Matemática Discreta

Unidade 39: Somatórios (3)

Renato Carmo
David Menotti

Departamento de Informática da UFPR

Segundo Período Especial de 2020

Exercicio 128

Dado $q \in \mathbb{C} - \{0\}$, uma **progressão geométrica**[1] de razão q é uma função $f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ satisfazendo

$$\frac{f(n+1)}{f(n)} = q, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Assim, a soma dos n termos iniciais de uma progressão geométrica é dada por

$$s(n) = \sum_{i=0}^{n-1} f(i).$$

a) Expresse a função f acima por meio de uma recorrência linear homogênea.
b) Resolva esta recorrência, obtendo assim uma expressão para o termo geral da progressão geométrica.
c) Dê uma expressão livre de somatórios para $s(n)$.

[1] cfr. Exercício 110

Exercicio 128a

a) Expresse a função f acima por meio de uma recorrência linear homogênea.

Exercicio 128a

a) Expresse a função f acima por meio de uma recorrência linear homogênea.

Como

$$f(n+1) = qf(n), \text{ para todo } n \geq 0,$$

Exercicio 128a

a) Expresse a função f acima por meio de uma recorrência linear homogênea.

Como

$$f(n+1) = qf(n), \text{ para todo } n \geq 0,$$

pode-se fazer a troca de variável $n+1 = t$, e então temos $n = t-1$ e

$$f(t) = qf(t-1), \text{ para todo } t \geq 1.$$

Exercicio 128a

a) Expresse a função f acima por meio de uma recorrência linear homogênea.

Como

$$f(n+1) = qf(n), \text{ para todo } n \geq 0,$$

pode-se fazer a troca de variável $n + 1 = t$, e então temos $n = t - 1$ e

$$f(t) = qf(t-1), \text{ para todo } t \geq 1.$$

Assim podemos expressar f como uma RLH da seguinte forma

$$f(n) = qf(n-1), \text{ para todo } n \geq 1.$$

Exercicio 128b

b) Resolva esta recorrência ($f(n) = qf(n-1),$ para todo $n \geq 1$), obtendo assim uma expressão para o termo geral da progressão geométrica.

Exercicio 128b

b) Resolva esta recorrência ($f(n) = qf(n-1),$ para todo $n \geq 1$), obtendo assim uma expressão para o termo geral da progressão geométrica.

Usando a notação do C. 36 temos que $f(n)$ satisfaz uma RLH cujo PC é $X - q$.

Exercicio 128b

b) Resolva esta recorrência ($f(n) = qf(n-1),$ para todo $n \geq 1$), obtendo assim uma expressão para o termo geral da progressão geométrica.

Usando a notação do C. 36 temos que $f(n)$ satisfaz uma RLH cujo PC é $X - q$.

E daí,

$$f(n) = aq^n,$$

onde a é dado por

$$f(0) = aq^0,$$

Exercicio 128b

b) Resolva esta recorrência ($f(n) = qf(n-1),$ para todo $n \geq 1$), obtendo assim uma expressão para o termo geral da progressão geométrica.

Usando a notação do C. 36 temos que $f(n)$ satisfaz uma RLH cujo PC é $X - q$.

E daí,

$$f(n) = aq^n,$$

onde a é dado por

$$f(0) = aq^0,$$

isto é

$$a = f(0),$$

Exercicio 128b

b) Resolva esta recorrência ($f(n) = qf(n-1)$, para todo $n \geq 1$), obtendo assim uma expressão para o termo geral da progressão geométrica.

Usando a notação do C. 36 temos que $f(n)$ satisfaz uma RLH cujo PC é $X - q$.

E daí,

$$f(n) = aq^n,$$

onde a é dado por

$$f(0) = aq^0,$$

isto é

$$a = f(0),$$

e, portanto,

$$f(n) = f(0)q^n$$

Exercicio 128b

b) Resolva esta recorrência ($f(n) = qf(n-1), \text{ para todo } n \geq 1$), obtendo assim uma expressão para o termo geral da progressão geométrica.

Usando a notação do C. 36 temos que $f(n)$ satisfaz uma RLH cujo PC é $X - q$.

E daí,

$$f(n) = aq^n,$$

onde a é dado por

$$f(0) = aq^0,$$

isto é

$$a = f(0),$$

e, portanto,

$$f(n) = f(0)q^n = a_1 q^{n'-1}.$$

Exercicio 128c

c) Dê uma expressão livre de somatórios para $s(n)$.

Exercicio 128c

c) Dê uma expressão livre de somatórios para $s(n)$.

Como

$$s(n) = \sum_{i=0}^{n-1} f(i) = \sum_{i=0}^{n-1} f(0).q^i$$

Exercicio 128c

c) Dê uma expressão livre de somatórios para $s(n)$.

Como

$$s(n) = \sum_{i=0}^{n-1} f(i) = \sum_{i=0}^{n-1} f(0).q^i = s(n-1) + f(0).q^{n-1}.$$

e $f(n)$ satisfaz uma RLH cujo PC é $(X - q)$,

Exercicio 128c

c) Dê uma expressão livre de somatórios para $s(n)$.

Como

$$s(n) = \sum_{i=0}^{n-1} f(i) = \sum_{i=0}^{n-1} f(0).q^i = s(n-1) + f(0).q^{n-1}.$$

e $f(n)$ satisfaz uma RLH cujo PC é $(X - q)$, então (C. 40), a função $s(n)$ satisfaz uma RLH cujo PC é $(X-1)(X-q)$.

Exercicio 128c

c) Dê uma expressão livre de somatórios para $s(n)$.

Como

$$s(n) = \sum_{i=0}^{n-1} f(i) = \sum_{i=0}^{n-1} f(0).q^i = s(n-1) + f(0).q^{n-1}.$$

e $f(n)$ satisfaz uma RLH cujo PC é $(X - q)$, então (C. 40), a função $s(n)$ satisfaz uma RLH cujo PC é $(X-1)(X-q)$.

E daí (C. 36),

$$s(n) = a1^n + bq^n = a + bq^n,$$

Exercicio 128c

c) Dê uma expressão livre de somatórios para $s(n)$.

Como

$$s(n) = \sum_{i=0}^{n-1} f(i) = \sum_{i=0}^{n-1} f(0).q^i = s(n-1) + f(0).q^{n-1}.$$

e $f(n)$ satisfaz uma RLH cujo PC é $(X - q)$, então (C. 40), a função $s(n)$ satisfaz uma RLH cujo PC é $(X-1)(X-q)$.

E daí (C. 36),

$$s(n) = a1^n + bq^n = a + bq^n,$$

onde a e b são dados por

$$\begin{aligned} s(0) &= a + bq^0 = a + b, \\ s(1) &= a + bq^1 = a + bq, \end{aligned}$$

Exercicio 128c

$$
\begin{aligned}
s(0) &= a + bq^0 = a + b, \\
s(1) &= a + bq^1 = a + bq,
\end{aligned}
$$

Exercicio 128c

$$
\begin{aligned}
s(0) &= a + bq^0 = a + b, \\
s(1) &= a + bq^1 = a + bq,
\end{aligned}
$$

ou seja,

$$s(0) = 0 = a + b,$$

Exercicio 128c

$$\begin{aligned} s(0) &= a + bq^0 = a + b, \\ s(1) &= a + bq^1 = a + bq, \end{aligned}$$

ou seja,

$$s(0) = 0 = a + b,$$

e portanto,

$$b = -a,$$

Exercicio 128c

$$
\begin{aligned}
s(0) &= a + bq^0 = a + b, \\
s(1) &= a + bq^1 = a + bq,
\end{aligned}
$$

ou seja,

$$s(0) = 0 = a + b,$$

e portanto,

$$b = -a,$$

e

$$s(1) = f(0) = a + bq = a - aq,$$

e portanto,

$$a = f(0)/(1 - q),$$

Exercicio 128c

$$\begin{aligned} s(0) &= a + bq^0 = a + b, \\ s(1) &= a + bq^1 = a + bq, \end{aligned}$$

ou seja,

$$s(0) = 0 = a + b,$$

e portanto,

$$b = -a,$$

e

$$s(1) = f(0) = a + bq = a - aq,$$

e portanto,

$$a = f(0)/(1-q),$$

e

$$b = -a = -f(0)/(1-q).$$

Exercicio 128c

Portanto

$$s(n) = a + bq^n$$

Exercicio 128c

Portanto

$$
\begin{aligned}
s(n) &= a + bq^n \\
&= \frac{f(0)}{1-q} - \frac{f(0)}{1-q} q^n
\end{aligned}
$$

Exercicio 128c

Portanto

$$
\begin{aligned}
s(n) &= a + bq^n \\
&= \frac{f(0)}{1-q} - \frac{f(0)}{1-q} q^n = \frac{f(0)}{1-q}(1 - q^n)
\end{aligned}
$$

Exercicio 128c

Portanto

$$\begin{aligned} s(n) &= a + bq^n \\ &= \frac{f(0)}{1-q} - \frac{f(0)}{1-q}q^n = \frac{f(0)}{1-q}(1-q^n) \\ &= f(0)\frac{q^n - 1}{q-1} \end{aligned}$$

Exercicio 128c

Portanto

$$
\begin{aligned}
s(n) &= a + bq^n \\
&= \frac{f(0)}{1-q} - \frac{f(0)}{1-q} q^n = \frac{f(0)}{1-q}(1-q^n) \\
&= f(0)\frac{q^n - 1}{q-1} = a_1 \frac{(q^{n'-1} - 1)}{q-1}.
\end{aligned}
$$