

Matemática Discreta

Unidade 40: Somatórios (4)

Renato Carmo
David Menotti

Departamento de Informática da UFPR

Segundo Período Especial de 2020

Exercício 129

Uma função $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ é uma **progressão aritmética**¹ se existe $r \in \mathbb{C}$ tal que

$$f(i+1) - f(i) = r \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Assim, a soma dos n termos iniciais de uma progressão aritmética é dada por

$$s(n) = \sum_{i=0}^{n-1} f(i).$$

- a) Expresse a função f acima por meio de uma recorrência linear não homogênea.
- b) Resolva esta recorrência, obtendo assim uma expressão para o termo geral da progressão aritmética.
- c) Dê uma expressão livre de somatórios para $s(n)$.

¹cfr. Exercício 105

Exercício 129a

- a) Expresse a função f acima por meio de uma recorrência linear não homogênea.

Exercício 129a

- a) Expresse a função f acima por meio de uma recorrência linear não homogênea.

Como

$$f(n+1) = f(n) + r, \text{ para todo } n \geq 0,$$

Exercício 129a

- a) Expresse a função f acima por meio de uma recorrência linear não homogênea.

Como

$$f(n+1) = f(n) + r, \text{ para todo } n \geq 0,$$

pode-se fazer a troca de variável $n+1 = t$, e então temos $n = t-1$ e

$$f(t) = f(t-1) + r, \text{ para todo } t \geq 1.$$

Exercício 129a

- a) Expresse a função f acima por meio de uma recorrência linear não homogênea.

Como

$$f(n+1) = f(n) + r, \text{ para todo } n \geq 0,$$

pode-se fazer a troca de variável $n+1 = t$, e então temos $n = t-1$ e

$$f(t) = f(t-1) + r, \text{ para todo } t \geq 1.$$

Assim podemos expressar f como uma RLnH da seguinte forma

$$f(n) = f(n-1) + r, \text{ para todo } n \geq 1.$$

Exercício 129b

- b) Resolva esta recorrência ($f(n) = f(n-1) + r$, para todo $n \geq 1$), obtendo assim uma expressão para o termo geral da progressão aritmética.

Usando a notação do Teorema 37 temos

$$\begin{aligned}a_1 &= 1, \\ g(n) &= r, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.\end{aligned}$$

Exercício 129b

- b) Resolva esta recorrência ($f(n) = f(n-1) + r$, para todo $n \geq 1$), obtendo assim uma expressão para o termo geral da progressão aritmética.

Usando a notação do Teorema 37 temos

$$\begin{aligned}a_1 &= 1, \\ g(n) &= r, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.\end{aligned}$$

Como

$$g(n) = rn^0 1^n,$$

Exercício 129b

- b) Resolva esta recorrência ($f(n) = f(n-1) + r$, para todo $n \geq 1$), obtendo assim uma expressão para o termo geral da progressão aritmética.

Usando a notação do Teorema 37 temos

$$\begin{aligned}a_1 &= 1, \\ g(n) &= r, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.\end{aligned}$$

Como

$$g(n) = rn^0 1^n,$$

temos diretamente do Corolário 38 que g satisfaz uma RLH cujo PC é

$$G = (X - 1)^{1+0} = (X - 1),$$

Exercício 129b

- b) Resolva esta recorrência ($f(n) = f(n-1) + r$, para todo $n \geq 1$), obtendo assim uma expressão para o termo geral da progressão aritmética.

Usando a notação do Teorema 37 temos

$$\begin{aligned}a_1 &= 1, \\ g(n) &= r, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.\end{aligned}$$

Como

$$g(n) = rn^0 1^n,$$

temos diretamente do Corolário 38 que g satisfaz uma RLH cujo PC é

$$G = (X - 1)^{1+0} = (X - 1),$$

e daí, pelo Teorema 37 temos que f pertence ao espaço vetorial cujo polinômio característico é

$$G(X - 1) = (X - 1)^2,$$

Exercício 129b

E daí, pelo Corolário 36, temos

$$f(n) = an^0 1^n + bn^1 1^n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

Exercício 129b

E daí, pelo Corolário 36, temos

$$f(n) = an^0 1^n + bn^1 1^n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

ou seja,

$$f(n) = a + bn, \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

Exercício 129b

E daí, pelo Corolário 36, temos

$$f(n) = an^0 1^n + bn^1 1^n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

ou seja,

$$f(n) = a + bn, \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

onde $\{a, b\}$ é a solução do sistema

$$f(0) = a + 0b,$$

$$f(1) = a + 1b,$$

Exercício 129b

E daí, pelo Corolário 36, temos

$$f(n) = an^0 1^n + bn^1 1^n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

ou seja,

$$f(n) = a + bn, \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

onde $\{a, b\}$ é a solução do sistema

$$f(0) = a + 0b,$$

$$f(1) = a + 1b,$$

isto é,

$$f(0) = a,$$

$$f(0) + r = a + b,$$

Exercicio 129b

$$f(0) = a,$$

$$f(0) + r = a + b,$$

ou seja,

$$b = f(0) + r - a$$

Exercicio 129b

$$\begin{aligned}f(0) &= a, \\f(0) + r &= a + b,\end{aligned}$$

ou seja,

$$b = f(0) + r - a = f(0) + r - f(0)$$

Exercicio 129b

$$\begin{aligned}f(0) &= a, \\f(0) + r &= a + b,\end{aligned}$$

ou seja,

$$b = f(0) + r - a = f(0) + r - f(0) = r.$$

Exercicio 129b

$$\begin{aligned}f(0) &= a, \\f(0) + r &= a + b,\end{aligned}$$

ou seja,

$$b = f(0) + r - a = f(0) + r - f(0) = r.$$

Portanto,

$$f(n) = a + bn$$

Exercicio 129b

$$\begin{aligned}f(0) &= a, \\f(0) + r &= a + b,\end{aligned}$$

ou seja,

$$b = f(0) + r - a = f(0) + r - f(0) = r.$$

Portanto,

$$f(n) = a + bn = f(0) + rn, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}$$

Exercicio 129b

$$\begin{aligned}f(0) &= a, \\f(0) + r &= a + b,\end{aligned}$$

ou seja,

$$b = f(0) + r - a = f(0) + r - f(0) = r.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}f(n) = a + bn &= f(0) + rn, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}, \\&= a_1 + r(n' - 1), \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.\end{aligned}$$

Exercício 129c

c) Dê uma expressão livre de somatórios para $s(n)$.

Exercício 129c

c) Dê uma expressão livre de somatórios para $s(n)$.

$$s(n) = \sum_{i=0}^{n-1} f(i)$$

e $f(n)$ ($= f(0) + rn$) satisfaz uma RLnH cujo PC é $(X - 1)^2$

Exercício 129c

c) Dê uma expressão livre de somatórios para $s(n)$.

$$s(n) = \sum_{i=0}^{n-1} f(i)$$

e $f(n)$ ($= f(0) + rn$) satisfaz uma RLnH cujo PC é $(X - 1)^2$, então (C. 40), a função $s(n)$ satisfaz uma RLH cujo PC é

$$(X - 1)(X - 1)^2 = (X - 1)^3.$$

Exercício 129c

c) Dê uma expressão livre de somatórios para $s(n)$.

$$s(n) = \sum_{i=0}^{n-1} f(i)$$

e $f(n)$ ($= f(0) + rn$) satisfaz uma RLnH cujo PC é $(X - 1)^2$, então (C. 40), a função $s(n)$ satisfaz uma RLH cujo PC é

$$(X - 1)(X - 1)^2 = (X - 1)^3.$$

e daí (C. 36),

$$s(n) = a1^n + bn^11^n + cn^21^n$$

Exercício 129c

c) Dê uma expressão livre de somatórios para $s(n)$.

$$s(n) = \sum_{i=0}^{n-1} f(i)$$

e $f(n)$ ($= f(0) + rn$) satisfaz uma RLnH cujo PC é $(X - 1)^2$, então (C. 40), a função $s(n)$ satisfaz uma RLH cujo PC é

$$(X - 1)(X - 1)^2 = (X - 1)^3.$$

e daí (C. 36),

$$s(n) = a1^n + bn^11^n + cn^21^n = a + bn + cn^2.$$

Exercício 129c

Os coeficientes a , b e c são dados por

$$s(0) = a + b0 + c0^2,$$

$$s(1) = a + b1 + c1^2,$$

$$s(2) = a + b2 + c2^2,$$

Exercício 129c

Os coeficientes a , b e c são dados por

$$s(0) = a + b0 + c0^2,$$

$$s(1) = a + b1 + c1^2,$$

$$s(2) = a + b2 + c2^2,$$

ou seja,

$$0 = a,$$

e

$$s(1) = \quad f(0) \quad = b + c,$$

$$s(2) = f(0) + f(0) + r = 2b + 4c,$$

Exercício 129c

Os coeficientes a , b e c são dados por

$$s(0) = a + b0 + c0^2,$$

$$s(1) = a + b1 + c1^2,$$

$$s(2) = a + b2 + c2^2,$$

ou seja,

$$0 = a,$$

e

$$s(1) = \quad f(0) \quad = b + c,$$

$$s(2) = f(0) + f(0) + r = 2b + 4c,$$

ou seja,

$$c = f(0) - b$$

Exercicio 129c

e

$$2f(0) + r = 2b + 4(f(0) - b) =$$

Exercicio 129c

e

$$2f(0) + r = 2b + 4(f(0) - b) = -2b + 4f(0),$$

Exercicio 129c

e

$$2f(0) + r = 2b + 4(f(0) - b) = -2b + 4f(0),$$

ou seja,

$$b = (2f(0) - r)/2$$

e

$$c = f(0) - b$$

Exercicio 129c

e

$$2f(0) + r = 2b + 4(f(0) - b) = -2b + 4f(0),$$

ou seja,

$$b = (2f(0) - r)/2$$

e

$$c = f(0) - b = f(0) - (2f(0) - r)/2$$

Exercicio 129c

e

$$2f(0) + r = 2b + 4(f(0) - b) = -2b + 4f(0),$$

ou seja,

$$b = (2f(0) - r)/2$$

e

$$c = f(0) - b = f(0) - (2f(0) - r)/2 = r/2$$

Exercicio 129c

e

$$2f(0) + r = 2b + 4(f(0) - b) = -2b + 4f(0),$$

ou seja,

$$b = (2f(0) - r)/2$$

e

$$c = f(0) - b = f(0) - (2f(0) - r)/2 = r/2$$

Portanto

$$s(n) = a + bn + cn^2$$

Exercicio 129c

e

$$2f(0) + r = 2b + 4(f(0) - b) = -2b + 4f(0),$$

ou seja,

$$b = (2f(0) - r)/2$$

e

$$c = f(0) - b = f(0) - (2f(0) - r)/2 = r/2$$

Portanto

$$s(n) = a + bn + cn^2 = 0 + \frac{2(f(0) - r)n}{2} + \frac{rn^2}{2}$$

Exercicio 129c

e

$$2f(0) + r = 2b + 4(f(0) - b) = -2b + 4f(0),$$

ou seja,

$$b = (2f(0) - r)/2$$

e

$$c = f(0) - b = f(0) - (2f(0) - r)/2 = r/2$$

Portanto

$$s(n) = a + bn + cn^2 = 0 + \frac{2(f(0) - r)n}{2} + \frac{rn^2}{2} = f(0)n + \frac{r(n^2 - n)}{2}$$

Exercicio 129c

e

$$2f(0) + r = 2b + 4(f(0) - b) = -2b + 4f(0),$$

ou seja,

$$b = (2f(0) - r)/2$$

e

$$c = f(0) - b = f(0) - (2f(0) - r)/2 = r/2$$

Portanto

$$\begin{aligned} s(n) &= a + bn + cn^2 = 0 + \frac{2(f(0) - r)n}{2} + \frac{rn^2}{2} = f(0)n + \frac{r(n^2 - n)}{2} \\ &= f(0)n + \frac{n(n-1)}{2}r. \end{aligned}$$

Exercicio 129c

Finalmente, observe que

$$s(n) = f(0)n + \frac{n(n-1)}{2}r, \text{ para todo } n > 0$$

Exercício 129c

Finalmente, observe que

$$s(n) = f(0)n + \frac{n(n-1)}{2}r, \text{ para todo } n > 0,$$

e

$$s(n) = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$$

Exercício 129c

Finalmente, observe que

$$s(n) = f(0)n + \frac{n(n-1)}{2}r, \text{ para todo } n > 0,$$

e

$$s(n) = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} = \frac{(a_1 + \textcolor{red}{a_1} + \textcolor{red}{(n-1)r})n}{2}$$

Exercício 129c

Finalmente, observe que

$$s(n) = f(0)n + \frac{n(n-1)}{2}r, \text{ para todo } n > 0,$$

e

$$\begin{aligned} s(n) &= \frac{(a_1 + a_n)n}{2} = \frac{(a_1 + \textcolor{red}{a}_1 + \textcolor{red}{(n-1)}r)n}{2}, \\ &= \frac{(2a_1 + (n-1)r)n}{2} \end{aligned}$$

Exercício 129c

Finalmente, observe que

$$s(n) = f(0)n + \frac{n(n-1)}{2}r, \text{ para todo } n > 0,$$

e

$$\begin{aligned} s(n) &= \frac{(a_1 + a_n)n}{2} = \frac{(a_1 + \textcolor{red}{a_1} + \textcolor{red}{(n-1)r})n}{2}, \\ &= \frac{(2a_1 + (n-1)r)n}{2} = \frac{2a_1n}{2} + \frac{(n-1)nr}{2} \end{aligned}$$

Exercício 129c

Finalmente, observe que

$$s(n) = f(0)n + \frac{n(n-1)}{2}r, \text{ para todo } n > 0,$$

e

$$\begin{aligned} s(n) &= \frac{(a_1 + a_n)n}{2} = \frac{(a_1 + \textcolor{red}{a}_1 + \textcolor{red}{(n-1)}r)n}{2}, \\ &= \frac{(2a_1 + (n-1)r)n}{2} = \frac{2a_1n}{2} + \frac{(n-1)nr}{2}, \\ &= a_1n + \frac{n(n-1)}{2}r. \end{aligned}$$