

Matemática Discreta

Unidade 36: Recorrências Lineares Não Homogêneas (5)

Renato Carmo
David Menotti

Departamento de Informática da UFPR

Segundo Período Especial de 2020

Exercício 124d

Resolva as seguintes recorrências.

$$f(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n < 1, \\ 2f(n-1) + n, & \text{se } n \geq 1. \end{cases}$$

Exercício 124d

Resolva as seguintes recorrências.

$$f(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n < 1, \\ 2f(n-1) + n, & \text{se } n \geq 1. \end{cases}$$

Usando a notação do Teorema 37 temos

$$\begin{aligned} a_1 &= 2, \\ g(n) &= n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Exercício 124d

Como

$$g(n) = 1n^11^n,$$

temos diretamente do Corolário 38 que g satisfaz uma RLH cujo PC é

Exercício 124d

Como

$$g(n) = 1n^11^n,$$

temos diretamente do Corolário 38 que g satisfaz uma RLH cujo PC é

$$G = (X - 1)^{1+1} = (X - 1)^2,$$

Exercício 124d

Como

$$g(n) = 1n^11^n,$$

temos diretamente do Corolário 38 que g satisfaz uma RLH cujo PC é

$$G = (X - 1)^{1+1} = (X - 1)^2,$$

e daí, pelo Teorema 37 temos que f pertence ao espaço vetorial cujo polinômio característico é

$$G(X - 2) = (X - 1)^2(X - 2),$$

Exercício 124d

Como

$$g(n) = 1n^1 1^n,$$

temos diretamente do Corolário 38 que g satisfaz uma RLH cujo PC é

$$G = (X - 1)^{1+1} = (X - 1)^2,$$

e daí, pelo Teorema 37 temos que f pertence ao espaço vetorial cujo polinômio característico é

$$G(X - 2) = (X - 1)^2(X - 2),$$

e daí, pelo Corolário 36, temos

$$f(n) = c_{1,0}1^n + c_{1,1}n1^n + c_{2,0}2^n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

Exercício 124d)

ou seja,

$$f(n) = c_{1,0} + c_{1,1}n + c_{2,0}2^n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

Exercício 124d)

ou seja,

$$f(n) = c_{1,0} + c_{1,1}n + c_{2,0}2^n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

onde $\{c_{1,0}, c_{1,1}, c_{2,0}\}$ é a solução do sistema

$$f(0) = c_{1,0} + 0c_{1,1} + c_{2,0}2^0,$$

$$f(1) = c_{1,0} + 1c_{1,1} + c_{2,0}2^1,$$

$$f(2) = c_{1,0} + 2c_{1,1} + c_{2,0}2^2,$$

Exercício 124d)

ou seja,

$$f(n) = c_{1,0} + c_{1,1}n + c_{2,0}2^n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

onde $\{c_{1,0}, c_{1,1}, c_{2,0}\}$ é a solução do sistema

$$f(0) = c_{1,0} + 0c_{1,1} + c_{2,0}2^0,$$

$$f(1) = c_{1,0} + 1c_{1,1} + c_{2,0}2^1,$$

$$f(2) = c_{1,0} + 2c_{1,1} + c_{2,0}2^2,$$

isto é,

$$f(0) = c_{1,0} + c_{2,0},$$

$$2f(0) + 1 = c_{1,0} + c_{1,1} + 2c_{2,0},$$

$$2f(1) + 2 = c_{1,0} + 2c_{1,1} + 4c_{2,0},$$

Exercício 124d)

ou seja,

$$0 = c_{1,0} + c_{2,0},$$

$$1 = c_{1,0} + c_{1,1} + 2c_{2,0},$$

$$4 = c_{1,0} + 2c_{1,1} + 4c_{2,0},$$

Exercício 124d)

ou seja,

$$0 = c_{1,0} + c_{2,0},$$

$$1 = c_{1,0} + c_{1,1} + 2c_{2,0},$$

$$4 = c_{1,0} + 2c_{1,1} + 4c_{2,0},$$

cujas solução é

$$c_{1,0} = -2, c_{1,1} = -1, c_{2,0} = 2,$$

Exercício 124d)

ou seja,

$$0 = c_{1,0} + c_{2,0},$$

$$1 = c_{1,0} + c_{1,1} + 2c_{2,0},$$

$$4 = c_{1,0} + 2c_{1,1} + 4c_{2,0},$$

cujas soluções são

$$c_{1,0} = -2, c_{1,1} = -1, c_{2,0} = 2,$$

e portanto,

$$f(n) = c_{1,0} + c_{1,1}n + c_{2,0}2^n = 2 \cdot 2^n - n - 2 =$$

Exercício 124d)

ou seja,

$$0 = c_{1,0} + c_{2,0},$$

$$1 = c_{1,0} + c_{1,1} + 2c_{2,0},$$

$$4 = c_{1,0} + 2c_{1,1} + 4c_{2,0},$$

cujas solução é

$$c_{1,0} = -2, c_{1,1} = -1, c_{2,0} = 2,$$

e portanto,

$$f(n) = c_{1,0} + c_{1,1}n + c_{2,0}2^n = 2 \cdot 2^n - n - 2 = 2^{n+1} - n - 2, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$