

Matemática Discreta

Unidade 5: Piso e Teto (1)

Renato Carmo

David Menotti

Departamento de Informática da UFPR

Segundo Período Especial de 2020

Definições

Definições

piso de x : maior inteiro $\leq x$

Definições

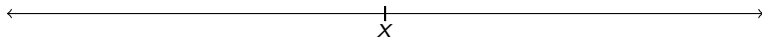
piso de x : maior inteiro $\leq x$

$$\lfloor x \rfloor := \max \{z \in \mathbb{Z} \mid z \leq x\}$$

Definições

piso de x : maior inteiro $\leq x$

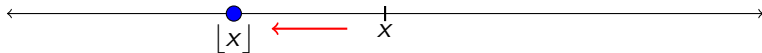
$$\lfloor x \rfloor := \max \{z \in \mathbb{Z} \mid z \leq x\}$$



Definições

piso de x : maior inteiro $\leq x$

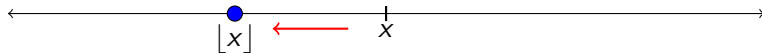
$$\lfloor x \rfloor := \max \{z \in \mathbb{Z} \mid z \leq x\}$$



Definições

piso de x : maior inteiro $\leq x$

$$\lfloor x \rfloor := \max \{z \in \mathbb{Z} \mid z \leq x\}$$

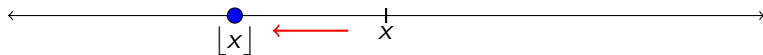


teto de x : menor inteiro $\geq x$

Definições

piso de x : maior inteiro $\leq x$

$$\lfloor x \rfloor := \max \{z \in \mathbb{Z} \mid z \leq x\}$$



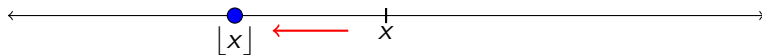
teto de x : menor inteiro $\geq x$

$$\lceil x \rceil := \min \{z \in \mathbb{Z} \mid z \geq x\}$$

Definições

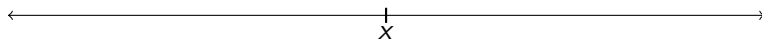
piso de x : maior inteiro $\leq x$

$$\lfloor x \rfloor := \max \{z \in \mathbb{Z} \mid z \leq x\}$$



teto de x : menor inteiro $\geq x$

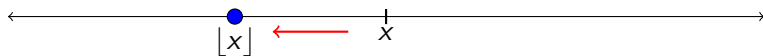
$$\lceil x \rceil := \min \{z \in \mathbb{Z} \mid z \geq x\}$$



Definições

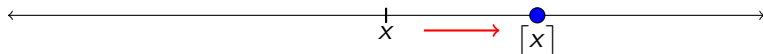
piso de x : maior inteiro $\leq x$

$$\lfloor x \rfloor := \max \{z \in \mathbb{Z} \mid z \leq x\}$$



teto de x : menor inteiro $\geq x$

$$\lceil x \rceil := \min \{z \in \mathbb{Z} \mid z \geq x\}$$



[2]

Exemplos

$$[2] = 2$$

Exemplos

$$\begin{array}{l} \lfloor 2 \rfloor \\ \lceil 2 \rceil \end{array} = 2$$

Exemplos

$$\lfloor 2 \rfloor = 2$$

$$\lceil 2 \rceil = 2$$

Exemplos

$$\lfloor 2 \rfloor = 2$$

$$\lceil 2 \rceil = 2$$

$$\lfloor z \rfloor$$

Exemplos

$$\lfloor 2 \rfloor = 2$$

$$\lceil 2 \rceil = 2$$

$$\lfloor z \rfloor = z, \text{ para todo } z \in \mathbb{Z}$$

Exemplos

$$\lfloor 2 \rfloor = 2$$

$$\lceil 2 \rceil = 2$$

$$\lfloor z \rfloor = z, \text{ para todo } z \in \mathbb{Z}$$

$$\lceil z \rceil$$

Exemplos

$$\lfloor 2 \rfloor = 2$$

$$\lceil 2 \rceil = 2$$

$$\lfloor z \rfloor = z, \text{ para todo } z \in \mathbb{Z}$$

$$\lceil z \rceil = z, \text{ para todo } z \in \mathbb{Z}$$

Exemplos

$$\lfloor 2 \rfloor = 2$$

$$\lceil 2 \rceil = 2$$

$$\lfloor z \rfloor = z, \text{ para todo } z \in \mathbb{Z}$$

$$\lceil z \rceil = z, \text{ para todo } z \in \mathbb{Z}$$

$$\left\lfloor \frac{35}{23} \right\rfloor$$

Exemplos

$$\lfloor 2 \rfloor = 2$$

$$\lceil 2 \rceil = 2$$

$$\lfloor z \rfloor = z, \text{ para todo } z \in \mathbb{Z}$$

$$\lceil z \rceil = z, \text{ para todo } z \in \mathbb{Z}$$

$$\left\lfloor \frac{35}{23} \right\rfloor = 1$$

Exemplos

$$\lfloor 2 \rfloor = 2$$

$$\lceil 2 \rceil = 2$$

$$\lfloor z \rfloor = z, \text{ para todo } z \in \mathbb{Z}$$

$$\lceil z \rceil = z, \text{ para todo } z \in \mathbb{Z}$$

$$\left\lfloor \frac{35}{23} \right\rfloor = 1$$

$$\left\lceil \frac{35}{23} \right\rceil$$

Exemplos

$$\lfloor 2 \rfloor = 2$$

$$\lceil 2 \rceil = 2$$

$$\lfloor z \rfloor = z, \text{ para todo } z \in \mathbb{Z}$$

$$\lceil z \rceil = z, \text{ para todo } z \in \mathbb{Z}$$

$$\left\lfloor \frac{35}{23} \right\rfloor = 1$$

$$\left\lceil \frac{35}{23} \right\rceil = 2$$

Exemplos

$$\lfloor 2 \rfloor = 2$$

$$\lceil 2 \rceil = 2$$

$$\lfloor z \rfloor = z, \text{ para todo } z \in \mathbb{Z}$$

$$\lceil z \rceil = z, \text{ para todo } z \in \mathbb{Z}$$

$$\left\lfloor \frac{35}{23} \right\rfloor = 1$$

$$\left\lceil \frac{35}{23} \right\rceil = 2$$

$$\left\lfloor \frac{-35}{23} \right\rfloor$$

Exemplos

$$\lfloor 2 \rfloor = 2$$

$$\lceil 2 \rceil = 2$$

$$\lfloor z \rfloor = z, \text{ para todo } z \in \mathbb{Z}$$

$$\lceil z \rceil = z, \text{ para todo } z \in \mathbb{Z}$$

$$\left\lfloor \frac{35}{23} \right\rfloor = 1$$

$$\left\lceil \frac{35}{23} \right\rceil = 2$$

$$\left\lfloor \frac{-35}{23} \right\rfloor = -2$$

Exemplos

$$\lfloor 2 \rfloor = 2$$

$$\lceil 2 \rceil = 2$$

$$\lfloor z \rfloor = z, \text{ para todo } z \in \mathbb{Z}$$

$$\lceil z \rceil = z, \text{ para todo } z \in \mathbb{Z}$$

$$\left\lfloor \frac{35}{23} \right\rfloor = 1$$

$$\left\lceil \frac{35}{23} \right\rceil = 2$$

$$\left\lfloor \frac{-35}{23} \right\rfloor = -2$$

$$\left\lceil \frac{-35}{23} \right\rceil$$

Exemplos

$$\lfloor 2 \rfloor = 2$$

$$\lceil 2 \rceil = 2$$

$$\lfloor z \rfloor = z, \text{ para todo } z \in \mathbb{Z}$$

$$\lceil z \rceil = z, \text{ para todo } z \in \mathbb{Z}$$

$$\left\lfloor \frac{35}{23} \right\rfloor = 1$$

$$\left\lceil \frac{35}{23} \right\rceil = 2$$

$$\left\lfloor \frac{-35}{23} \right\rfloor = -2$$

$$\left\lceil \frac{-35}{23} \right\rceil = -1$$

Teorema 8

Teorema 8

$\lfloor x \rfloor$ é o único inteiro que satisfaz

$$x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$$

Teorema 8

$\lfloor x \rfloor$ é o único inteiro que satisfaz

$$x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$$

Demonstração.



Teorema 8

$\lfloor x \rfloor$ é o único inteiro que satisfaz

$$x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$$

Demonstração.

1. $\{y \in \mathbb{R} \mid x - 1 < y \leq x\}$



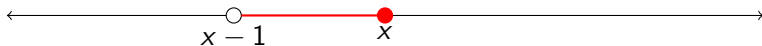
Teorema 8

$\lfloor x \rfloor$ é o único inteiro que satisfaz

$$x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$$

Demonstração.

1. $\{y \in \mathbb{R} \mid x - 1 < y \leq x\}$



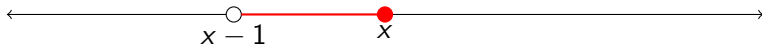
Teorema 8

$\lfloor x \rfloor$ é o único inteiro que satisfaz

$$x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$$

Demonstração.

1. $\{y \in \mathbb{R} \mid x - 1 < y \leq x\}$ tem **um único** inteiro



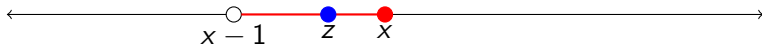
Teorema 8

$\lfloor x \rfloor$ é o único inteiro que satisfaz

$$x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$$

Demonstração.

1. $\{y \in \mathbb{R} \mid x - 1 < y \leq x\}$ tem **um único** inteiro: z



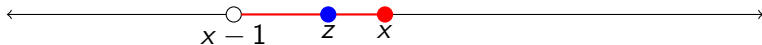
Teorema 8

$\lfloor x \rfloor$ é o único inteiro que satisfaz

$$x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$$

Demonstração.

1. $\{y \in \mathbb{R} \mid x - 1 < y \leq x\}$ tem **um único** inteiro: z
2. todo inteiro maior que z também é maior que x



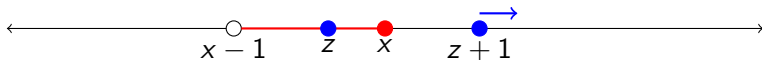
Teorema 8

$\lfloor x \rfloor$ é o único inteiro que satisfaz

$$x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$$

Demonstração.

1. $\{y \in \mathbb{R} \mid x - 1 < y \leq x\}$ tem **um único** inteiro: z
2. todo inteiro maior que z também é maior que x



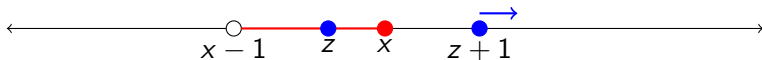
Teorema 8

$\lfloor x \rfloor$ é o único inteiro que satisfaz

$$x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$$

Demonstração.

1. $\{y \in \mathbb{R} \mid x - 1 < y \leq x\}$ tem **um único** inteiro: z
2. todo inteiro maior que z também é maior que x
3. z é o maior inteiro $\leq x$



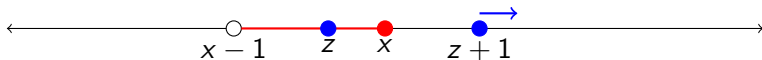
Teorema 8

$\lfloor x \rfloor$ é o único inteiro que satisfaz

$$x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$$

Demonstração.

1. $\{y \in \mathbb{R} \mid x - 1 < y \leq x\}$ tem **um único** inteiro: z
2. todo inteiro maior que z também é maior que x
3. z é o maior inteiro $\leq x$
4. $z = \lfloor x \rfloor$



Teorema 9

Teorema 9

$\lceil x \rceil$ é o único inteiro que satisfaz

$$x \leq \lceil x \rceil < x + 1$$

Teorema 9

$\lceil x \rceil$ é o único inteiro que satisfaz

$$x \leq \lceil x \rceil < x + 1$$

Demonstração.

Exercício 29



Exercício 36

Exercício 36

$$\frac{n}{2} < 2^{\lfloor \lg n \rfloor} \leq n \leq 2^{\lceil \lg n \rceil} < 2n$$

Exercício 36

$$\frac{n}{2} < 2^{\lfloor \lg n \rfloor} \leq n \leq 2^{\lceil \lg n \rceil} < 2n$$

$$\lfloor \lg n \rfloor \leq \lg n \leq \lceil \lg n \rceil$$

Exercício 36

$$\frac{n}{2} < 2^{\lfloor \lg n \rfloor} \leq n \leq 2^{\lceil \lg n \rceil} < 2n$$

$$\lfloor \lg n \rfloor \leq \lg n \leq \lceil \lg n \rceil$$

$$\lg n - 1 < \lfloor \lg n \rfloor \leq \lg n \leq \lceil \lg n \rceil < \lg n + 1 \quad (\text{T. 8 e 9})$$

Exercício 36

$$\frac{n}{2} < 2^{\lfloor \lg n \rfloor} \leq n \leq 2^{\lceil \lg n \rceil} < 2n$$

$$\lfloor \lg n \rfloor \leq \lg n \leq \lceil \lg n \rceil$$

$$\lg n - 1 < \lfloor \lg n \rfloor \leq \lg n \leq \lceil \lg n \rceil < \lg n + 1 \quad (\text{T. 8 e 9})$$

$$2^{\lg n - 1} < 2^{\lfloor \lg n \rfloor} \leq 2^{\lg n} \leq 2^{\lceil \lg n \rceil} < 2^{\lg n + 1} \quad 2^x \text{ é função crescente}$$

Exercício 36

$$\frac{n}{2} < 2^{\lfloor \lg n \rfloor} \leq n \leq 2^{\lceil \lg n \rceil} < 2n$$

$$\lfloor \lg n \rfloor \leq \lg n \leq \lceil \lg n \rceil$$

$$\lg n - 1 < \lfloor \lg n \rfloor \leq \lg n \leq \lceil \lg n \rceil < \lg n + 1 \quad (\text{T. 8 e 9})$$

$$2^{\lg n - 1} < 2^{\lfloor \lg n \rfloor} \leq 2^{\lg n} \leq 2^{\lceil \lg n \rceil} < 2^{\lg n + 1} \quad 2^x \text{ é função crescente}$$

$$n \times 2^{-1} < 2^{\lfloor \lg n \rfloor} \leq n \leq 2^{\lceil \lg n \rceil} < n \times 2^1 \quad (2^{\lg n} = n)$$

Exercício 36

$$\frac{n}{2} < 2^{\lfloor \lg n \rfloor} \leq n \leq 2^{\lceil \lg n \rceil} < 2n$$

$$\lfloor \lg n \rfloor \leq \lg n \leq \lceil \lg n \rceil$$

$$\lg n - 1 < \lfloor \lg n \rfloor \leq \lg n \leq \lceil \lg n \rceil < \lg n + 1 \quad (\text{T. 8 e 9})$$

$$2^{\lg n - 1} < 2^{\lfloor \lg n \rfloor} \leq 2^{\lg n} \leq 2^{\lceil \lg n \rceil} < 2^{\lg n + 1} \quad 2^x \text{ é função crescente}$$

$$n \times 2^{-1} < 2^{\lfloor \lg n \rfloor} \leq n \leq 2^{\lceil \lg n \rceil} < n \times 2^1 \quad (2^{\lg n} = n)$$

$$\frac{n}{2} < 2^{\lfloor \lg n \rfloor} \leq n \leq 2^{\lceil \lg n \rceil} < 2n$$

Corolário 10

Corolário 10

$$\lfloor x \rfloor + z = \lfloor x + z \rfloor$$

Corolário 10

$$\lfloor x \rfloor + z = \lfloor x + z \rfloor, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{Z}$$

Corolário 10

$$\lfloor x \rfloor + z = \lfloor x + z \rfloor, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{Z}$$

Demonstração.

Corolário 10

$$\lfloor x \rfloor + z = \lfloor x + z \rfloor, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{Z}$$

Demonstração.

1. $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$

(T. 8)

Corolário 10

$$\lfloor x \rfloor + z = \lfloor x + z \rfloor, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{Z}$$

Demonstração.

1. $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$
2. $(x - 1) + z < \lfloor x \rfloor + z \leq x + z$

(T. 8)

Corolário 10

$$\lfloor x \rfloor + z = \lfloor x + z \rfloor, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{Z}$$

Demonstração.

1. $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$
2. $(x - 1) + z < \lfloor x \rfloor + z \leq x + z$
3. $(x + z) - 1 < \lfloor x \rfloor + z \leq x + z$

(T. 8)

Corolário 10

$$\lfloor x \rfloor + z = \lfloor x + z \rfloor, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{Z}$$

Demonstração.

1. $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$
2. $(x - 1) + z < \lfloor x \rfloor + z \leq x + z$
3. $(x + z) - 1 < \lfloor x \rfloor + z \leq x + z$
4. $\lfloor x \rfloor + z$ é inteiro

(T. 8)

Corolário 10

$$\lfloor x \rfloor + z = \lfloor x + z \rfloor, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{Z}$$

Demonstração.

1. $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$ (T. 8)
2. $(x - 1) + z < \lfloor x \rfloor + z \leq x + z$
3. $(x + z) - 1 < \lfloor x \rfloor + z \leq x + z$
4. $\lfloor x \rfloor + z$ é inteiro
5. $\lfloor x \rfloor + z = \lfloor x + z \rfloor$ (T. 8)



Teorema 11

Teorema 11

$$-\lceil x \rceil = \lfloor -x \rfloor$$

Teorema 11

$$-\lceil x \rceil = \lfloor -x \rfloor, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}$$

Teorema 11

$$-\lceil x \rceil = \lfloor -x \rfloor, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}$$

Demonstração.

Teorema 11

$$-\lceil x \rceil = \lfloor -x \rfloor, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}$$

Demonstração.

1. $x \leq \lceil x \rceil < x + 1$

(T. 9)

Teorema 11

$$-\lceil x \rceil = \lfloor -x \rfloor, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}$$

Demonstração.

1. $x \leq \lceil x \rceil < x + 1$

2. $-x \geq -\lceil x \rceil > -(x + 1)$

(T. 9)

Teorema 11

$$-\lceil x \rceil = \lfloor -x \rfloor, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}$$

Demonstração.

1. $x \leq \lceil x \rceil < x + 1$
2. $-x \geq -\lceil x \rceil > -(x + 1)$
3. $(-x) - 1 < -\lceil x \rceil \leq -x$

(T. 9)

Teorema 11

$$-\lceil x \rceil = \lfloor -x \rfloor, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}$$

Demonstração.

1. $x \leq \lceil x \rceil < x + 1$
2. $-x \geq -\lceil x \rceil > -(x + 1)$
3. $(-x) - 1 < -\lceil x \rceil \leq -x$
4. $-\lceil x \rceil$ é inteiro

(T. 9)

Teorema 11

$$-\lceil x \rceil = \lfloor -x \rfloor, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}$$

Demonstração.

1. $x \leq \lceil x \rceil < x + 1$ (T. 9)
2. $-x \geq -\lceil x \rceil > -(x + 1)$
3. $(-x) - 1 < -\lceil x \rceil \leq -x$
4. $-\lceil x \rceil$ é inteiro
5. $-\lceil x \rceil = \lfloor -x \rfloor$ (T. 8)



Corolário 12

Corolário 12

$$z - \lfloor x \rfloor = \lceil z - x \rceil$$

Corolário 12

$$z - \lfloor x \rfloor = \lceil z - x \rceil, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{Z}$$

Corolário 12

$$z - \lfloor x \rfloor = \lceil z - x \rceil, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{Z}$$

Demonstração.

Corolário 12

$$z - \lfloor x \rfloor = \lceil z - x \rceil, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{Z}$$

Demonstração.

$$z - \lfloor x \rfloor = -(\lfloor x \rfloor - z)$$



Corolário 12

$$z - \lfloor x \rfloor = \lceil z - x \rceil, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{Z}$$

Demonstração.

$$\begin{aligned} z - \lfloor x \rfloor &= -(\lfloor x \rfloor - z) \\ &\stackrel{\text{T. 10}}{=} \lceil x - z \rceil \end{aligned}$$



Corolário 12

$$z - \lfloor x \rfloor = \lceil z - x \rceil, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{Z}$$

Demonstração.

$$\begin{aligned} z - \lfloor x \rfloor &= -(\lfloor x \rfloor - z) \\ &\stackrel{\text{T. 10}}{=} -\lfloor x - z \rfloor \\ &\stackrel{\text{T. 11}}{=} \lceil -(x - z) \rceil \end{aligned}$$



Corolário 12

$$z - \lfloor x \rfloor = \lceil z - x \rceil, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{Z}$$

Demonstração.

$$\begin{aligned} z - \lfloor x \rfloor &= -(\lfloor x \rfloor - z) \\ &\stackrel{\text{T. 10}}{=} -\lfloor x - z \rfloor \\ &\stackrel{\text{T. 11}}{=} \lceil -(x - z) \rceil \\ &= \lceil z - x \rceil \end{aligned}$$



Teorema 13

$$\min \{k \in \mathbb{Z} \mid k > x\} = \lfloor x \rfloor + 1$$

Teorema 13

$$\min \{k \in \mathbb{Z} \mid k > x\} = \lfloor x \rfloor + 1, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}$$

Teorema 13

$$\min \{k \in \mathbb{Z} \mid k > x\} = \lfloor x \rfloor + 1, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}$$

Demonstração.

Teorema 13

$$\min \{k \in \mathbb{Z} \mid k > x\} = \lfloor x \rfloor + 1, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}$$

Demonstração.

1. $x \in \mathbb{R}$

Teorema 13

$$\min \{k \in \mathbb{Z} \mid k > x\} = \lfloor x \rfloor + 1, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}$$

Demonstração.

1. $x \in \mathbb{R}$
2. $m := \min \{k \in \mathbb{Z} \mid k > x\}$

Teorema 13

$$\min \{k \in \mathbb{Z} \mid k > x\} = \lfloor x \rfloor + 1, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}$$

Demonstração.

1. $x \in \mathbb{R}$
2. $m := \min \{k \in \mathbb{Z} \mid k > x\}$
3. $x < m \leq x + 1$

Teorema 13

$$\min \{k \in \mathbb{Z} \mid k > x\} = \lfloor x \rfloor + 1, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}$$

Demonstração.

1. $x \in \mathbb{R}$
2. $m := \min \{k \in \mathbb{Z} \mid k > x\}$
3. $x < m \leq x + 1$ (único inteiro nesse intervalo)

Teorema 13

$$\min \{k \in \mathbb{Z} \mid k > x\} = \lfloor x \rfloor + 1, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}$$

Demonstração.

1. $x \in \mathbb{R}$
2. $m := \min \{k \in \mathbb{Z} \mid k > x\}$
3. $x < m \leq x + 1$ (único inteiro nesse intervalo)
4. $(x + 1) - 1 < m \leq (x + 1)$

Teorema 13

$$\min \{k \in \mathbb{Z} \mid k > x\} = \lfloor x \rfloor + 1, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}$$

Demonstração.

1. $x \in \mathbb{R}$
2. $m := \min \{k \in \mathbb{Z} \mid k > x\}$
3. $x < m \leq x + 1$ (único inteiro nesse intervalo)
4. $(x + 1) - 1 < m \leq (x + 1)$
5. $m = \lfloor x + 1 \rfloor$ (T. 8)

Teorema 13

$$\min \{k \in \mathbb{Z} \mid k > x\} = \lfloor x \rfloor + 1, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}$$

Demonstração.

1. $x \in \mathbb{R}$
2. $m := \min \{k \in \mathbb{Z} \mid k > x\}$
3. $x < m \leq x + 1$ (único inteiro nesse intervalo)
4. $(x + 1) - 1 < m \leq (x + 1)$
5. $m = \lfloor x + 1 \rfloor$ (T. 8)
6. $m = \lfloor x \rfloor + 1$ (T. 10)



Teorema 14

Teorema 14

$$\max \{k \in \mathbb{Z} \mid k < x\} = \lceil x - 1 \rceil$$

Teorema 14

$$\max \{k \in \mathbb{Z} \mid k < x\} = \lceil x - 1 \rceil, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}$$

Teorema 14

$$\max \{k \in \mathbb{Z} \mid k < x\} = \lceil x - 1 \rceil, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}$$

Demonstração.

Exercício 35

