

Matemática Discreta

Unidade 18: Recorrências (1)

Renato Carmo
David Menotti

Departamento de Informática da UFPR

Segundo Período Especial de 2020

Relação de Recorrência

Relação de Recorrência

equação recursiva satisfeita por uma função $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$

Relação de Recorrência

equação recursiva satisfeita por uma função $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$

exemplo: $f(n) = f(n - 1) + 1$, para todo $n \geq 1$

Relação de Recorrência

equação recursiva satisfeita por uma função $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$

exemplo: $f(n) = f(n - 1) + 1$, para todo $n \geq 1$

resolver a recorrência

Relação de Recorrência

equação recursiva satisfeita por uma função $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$

exemplo: $f(n) = f(n - 1) + 1$, para todo $n \geq 1$

resolver a recorrência: obter expressão não recursiva para a função

Exemplo: $f(n) = f(n - 1) + 1$, para todo $n \geq 1$

Exemplo: $f(n) = f(n - 1) + 1$, para todo $n \geq 1$

$$n \geq 1$$

Exemplo: $f(n) = f(n - 1) + 1$, para todo $n \geq 1$

$$n \geq 1: f(n) = f(n - 1) + 1$$

Exemplo: $f(n) = f(n - 1) + 1$, para todo $n \geq 1$

$$n \geq 1: f(n) = f(n - 1) + 1$$

$$f(n - 1) \geq 1$$

Exemplo: $f(n) = f(n - 1) + 1$, para todo $n \geq 1$

$$n \geq 1: f(n) = f(n - 1) + 1$$

$$f(n - 1) \geq 1: f(n) = f(n - 1) + 1$$

Exemplo: $f(n) = f(n - 1) + 1$, para todo $n \geq 1$

$$n \geq 1: f(n) = f(n - 1) + 1$$

$$f(n - 1) \geq 1: f(n) = f(n - 1) + 1 = (f((n - 1) - 1) + 1) + 1$$

Exemplo: $f(n) = f(n - 1) + 1$, para todo $n \geq 1$

$$n \geq 1: f(n) = f(n - 1) + 1$$

$$f(n - 1) \geq 1: f(n) = f(n - 1) + 1 = (f((n - 1) - 1) + 1) + 1 = f(n - 2) + 2$$

Exemplo: $f(n) = f(n - 1) + 1$, para todo $n \geq 1$

$$n \geq 1: f(n) = f(n - 1) + 1$$

$$f(n - 1) \geq 1: f(n) = f(n - 1) + 1 = (f((n - 1) - 1) + 1) + 1 = f(n - 2) + 2$$

$$f(n - 2) \geq 1$$

Exemplo: $f(n) = f(n - 1) + 1$, para todo $n \geq 1$

$$n \geq 1: f(n) = f(n - 1) + 1$$

$$f(n - 1) \geq 1: f(n) = f(n - 1) + 1 = (f((n - 1) - 1) + 1) + 1 = f(n - 2) + 2$$

$$f(n - 2) \geq 1: f(n) = f(n - 2) + 2$$

Exemplo: $f(n) = f(n - 1) + 1$, para todo $n \geq 1$

$$n \geq 1: f(n) = f(n - 1) + 1$$

$$f(n - 1) \geq 1: f(n) = f(n - 1) + 1 = (f((n - 1) - 1) + 1) + 1 = f(n - 2) + 2$$

$$f(n - 2) \geq 1: f(n) = f(n - 2) + 2 = (f((n - 2) - 1) + 1) + 2$$

Exemplo: $f(n) = f(n - 1) + 1$, para todo $n \geq 1$

$$n \geq 1: f(n) = f(n - 1) + 1$$

$$f(n - 1) \geq 1: f(n) = f(n - 1) + 1 = (f((n - 1) - 1) + 1) + 1 = f(n - 2) + 2$$

$$f(n - 2) \geq 1: f(n) = f(n - 2) + 2 = (f((n - 2) - 1) + 1) + 2 = f(n - 3) + 3$$

Exemplo: $f(n) = f(n - 1) + 1$, para todo $n \geq 1$

$$n \geq 1: f(n) = f(n - 1) + 1$$

$$f(n - 1) \geq 1: f(n) = f(n - 1) + 1 = (f((n - 1) - 1) + 1) + 1 = f(n - 2) + 2$$

$$f(n - 2) \geq 1: f(n) = f(n - 2) + 2 = (f((n - 2) - 1) + 1) + 2 = f(n - 3) + 3$$

$\vdots$

Exemplo: $f(n) = f(n - 1) + 1$, para todo $n \geq 1$

$$n \geq 1: f(n) = f(n - 1) + 1$$

$$f(n - 1) \geq 1: f(n) = f(n - 1) + 1 = (f((n - 1) - 1) + 1) + 1 = f(n - 2) + 2$$

$$f(n - 2) \geq 1: f(n) = f(n - 2) + 2 = (f((n - 2) - 1) + 1) + 2 = f(n - 3) + 3$$

$\vdots$

$$f(n - (u - 1)) \geq 1$$

Exemplo: $f(n) = f(n - 1) + 1$, para todo $n \geq 1$

$$n \geq 1: f(n) = f(n - 1) + 1$$

$$f(n - 1) \geq 1: f(n) = f(n - 1) + 1 = (f((n - 1) - 1) + 1) + 1 = f(n - 2) + 2$$

$$f(n - 2) \geq 1: f(n) = f(n - 2) + 2 = (f((n - 2) - 1) + 1) + 2 = f(n - 3) + 3$$

$\vdots$

$$f(n - (u - 1)) \geq 1: f(n) = f(n - (u - 1) - 1) + (u - 1) + 1$$

Exemplo: $f(n) = f(n - 1) + 1$, para todo $n \geq 1$

$$n \geq 1: f(n) = f(n - 1) + 1$$

$$f(n - 1) \geq 1: f(n) = f(n - 1) + 1 = (f((n - 1) - 1) + 1) + 1 = f(n - 2) + 2$$

$$f(n - 2) \geq 1: f(n) = f(n - 2) + 2 = (f((n - 2) - 1) + 1) + 2 = f(n - 3) + 3$$

$\vdots$

$$f(n - (u - 1)) \geq 1: f(n) = f(n - (u - 1) - 1) + (u - 1) + 1 = f(n - u) + u$$

Exemplo: $f(n) = f(n - 1) + 1$, para todo $n \geq 1$

$$n \geq 1: f(n) = f(n - 1) + 1$$

$$f(n - 1) \geq 1: f(n) = f(n - 1) + 1 = (f((n - 1) - 1) + 1) + 1 = f(n - 2) + 2$$

$$f(n - 2) \geq 1: f(n) = f(n - 2) + 2 = (f((n - 2) - 1) + 1) + 2 = f(n - 3) + 3$$

$\vdots$

$$f(n - (u - 1)) \geq 1: f(n) = f(n - (u - 1) - 1) + (u - 1) + 1 = f(n - u) + u$$

u : última vez que podemos aplicar a relação de recorrência

Exemplo: $f(n) = f(n - 1) + 1$, para todo $n \geq 1$

$$n \geq 1: f(n) = f(n - 1) + 1$$

$$f(n - 1) \geq 1: f(n) = f(n - 1) + 1 = (f((n - 1) - 1) + 1) + 1 = f(n - 2) + 2$$

$$f(n - 2) \geq 1: f(n) = f(n - 2) + 2 = (f((n - 2) - 1) + 1) + 2 = f(n - 3) + 3$$

$\vdots$

$$f(n - (u - 1)) \geq 1: f(n) = f(n - (u - 1) - 1) + (u - 1) + 1 = f(n - u) + u$$

u : última vez que podemos aplicar a relação de recorrência

u : menor inteiro tal que $n - u < 1$

Exemplo: $f(n) = f(n - 1) + 1$, para todo $n \geq 1$

$$n \geq 1: f(n) = f(n - 1) + 1$$

$$f(n - 1) \geq 1: f(n) = f(n - 1) + 1 = (f((n - 1) - 1) + 1) + 1 = f(n - 2) + 2$$

$$f(n - 2) \geq 1: f(n) = f(n - 2) + 2 = (f((n - 2) - 1) + 1) + 2 = f(n - 3) + 3$$

$\vdots$

$$f(n - (u - 1)) \geq 1: f(n) = f(n - (u - 1) - 1) + (u - 1) + 1 = f(n - u) + u$$

u : última vez que podemos aplicar a relação de recorrência

u : menor inteiro tal que $n - u < 1$

$$u = \min \{k \in \mathbb{N} \mid n - k < 1\}$$

Resumo

se

$$f(n) = f(n - 1) + 1, \text{ para todo } n \geq 1$$

se

$$f(n) = f(n - 1) + 1, \text{ para todo } n \geq 1$$

então

$$f(n) = f(n - u) + u$$

se

$$f(n) = f(n - 1) + 1, \text{ para todo } n \geq 1$$

então

$$f(n) = f(n - u) + u$$

$$u = \min \{k \in \mathbb{N} \mid n - k < 1\}$$

se

$$f(n) = f(n - 1) + 1, \text{ para todo } n \geq 1$$

então

$$f(n) = f(n - u) + u$$

$$u = \min \{k \in \mathbb{N} \mid n - k < 1\} = \min \{k \in \mathbb{N} \mid k > n - 1\}$$

se

$$f(n) = f(n-1) + 1, \text{ para todo } n \geq 1$$

então

$$f(n) = f(n-u) + u$$

$$u = \min \{k \in \mathbb{N} \mid n - k < 1\} = \min \{k \in \mathbb{N} \mid k > n - 1\} \stackrel{T13}{=} \lfloor n - 1 \rfloor + 1$$

se

$$f(n) = f(n-1) + 1, \text{ para todo } n \geq 1$$

então

$$f(n) = f(n-u) + u$$

$$u = \min \{k \in \mathbb{N} \mid n - k < 1\} = \min \{k \in \mathbb{N} \mid k > n - 1\} \stackrel{T_{13}}{=} \lfloor n - 1 \rfloor + 1 \stackrel{T_{10}}{=} \lfloor n \rfloor$$

se

$$f(n) = f(n-1) + 1, \text{ para todo } n \geq 1$$

então

$$f(n) = f(n-u) + u$$

$$u = \min \{k \in \mathbb{N} \mid n - k < 1\} = \min \{k \in \mathbb{N} \mid k > n - 1\} \stackrel{T_{13}}{=} \lfloor n - 1 \rfloor + 1 \stackrel{T_{10}}{=} \lfloor n \rfloor = n$$

Resumo

se

$$f(n) = f(n - 1) + 1, \text{ para todo } n \geq 1$$

Resumo

se

$$f(n) = f(n - 1) + 1, \text{ para todo } n \geq 1$$

então

$$f(n) = f(n - u) + u$$

se

$$f(n) = f(n - 1) + 1, \text{ para todo } n \geq 1$$

então

$$f(n) = f(n - u) + u, \text{ onde } u = \min \{k \in \mathbb{N} \mid n - k < 1\}$$

se

$$f(n) = f(n - 1) + 1, \text{ para todo } n \geq 1$$

então

$$f(n) = f(n - u) + u, \text{ onde } u = \min \{k \in \mathbb{N} \mid n - k < 1\} = n$$

Resumo

se

$$f(n) = f(n - 1) + 1, \text{ para todo } n \geq 1$$

então

$$f(n) = f(n - u) + u, \text{ onde } u = \min \{k \in \mathbb{N} \mid n - k < 1\} = n$$

$$f(n) = f(n - u) + u$$

se

$$f(n) = f(n - 1) + 1, \text{ para todo } n \geq 1$$

então

$$f(n) = f(n - u) + u, \text{ onde } u = \min \{k \in \mathbb{N} \mid n - k < 1\} = n$$

$$f(n) = f(n - u) + u = f(n - n) + n$$

Resumo

se

$$f(n) = f(n-1) + 1, \text{ para todo } n \geq 1$$

então

$$f(n) = f(n-u) + u, \text{ onde } u = \min \{k \in \mathbb{N} \mid n-k < 1\} = n$$

$$f(n) = f(n-u) + u = f(n-n) + n = f(0) + n$$

Resumo

se

$$f(n) = f(n - 1) + 1, \text{ para todo } n \geq 1$$

se

$$f(n) = f(n - 1) + 1, \text{ para todo } n \geq 1$$

então

$$f(n) = f(0) + n, \text{ para todo } n \geq 1$$