

Matemática Discreta

Unidade 7: Princípio da Indução Finita

Renato Carmo
David Menotti

Departamento de Informática da UFPR

Segundo Período Especial de 2020

Conjunto A

Conjunto A

$$A \subseteq \mathbb{N}$$

Conjunto A

$$A \subseteq \mathbb{N}$$

satisfaz

Conjunto A

$$A \subseteq \mathbb{N}$$

satisfaz

$$P_1: 0 \in A$$

Conjunto A

$$A \subseteq \mathbb{N}$$

satisfaz

$$P_1: 0 \in A$$

$$P_2: [0..a] \subseteq A \implies a + 1 \in A, \text{ para todo } a \in \mathbb{N}$$

Como é o conjunto A ?

Como é o conjunto A ?

$$P_1: 0 \in A$$

$$P_2: [0..a] \subseteq A \implies a + 1 \in A, \text{ para todo } a \in \mathbb{N}.$$

Como é o conjunto A ?

$$P_1: 0 \in A$$

$$P_2: [0..a] \subseteq A \implies a + 1 \in A, \text{ para todo } a \in \mathbb{N}.$$

$$0 \in A$$

Como é o conjunto A ?

$$P_1: 0 \in A$$

$$P_2: [0..a] \subseteq A \implies a + 1 \in A, \text{ para todo } a \in \mathbb{N}.$$

$$0 \in A$$

(P_1)

Como é o conjunto A ?

$$P_1: 0 \in A$$

$$P_2: [0..a] \subseteq A \implies a + 1 \in A, \text{ para todo } a \in \mathbb{N}.$$

$$0 \in A$$

(P_1)

$$1 \in A$$

Como é o conjunto A ?

$$P_1: 0 \in A$$

$$P_2: [0..a] \subseteq A \implies a + 1 \in A, \text{ para todo } a \in \mathbb{N}.$$

$$0 \in A$$

$$1 \in A$$

$$([0..0] \subseteq A) \quad (P_1)$$

Como é o conjunto A ?

$$P_1: 0 \in A$$

$$P_2: [0..a] \subseteq A \implies a + 1 \in A, \text{ para todo } a \in \mathbb{N}.$$

$$0 \in A$$

(P_1)

$$1 \in A$$

$([0..0] \subseteq A \text{ e } P_2)$

Como é o conjunto A ?

$$P_1: 0 \in A$$

$$P_2: [0..a] \subseteq A \implies a + 1 \in A, \text{ para todo } a \in \mathbb{N}.$$

$$0 \in A$$

$$1 \in A$$

$$2 \in A$$

(P_1)

$([0..0] \subseteq A \text{ e } P_2)$

Como é o conjunto A ?

$$P_1: 0 \in A$$

$$P_2: [0..a] \subseteq A \implies a + 1 \in A, \text{ para todo } a \in \mathbb{N}.$$

$$0 \in A$$

$$1 \in A$$

$$2 \in A$$

(P_1)

$([0..0] \subseteq A \text{ e } P_2)$

$([0..1] \subseteq A$

Como é o conjunto A ?

$$P_1: 0 \in A$$

$$P_2: [0..a] \subseteq A \implies a + 1 \in A, \text{ para todo } a \in \mathbb{N}.$$

$$0 \in A$$

$$(P_1)$$

$$1 \in A$$

$$([0..0] \subseteq A \text{ e } P_2)$$

$$2 \in A$$

$$([0..1] \subseteq A \text{ e } P_2)$$

Como é o conjunto A ?

$$P_1: 0 \in A$$

$$P_2: [0..a] \subseteq A \implies a + 1 \in A, \text{ para todo } a \in \mathbb{N}.$$

$$0 \in A$$

(P_1)

$$1 \in A$$

$([0..0] \subseteq A \text{ e } P_2)$

$$2 \in A$$

$([0..1] \subseteq A \text{ e } P_2)$

$$3 \in A$$

Como é o conjunto A ?

$$P_1: 0 \in A$$

$$P_2: [0..a] \subseteq A \implies a + 1 \in A, \text{ para todo } a \in \mathbb{N}.$$

$$0 \in A$$

$$(P_1)$$

$$1 \in A$$

$$([0..0] \subseteq A \text{ e } P_2)$$

$$2 \in A$$

$$([0..1] \subseteq A \text{ e } P_2)$$

$$3 \in A$$

$$([0..2] \subseteq A$$

Como é o conjunto A ?

$$P_1: 0 \in A$$

$$P_2: [0..a] \subseteq A \implies a + 1 \in A, \text{ para todo } a \in \mathbb{N}.$$

$$0 \in A$$

$$(P_1)$$

$$1 \in A$$

$$([0..0] \subseteq A \text{ e } P_2)$$

$$2 \in A$$

$$([0..1] \subseteq A \text{ e } P_2)$$

$$3 \in A$$

$$([0..2] \subseteq A \text{ e } P_2)$$

Como é o conjunto A ?

$$P_1: 0 \in A$$

$$P_2: [0..a] \subseteq A \implies a + 1 \in A, \text{ para todo } a \in \mathbb{N}.$$

$$0 \in A$$

$$(P_1)$$

$$1 \in A$$

$$([0..0] \subseteq A \text{ e } P_2)$$

$$2 \in A$$

$$([0..1] \subseteq A \text{ e } P_2)$$

$$3 \in A$$

$$([0..2] \subseteq A \text{ e } P_2)$$

...

...

Como é o conjunto A ?

$$P_1: 0 \in A$$

$$P_2: [0..a] \subseteq A \implies a + 1 \in A, \text{ para todo } a \in \mathbb{N}.$$

$$0 \in A$$

(P_1)

$$1 \in A$$

$$([0..0] \subseteq A \text{ e } P_2)$$

$$2 \in A$$

$$([0..1] \subseteq A \text{ e } P_2)$$

$$3 \in A$$

$$([0..2] \subseteq A \text{ e } P_2)$$

...

...

$$6.02 \times 10^{23} \in A$$

Como é o conjunto A ?

$$P_1: 0 \in A$$

$$P_2: [0..a] \subseteq A \implies a + 1 \in A, \text{ para todo } a \in \mathbb{N}.$$

$0 \in A$	(P_1)
$1 \in A$	$([0..0] \subseteq A \text{ e } P_2)$
$2 \in A$	$([0..1] \subseteq A \text{ e } P_2)$
$3 \in A$	$([0..2] \subseteq A \text{ e } P_2)$
$\dots$	$\dots$
$6.02 \times 10^{23} \in A$	$([0..6.02 \times 10^{23} - 1] \subseteq A$

Como é o conjunto A ?

$$P_1: 0 \in A$$

$$P_2: [0..a] \subseteq A \implies a + 1 \in A, \text{ para todo } a \in \mathbb{N}.$$

$0 \in A$	(P_1)
$1 \in A$	$([0..0] \subseteq A \text{ e } P_2)$
$2 \in A$	$([0..1] \subseteq A \text{ e } P_2)$
$3 \in A$	$([0..2] \subseteq A \text{ e } P_2)$
$\dots$	$\dots$
$6.02 \times 10^{23} \in A$	$([0..6.02 \times 10^{23} - 1] \subseteq A \text{ e } P_2)$

Como é o conjunto A ?

$$P_1: 0 \in A$$

$$P_2: [0..a] \subseteq A \implies a + 1 \in A, \text{ para todo } a \in \mathbb{N}.$$

$0 \in A$	(P_1)
$1 \in A$	$([0..0] \subseteq A \text{ e } P_2)$
$2 \in A$	$([0..1] \subseteq A \text{ e } P_2)$
$3 \in A$	$([0..2] \subseteq A \text{ e } P_2)$
$\dots$	$\dots$
$6.02 \times 10^{23} \in A$	$([0..6.02 \times 10^{23} - 1] \subseteq A \text{ e } P_2)$
$\dots$	$\dots$

Como é o conjunto A ?

$$P_1: 0 \in A$$

$$P_2: [0..a] \subseteq A \implies a + 1 \in A, \text{ para todo } a \in \mathbb{N}.$$

$0 \in A$	(P_1)
$1 \in A$	$([0..0] \subseteq A \text{ e } P_2)$
$2 \in A$	$([0..1] \subseteq A \text{ e } P_2)$
$3 \in A$	$([0..2] \subseteq A \text{ e } P_2)$
$\dots$	$\dots$
$6.02 \times 10^{23} \in A$	$([0..6.02 \times 10^{23} - 1] \subseteq A \text{ e } P_2)$
$\dots$	$\dots$

$$A = \mathbb{N}$$

$n \in A?$

$n \in A?$

Sim

$n \in A?$

Sim, porque

1: $0 \in A$

(P_1)

$n \in A?$

Sim, porque

1: $0 \in A$

2: $1 \in A$

(P_1)

$([0..0] \subseteq A$

$n \in A?$

Sim, porque

1: $0 \in A$

2: $1 \in A$

(P_1)

$([0..0] \subseteq A \text{ e } P_2)$

$n \in A?$

Sim, porque

1: $0 \in A$

2: $1 \in A$

3: $2 \in A$

(P_1)

$([0..0] \subseteq A \text{ e } P_2)$

$n \in A?$

Sim, porque

1: $0 \in A$

2: $1 \in A$

3: $2 \in A$

(P_1)

$([0..0] \subseteq A \text{ e } P_2)$

$([0..1] \subseteq A$

$n \in A?$

Sim, porque

1: $0 \in A$

2: $1 \in A$

3: $2 \in A$

(P_1)

$([0..0] \subseteq A \text{ e } P_2)$

$([0..1] \subseteq A \text{ e } P_2)$

$n \in A?$

Sim, porque

1: $0 \in A$

2: $1 \in A$

3: $2 \in A$

...

(P_1)

$([0..0] \subseteq A \text{ e } P_2)$

$([0..1] \subseteq A \text{ e } P_2)$

$n \in A?$

Sim, porque

1: $0 \in A$

2: $1 \in A$

3: $2 \in A$

...

$n+1$: $n \in A$

(P_1)

$([0..0] \subseteq A \text{ e } P_2)$

$([0..1] \subseteq A \text{ e } P_2)$

$n \in A?$

Sim, porque

1: $0 \in A$

(P_1)

2: $1 \in A$

$([0..0] \subseteq A \text{ e } P_2)$

3: $2 \in A$

$([0..1] \subseteq A \text{ e } P_2)$

...

$n+1$: $n \in A$

$([0..n-1] \subseteq A$

$n \in A?$

Sim, porque

$$1: 0 \in A$$

(P_1)

$$2: 1 \in A$$

$$([0..0] \subseteq A \text{ e } P_2)$$

$$3: 2 \in A$$

$$([0..1] \subseteq A \text{ e } P_2)$$

...

$$n+1: n \in A$$

$$([0..n-1] \subseteq A \text{ e } P_2)$$

Moral da História

Se $A \subseteq \mathbb{N}$

Se $A \subseteq \mathbb{N}$ satisfaz

1. $0 \in A$

Se $A \subseteq \mathbb{N}$ satisfaz

1. $0 \in A$ e,
2. $[0..a] \subseteq A \implies a + 1 \in A$, para todo $a \in \mathbb{N}$

Se $A \subseteq \mathbb{N}$ satisfaz

1. $0 \in A$ e,
2. $[0..a] \subseteq A \implies a + 1 \in A$, para todo $a \in \mathbb{N}$

então

Se $A \subseteq \mathbb{N}$ satisfaz

1. $0 \in A$ e,
2. $[0..a] \subseteq A \implies a + 1 \in A$, para todo $a \in \mathbb{N}$

então

$$A = \mathbb{N}$$

Princípio da Indução Finita

Se $A \subseteq \mathbb{N}$ satisfaz

1. $0 \in A$ e,
2. $[0..a] \subseteq A \implies a + 1 \in A$, para todo $a \in \mathbb{N}$

então

$$A = \mathbb{N}$$

Princípio da Indução Finita

Se $A \subseteq \mathbb{N}$ satisfaz

1. $0 \in A$ e,
2. $[0..a] \subseteq A \implies a + 1 \in A$, para todo $a \in \mathbb{N}$

então

$$A = \mathbb{N}$$

existe uma prova finita de que $n \in A$

Princípio da Indução Finita

Se $A \subseteq \mathbb{N}$ satisfaz

1. $0 \in A$ e,
2. $[0..a] \subseteq A \implies a + 1 \in A$, para todo $a \in \mathbb{N}$

então

$$A = \mathbb{N}$$

existe uma prova **finita** de que $n \in A$

($n + 1$ passos)