ é uma proposição verdadeira

Corolário 3

$P(x)$: predicado,

X: $\emptyset$

1. $P(x)$, para todo $x \in X$ é uma proposição verdadeira,

2. $P(x)$, para algum $x \in X$ é uma proposição falsa