

Matemática Discreta

Unidade 11: Exercícios de Indução (2)

Renato Carmo
David Menotti

Departamento de Informática da UFPR

Segundo Período Especial de 2020

Unidade 10: Exemplos de Prova por Indução

Exercício 51 (Fibonacci)

Exercício 51

A **sequência de Fibonacci** é a função $F: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ dada por

$$F(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n \leq 1 \\ F(n-1) + F(n-2), & \text{se } n > 1. \end{cases}$$

Exercício 51

A **sequência de Fibonacci** é a função $F: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ dada por

$$F(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n \leq 1 \\ F(n-1) + F(n-2), & \text{se } n > 1. \end{cases}$$

(a) Prove por indução em n que

$$F(n) = \frac{\sqrt{5}}{5} \left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right), \text{ para todo } n \in \mathbb{N}$$

Exercício 51.(a)

Vamos provar que

$$F(n) = \frac{\sqrt{5}}{5} \left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right),$$

por indução em n .

HI: Seja $a \in \mathbb{N}$ tal que

$$F(k) = \frac{\sqrt{5}}{5} \left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^k - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^k \right), \text{ para todo } k \in [0..a],$$

Exercício 51.(a)

Passo: Vamos provar que

$$F(a+1) = \frac{\sqrt{5}}{5} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{a+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{a+1} \right).$$

Exercício 51.(a)

Passo: Vamos provar que

$$F(a+1) = \frac{\sqrt{5}}{5} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{a+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{a+1} \right).$$

Pela definição de F temos que para todo $a > 1$,

$$F(a+1) = F(a) + F(a-1).$$

Exercício 51.(a)

Passo: Vamos provar que

$$F(a+1) = \frac{\sqrt{5}}{5} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{a+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{a+1} \right).$$

Pela definição de F temos que para todo $a > 1$,

$$F(a+1) = F(a) + F(a-1).$$

Como $a \in [0..a]$, temos da HI que

$$F(a) = \frac{\sqrt{5}}{5} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^a - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^a \right).$$

Exercício 51.(a)

Passo: Vamos provar que

$$F(a+1) = \frac{\sqrt{5}}{5} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{a+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{a+1} \right).$$

Pela definição de F temos que para todo $a > 1$,

$$F(a+1) = F(a) + F(a-1).$$

Como $a \in [0..a]$, temos da HI que

$$F(a) = \frac{\sqrt{5}}{5} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^a - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^a \right).$$

Como $a-1 \in [0..a]$, temos da HI que

$$F(a-1) = \frac{\sqrt{5}}{5} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{a-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{a-1} \right).$$

Exercício 51.(a)

Passo: ...

Então

$$F(a + 1) = F(a) + F(a - 1)$$

Exercício 51.(a)

Passo: ...

Então

$$\begin{aligned} F(a+1) &= F(a) + F(a-1) \\ &= \frac{\sqrt{5}}{5} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^a - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^a \right) + \frac{\sqrt{5}}{5} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{a-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{a-1} \right) \end{aligned}$$

Exercício 51.(a)

Passo: ...

Então

$$\begin{aligned} F(a+1) &= F(a) + F(a-1) \\ &= \frac{\sqrt{5}}{5} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^a - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^a \right) + \frac{\sqrt{5}}{5} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{a-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{a-1} \right) \\ &= \frac{\sqrt{5}}{5} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^a - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^a + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{a-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{a-1} \right) \end{aligned}$$

Exercício 51.(a)

Passo: ...

Então

$$\begin{aligned} F(a+1) &= F(a) + F(a-1) \\ &= \frac{\sqrt{5}}{5} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^a - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^a \right) + \frac{\sqrt{5}}{5} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{a-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{a-1} \right) \\ &= \frac{\sqrt{5}}{5} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^a - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^a + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{a-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{a-1} \right) \\ &= \frac{\sqrt{5}}{5} \left(\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^a + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{a-1} \right) - \left(\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^a + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{a-1} \right) \right) \end{aligned}$$

Exercício 51.(a)

Passo: ...

$$F(a+1) = \frac{\sqrt{5}}{5} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{a-1} \left(1 + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) \right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{a-1} \left(1 + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right) \right) \right)$$

Exercício 51.(a)

Passo: ...

$$\begin{aligned} F(a+1) &= \frac{\sqrt{5}}{5} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{a-1} \left(1 + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) \right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{a-1} \left(1 + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right) \right) \right) \\ &= \frac{\sqrt{5}}{5} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{a-1} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{a-1} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^2 \right) \end{aligned}$$

Exercício 51.(a)

Passo: ...

$$\begin{aligned} F(a+1) &= \frac{\sqrt{5}}{5} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{a-1} \left(1 + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) \right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{a-1} \left(1 + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right) \right) \right) \\ &= \frac{\sqrt{5}}{5} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{a-1} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{a-1} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^2 \right) \\ &= \frac{\sqrt{5}}{5} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{a+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{a+1} \right). \end{aligned}$$

Exercício 51.(a)

Base: Vamos provar que

$$F(b) = \frac{\sqrt{5}}{5} \left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^b - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^b \right), \text{ para todo } b \in \{0, 1\}$$

Exercício 51.(a)

Base: Vamos provar que

$$F(b) = \frac{\sqrt{5}}{5} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^b - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^b \right), \text{ para todo } b \in \{0, 1\}$$

isto é, vamos provar que

$$\begin{aligned} F(0) &= \frac{\sqrt{5}}{5} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^0 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^0 \right) \\ F(1) &= \frac{\sqrt{5}}{5} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^1 \right). \end{aligned}$$

Exercício 51.(a)

Base: ...

Por um lado,

$$F(0) = 0,$$

$$F(1) = 1.$$

Exercício 51.(a)

Base: ...

Por um lado,

$$F(0) = 0,$$

$$F(1) = 1.$$

Por outro lado,

$$\frac{\sqrt{5}}{5} \left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^0 - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^0 \right) = \frac{\sqrt{5}}{5} (1 - 1) = \frac{\sqrt{5}}{5} (0) = 0,$$

Exercício 51.(a)

Base: ...

Por um lado,

$$F(0) = 0,$$

$$F(1) = 1.$$

Por outro lado,

$$\frac{\sqrt{5}}{5} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^0 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^0 \right) = \frac{\sqrt{5}}{5} (1 - 1) = \frac{\sqrt{5}}{5} (0) = 0,$$

e

$$\frac{\sqrt{5}}{5} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^1 \right) = \frac{\sqrt{5}}{5} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right) \right) = \frac{\sqrt{5}}{5} \left(\frac{2\sqrt{5}}{2} \right)$$

Exercício 51.(a)

Base: ...

Por um lado,

$$F(0) = 0,$$

$$F(1) = 1.$$

Por outro lado,

$$\frac{\sqrt{5}}{5} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^0 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^0 \right) = \frac{\sqrt{5}}{5} (1 - 1) = \frac{\sqrt{5}}{5} (0) = 0,$$

e

$$\frac{\sqrt{5}}{5} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^1 \right) = \frac{\sqrt{5}}{5} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right) \right) = \frac{\sqrt{5}}{5} \left(\frac{2\sqrt{5}}{2} \right) = \frac{5}{5} = 1.$$

Exercício 51.(a)

Base: ...

Portanto,

$$F(0) = \frac{\sqrt{5}}{5} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^0 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^0 \right)$$
$$F(1) = \frac{\sqrt{5}}{5} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^1 \right),$$

Exercício 51.(a)

Base: ...

Portanto,

$$\begin{aligned}F(0) &= \frac{\sqrt{5}}{5} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^0 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^0 \right) \\F(1) &= \frac{\sqrt{5}}{5} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^1 \right),\end{aligned}$$

Portanto,

$$F(n) = \frac{\sqrt{5}}{5} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right), \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

Exercício 51.(b)

A **sequência de Fibonacci** é a função $F: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ dada por

$$F(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n \leq 1 \\ F(n-1) + F(n-2), & \text{se } n > 1. \end{cases}$$

(b) Conclua que

$$F(n) \approx \frac{\sqrt{5}}{5} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n$$

Exercício 51.(b)

Como

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \stackrel{\text{Ex. 19}}{\approx} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n,$$

Exercício 51.(b)

Como

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \stackrel{\text{Ex. 19}}{\approx} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n,$$

então

$$F(n) = \frac{\sqrt{5}}{5} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} (1 + \epsilon(n)) \right)^n,$$

para alguma função $\epsilon: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\lim \epsilon(n) = 0$.

Exercício 51.(b)

Então,

$$F(n) = \frac{\sqrt{5}}{5} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n (1 + \epsilon(n))^n.$$

Exercício 51.(b)

Então,

$$F(n) = \frac{\sqrt{5}}{5} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n (1 + \epsilon(n))^n.$$

Como

$$\lim \epsilon(n) = 0,$$

então

$$\lim(1 + \epsilon(n)) = 1,$$

Exercício 51.(b)

Então,

$$F(n) = \frac{\sqrt{5}}{5} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n (1 + \epsilon(n))^n.$$

Como

$$\lim \epsilon(n) = 0,$$

então

$$\lim(1 + \epsilon(n)) = 1,$$

e daí,

$$\lim(1 + \epsilon(n))^n = 1,$$

Exercício 51.(b)

Então,

$$F(n) = \frac{\sqrt{5}}{5} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n (1 + \epsilon(n))^n.$$

Como

$$\lim \epsilon(n) = 0,$$

então

$$\lim(1 + \epsilon(n)) = 1,$$

e daí,

$$\lim(1 + \epsilon(n))^n = 1,$$

e, conseqüentemente,

$$F(n) \approx \frac{\sqrt{5}}{5} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n.$$