

Matemática Discreta

Unidade 29: Recorrências Lineares Homogêneas (3)

Renato Carmo
David Menotti

Departamento de Informática da UFPR

Segundo Período Especial de 2020

Exercicio 120a

a)

$$f(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n \leq 2 \\ 5f(n-1) - 7f(n-2) + 3f(n-3), & \text{se } n \geq 3. \end{cases}$$

Exercício 120a

a)

$$f(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n \leq 2 \\ 5f(n-1) - 7f(n-2) + 3f(n-3), & \text{se } n \geq 3. \end{cases}$$

Seja $\mathcal{R}(5, -7, 3)$ o conjunto das funções que satisfazem $f(n)$, para todo $n \geq 3$.

Exercício 120a

a)

$$f(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n \leq 2 \\ 5f(n-1) - 7f(n-2) + 3f(n-3), & \text{se } n \geq 3. \end{cases}$$

Seja $\mathcal{R}(5, -7, 3)$ o conjunto das funções que satisfazem $f(n)$, para todo $n \geq 3$.

A equação de recorrência pode ser reescrita (na forma homogênea) como

$$f(n) - 5f(n-1) + 7f(n-2) - 3f(n-3) = 0.$$

Exercício 120a

a)

$$f(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n \leq 2 \\ 5f(n-1) - 7f(n-2) + 3f(n-3), & \text{se } n \geq 3. \end{cases}$$

Seja $\mathcal{R}(5, -7, 3)$ o conjunto das funções que satisfazem $f(n)$, para todo $n \geq 3$.

A equação de recorrência pode ser reescrita (na forma homogênea) como

$$f(n) - 5f(n-1) + 7f(n-2) - 3f(n-3) = 0.$$

Assim fica evidente que $f(n)$ satisfaz uma recorrência linear homogênea (RLH) cujo polinômio característico (PC) é

$$X^3 - 5X^2 + 7X - 3.$$

Exercício 120a

a)

$$f(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n \leq 2 \\ 5f(n-1) - 7f(n-2) + 3f(n-3), & \text{se } n \geq 3. \end{cases}$$

Seja $\mathcal{R}(5, -7, 3)$ o conjunto das funções que satisfazem $f(n)$, para todo $n \geq 3$.

A equação de recorrência pode ser reescrita (na forma homogênea) como

$$f(n) - 5f(n-1) + 7f(n-2) - 3f(n-3) = 0.$$

Assim fica evidente que $f(n)$ satisfaz uma recorrência linear homogênea (RLH) cujo polinômio característico (PC) é

$$X^3 - 5X^2 + 7X - 3.$$

Resta saber quais as raízes deste PC.

Exercício 120a

Seja o PC dado por

$$X^3 - 5X^2 + 7X - 3.$$

Exercício 120a

Seja o PC dado por

$$X^3 - 5X^2 + 7X - 3.$$

Pelo *dispositivo prático de Briot-Ruffini*, podemos determinar as raízes de polinômios avaliando os múltiplos do coeficiente de grau 0, ou seja

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -5 & 7 & -3 \end{array}$$

Exercício 120a

Seja o PC dado por

$$X^3 - 5X^2 + 7X - 3.$$

Pelo *dispositivo prático de Briot-Ruffini*, podemos determinar as raízes de polinômios avaliando os múltiplos do coeficiente de grau 0, ou seja

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -5 & 7 & -3 \end{array}$$

Exercício 120a

Seja o PC dado por

$$X^3 - 5X^2 + 7X - 3.$$

Pelo *dispositivo prático de Briot-Ruffini*, podemos determinar as raízes de polinômios avaliando os múltiplos do coeficiente de grau 0, ou seja

1		1	-5	7	-3
		1			

Exercício 120a

Seja o PC dado por

$$X^3 - 5X^2 + 7X - 3.$$

Pelo *dispositivo prático de Briot-Ruffini*, podemos determinar as raízes de polinômios avaliando os múltiplos do coeficiente de grau 0, ou seja

1		1	-5	7	-3
		1	-4		

Exercício 120a

Seja o PC dado por

$$X^3 - 5X^2 + 7X - 3.$$

Pelo *dispositivo prático de Briot-Ruffini*, podemos determinar as raízes de polinômios avaliando os múltiplos do coeficiente de grau 0, ou seja

1		1	-5	7	-3
		1	-4	+3	

Exercício 120a

Seja o PC dado por

$$X^3 - 5X^2 + 7X - 3.$$

Pelo *dispositivo prático de Briot-Ruffini*, podemos determinar as raízes de polinômios avaliando os múltiplos do coeficiente de grau 0, ou seja

1		1	-5	7	-3
		1	-4	+3	0

Exercício 120a

Seja o PC dado por

$$X^3 - 5X^2 + 7X - 3.$$

Pelo *dispositivo prático de Briot-Ruffini*, podemos determinar as raízes de polinômios avaliando os múltiplos do coeficiente de grau 0, ou seja

1		1	-5	7	-3
		1	-4	+3	0

Exercício 120a

Seja o PC dado por

$$X^3 - 5X^2 + 7X - 3.$$

Pelo *dispositivo prático de Briot-Ruffini*, podemos determinar as raízes de polinômios avaliando os múltiplos do coeficiente de grau 0, ou seja

1		1	-5	7	-3
1		1	-4	+3	0

Exercício 120a

Seja o PC dado por

$$X^3 - 5X^2 + 7X - 3.$$

Pelo *dispositivo prático de Briot-Ruffini*, podemos determinar as raízes de polinômios avaliando os múltiplos do coeficiente de grau 0, ou seja

1		1	-5	7	-3
1		1	-4	+3	0
		1			

Exercício 120a

Seja o PC dado por

$$X^3 - 5X^2 + 7X - 3.$$

Pelo *dispositivo prático de Briot-Ruffini*, podemos determinar as raízes de polinômios avaliando os múltiplos do coeficiente de grau 0, ou seja

1		1	-5	7	-3
1		1	-4	+3	0
		1	-3		

Exercício 120a

Seja o PC dado por

$$X^3 - 5X^2 + 7X - 3.$$

Pelo *dispositivo prático de Briot-Ruffini*, podemos determinar as raízes de polinômios avaliando os múltiplos do coeficiente de grau 0, ou seja

1		1	-5	7	-3
1		1	-4	+3	0
		1	-3	0	

Exercício 120a

Seja o PC dado por

$$X^3 - 5X^2 + 7X - 3.$$

Pelo *dispositivo prático de Briot-Ruffini*, podemos determinar as raízes de polinômios avaliando os múltiplos do coeficiente de grau 0, ou seja

1		1	-5	7	-3
1		1	-4	+3	0
		1	-3	0	

Exercício 120a

Seja o PC dado por

$$X^3 - 5X^2 + 7X - 3.$$

Pelo *dispositivo prático de Briot-Ruffini*, podemos determinar as raízes de polinômios avaliando os múltiplos do coeficiente de grau 0, ou seja

1		1	-5	7	-3
1		1	-4	+3	0
3		1	-3	0	

Exercício 120a

Seja o PC dado por

$$X^3 - 5X^2 + 7X - 3.$$

Pelo *dispositivo prático de Briot-Ruffini*, podemos determinar as raízes de polinômios avaliando os múltiplos do coeficiente de grau 0, ou seja

1		1	-5	7	-3
1		1	-4	+3	0
3		1	-3	0	
		1			

Exercício 120a

Seja o PC dado por

$$X^3 - 5X^2 + 7X - 3.$$

Pelo *dispositivo prático de Briot-Ruffini*, podemos determinar as raízes de polinômios avaliando os múltiplos do coeficiente de grau 0, ou seja

1		1	-5	7	-3
1		1	-4	+3	0
3		1	-3	0	
		1	0		

Então, tem-se que o PC é divisível por 1, 1 e 3, isto é

$$X^3 - 5X^2 + 7X - 3 = (X - 1)(X - 1)(X - 3) = (X - 1)^2(X - 3).$$

Exercício 120a

Então o conjunto $\{n^0 1^n, n^1 1^n, n^0 3^n\} = \{1^n, n 1^n, 3^n\} = \{1, n, 3^n\}$ é linearmente independente em $\mathcal{R}(5, -7, 3)$.

Exercício 120a

Então o conjunto $\{n^0 1^n, n^1 1^n, n^0 3^n\} = \{1^n, n 1^n, 3^n\} = \{1, n, 3^n\}$ é linearmente independente em $\mathcal{R}(5, -7, 3)$.

Portanto, $f \in \mathcal{R}(5, -7, 3)$ pode ser escrita como uma combinação linear de $n^0 1^n$, $n^1 1^n$ e $n^0 3^n$, isto é, existem $a, b, c \in \mathbb{C}$ tais que

$$f(n) = a 1^n + b n 1^n + c 3^n,$$

Exercício 120a

Então o conjunto $\{n^0 1^n, n^1 1^n, n^0 3^n\} = \{1^n, n 1^n, 3^n\} = \{1, n, 3^n\}$ é linearmente independente em $\mathcal{R}(5, -7, 3)$.

Portanto, $f \in \mathcal{R}(5, -7, 3)$ pode ser escrita como uma combinação linear de $n^0 1^n$, $n^1 1^n$ e $n^0 3^n$, isto é, existem $a, b, c \in \mathbb{C}$ tais que

$$f(n) = a 1^n + b n 1^n + c 3^n,$$

ou seja

$$f(n) = a + b n + c 3^n,$$

Exercício 120a

Então o conjunto $\{n^0 1^n, n^1 1^n, n^0 3^n\} = \{1^n, n 1^n, 3^n\} = \{1, n, 3^n\}$ é linearmente independente em $\mathcal{R}(5, -7, 3)$.

Portanto, $f \in \mathcal{R}(5, -7, 3)$ pode ser escrita como uma combinação linear de $n^0 1^n$, $n^1 1^n$ e $n^0 3^n$, isto é, existem $a, b, c \in \mathbb{C}$ tais que

$$f(n) = a 1^n + b n 1^n + c 3^n,$$

ou seja

$$f(n) = a + b n + c 3^n,$$

onde os valores de a, b e c podem ser determinados pelo sistema

$$f(0) = a + b \cdot 0 + c \cdot 3^0,$$

$$f(1) = a + b \cdot 1 + c \cdot 3^1,$$

$$f(2) = a + b \cdot 2 + c \cdot 3^2,$$

Exercicio 120a

ou seja,

$$0 = a + 0b + 1c,$$

$$1 = a + 1b + 3c,$$

$$2 = a + 2b + 9c,$$

Exercicio 120a

ou seja,

$$0 = a + 0b + 1c,$$

$$1 = a + 1b + 3c,$$

$$2 = a + 2b + 9c,$$

e portanto,

$$a = 0, b = 1, c = 0.$$

Exercicio 120a

ou seja,

$$0 = a + 0b + 1c,$$

$$1 = a + 1b + 3c,$$

$$2 = a + 2b + 9c,$$

e portanto,

$$a = 0, b = 1, c = 0.$$

E portanto,

$$f(n) = n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$