

Matemática Discreta

Unidade 53: Sequências (4)

Renato Carmo
David Menotti

Departamento de Informática da UFPR

Segundo Período Especial de 2020

Corolário

Seja A um conjunto finito e seja $n \in \mathbb{N}$. O número de sequências de tamanho no máximo n sobre A é

$$\frac{|A|^{n+1} - 1}{|A| - 1}.$$

Corolário 54

Corolário

Seja A um conjunto finito e seja $n \in \mathbb{N}$. O número de sequências de tamanho no máximo n sobre A é

$$\frac{|A|^{n+1} - 1}{|A| - 1}.$$

Demonstração.

Seja A um conjunto finito e seja $n \in \mathbb{N}$. Vamos provar que o número de sequências de tamanho no máximo n sobre A é

$$\frac{|A|^{n+1} - 1}{|A| - 1}.$$

Corolário 54

Demonstração.

Como o conjunto das sequências de tamanho no máximo n sobre A é

$$\bigcup_{i=0}^n A^i,$$

Corolário 54

Demonstração.

Como o conjunto das sequências de tamanho no máximo n sobre A é

$$\bigcup_{i=0}^n A^i,$$

então o número de sequências de tamanho no máximo n sobre A é

$$\left| \bigcup_{i=0}^n A^i \right|.$$

Demonstração.

Como o conjunto das sequências de tamanho no máximo n sobre A é

$$\bigcup_{i=0}^n A^i,$$

então o número de sequências de tamanho no máximo n sobre A é

$$\left| \bigcup_{i=0}^n A^i \right|.$$

Como os conjuntos $A^i : 0 \leq i \leq n$ são dois a dois disjuntos entre si, temos

$$\left| \bigcup_{i=0}^n A^i \right| \stackrel{\text{C. 44}}{=} \sum_{i=0}^n |A^i| \stackrel{\text{C. 53}}{=}$$

Corolário 54

Demonstração.

Como o conjunto das sequências de tamanho no máximo n sobre A é

$$\bigcup_{i=0}^n A^i,$$

então o número de sequências de tamanho no máximo n sobre A é

$$\left| \bigcup_{i=0}^n A^i \right|.$$

Como os conjuntos $A^i : 0 \leq i \leq n$ são dois a dois disjuntos entre si, temos

$$\left| \bigcup_{i=0}^n A^i \right| \stackrel{\text{C. 44}}{=} \sum_{i=0}^n |A^i| \stackrel{\text{C. 53}}{=} \sum_{i=0}^n |A|^i \stackrel{\text{Ex. 45}}{=}$$

Demonstração.

Como o conjunto das sequências de tamanho no máximo n sobre A é

$$\bigcup_{i=0}^n A^i,$$

então o número de sequências de tamanho no máximo n sobre A é

$$\left| \bigcup_{i=0}^n A^i \right|.$$

Como os conjuntos $A^i : 0 \leq i \leq n$ são dois a dois disjuntos entre si, temos

$$\left| \bigcup_{i=0}^n A^i \right| \stackrel{\text{C. 44}}{=} \sum_{i=0}^n |A^i| \stackrel{\text{C. 53}}{=} \sum_{i=0}^n |A|^i \stackrel{\text{Ex. 45}}{=} \frac{|A|^{n+1} - 1}{|A| - 1}.$$

Exercício 153

Qual o maior valor de n tal que é possível gravar em um dvd (4 700 372 992 bytes) todos os possíveis arquivos de tamanho até n ?

Exercício 153

Qual o maior valor de n tal que é possível gravar em um dvd (4 700 372 992 bytes) todos os possíveis arquivos de tamanho até n ?

Fazendo

$$d := 4\,700\,372\,992 = 2^{17} \cdot 7 \cdot 47 \cdot 109,$$

$$s(n) := \text{soma dos tamanhos de todos os arquivos de tamanho até } n,$$

temos

$$s(n) =$$

Exercício 153

Qual o maior valor de n tal que é possível gravar em um dvd (4 700 372 992 bytes) todos os possíveis arquivos de tamanho até n ?

Fazendo

$$d := 4\,700\,372\,992 = 2^{17} \cdot 7 \cdot 47 \cdot 109,$$

$$s(n) := \text{soma dos tamanhos de todos os arquivos de tamanho até } n,$$

temos

$$s(n) = \sum_{i=0}^n i |A(i)|,$$

onde

$$A(n) := \text{conjunto dos arquivos de tamanho } n.$$

Exercício 153

Como

$$A(n) = B^n,$$

onde B é o conjunto dos bytes, então

Exercício 153

Como

$$A(n) = B^n,$$

onde B é o conjunto dos bytes, então

$$|A(n)| = |B^n| \stackrel{\text{C. 53}}{=}$$

Exercício 153

Como

$$A(n) = B^n,$$

onde B é o conjunto dos bytes, então

$$|A(n)| = |B^n| \stackrel{\text{C. 53}}{=} |B|^n \stackrel{\text{Ex. 151}}{=}$$

Exercício 153

Como

$$A(n) = B^n,$$

onde B é o conjunto dos bytes, então

$$|A(n)| = |B^n| \stackrel{\text{C. 53}}{=} |B|^n \stackrel{\text{Ex. 151}}{=} 256^n,$$

e portanto,

$$s(n) = \sum_{i=0}^n i|A(i)| =$$

Exercício 153

Como

$$A(n) = B^n,$$

onde B é o conjunto dos bytes, então

$$|A(n)| = |B^n| \stackrel{\text{C. 53}}{=} |B|^n \stackrel{\text{Ex. 151}}{=} 256^n,$$

e portanto,

$$s(n) = \sum_{i=0}^n i|A(i)| = \sum_{i=0}^n i256^i \stackrel{\text{Ex. ??}}{=}$$

Exercício 153

Como

$$A(n) = B^n,$$

onde B é o conjunto dos bytes, então

$$|A(n)| = |B^n| \stackrel{\text{C. 53}}{=} |B|^n \stackrel{\text{Ex. 151}}{=} 256^n,$$

e portanto,

$$s(n) = \sum_{i=0}^n i|A(i)| = \sum_{i=0}^n i256^i \stackrel{\text{Ex. ??}}{=} \frac{256}{255} n256^n - \frac{256}{65025} 256^n + \frac{256}{65025}.$$

Exercício 153

Como

$$A(n) = B^n,$$

onde B é o conjunto dos bytes, então

$$|A(n)| = |B^n| \stackrel{\text{C. 53}}{=} |B|^n \stackrel{\text{Ex. 151}}{=} 256^n,$$

e portanto,

$$s(n) = \sum_{i=0}^n i|A(i)| = \sum_{i=0}^n i256^i \stackrel{\text{Ex. ??}}{=} \frac{256}{255} n256^n - \frac{256}{65025} 256^n + \frac{256}{65025}.$$

Queremos determinar o maior valor de k tal que

$$s(k) \leq d,$$

ou seja,

Exercício 153

Como

$$A(n) = B^n,$$

onde B é o conjunto dos bytes, então

$$|A(n)| = |B^n| \stackrel{\text{C. 53}}{=} |B|^n \stackrel{\text{Ex. 151}}{=} 256^n,$$

e portanto,

$$s(n) = \sum_{i=0}^n i|A(i)| = \sum_{i=0}^n i256^i \stackrel{\text{Ex. ??}}{=} \frac{256}{255} n256^n - \frac{256}{65025} 256^n + \frac{256}{65025}.$$

Queremos determinar o maior valor de k tal que

$$s(k) \leq d,$$

ou seja,

$$n = \max \{k \in \mathbb{N} \mid s(k) \leq d\}.$$

Exercício 153

Como

$$s(k) \leq d$$

se e somente se

$$\frac{256}{255}k256^k - \frac{256}{255^2}256^k + \frac{256}{255^2} \leq d,$$

ou seja

Exercício 153

Como

$$s(k) \leq d$$

se e somente se

$$\frac{256}{255}k256^k - \frac{256}{255^2}256^k + \frac{256}{255^2} \leq d,$$

ou seja

$$255 \cdot 256^{k+1}k - 256^{k+1} \leq 255^2d - 256$$

ou seja

Exercício 153

Como

$$s(k) \leq d$$

se e somente se

$$\frac{256}{255}k256^k - \frac{256}{255^2}256^k + \frac{256}{255^2} \leq d,$$

ou seja

$$255 \cdot 256^{k+1}k - 256^{k+1} \leq 255^2d - 256$$

ou seja

$$255 \cdot 256^{k+1}k \left(1 - \frac{1}{255k}\right) \leq 255^2d - 256.$$

Exercício 153

$$255 \cdot 256^{k+1}k \left(1 - \frac{1}{255k}\right) \leq 255^2d - 256.$$

Como $k \geq 1$,

Exercício 153

$$255 \cdot 256^{k+1}k \left(1 - \frac{1}{255k}\right) \leq 255^2d - 256.$$

Como $k \geq 1$, então basta

$$255 \cdot 256^{k+1}k \leq 255^2d - 256,$$

Exercício 153

$$255 \cdot 256^{k+1}k \left(1 - \frac{1}{255k}\right) \leq 255^2d - 256.$$

Como $k \geq 1$, então basta

$$255 \cdot 256^{k+1}k \leq 255^2d - 256,$$

isto é

$$256^{k+1}k \leq 255d - \frac{256}{255} = 255d \left(1 - \frac{256}{255^2d}\right)$$

Exercício 153

$$255 \cdot 256^{k+1}k \left(1 - \frac{1}{255k}\right) \leq 255^2d - 256.$$

Como $k \geq 1$, então basta

$$255 \cdot 256^{k+1}k \leq 255^2d - 256,$$

isto é

$$256^{k+1}k \leq 255d - \frac{256}{255} = 255d \left(1 - \frac{256}{255^2d}\right)$$

ou seja

$$(k+1) \lg 256 + \lg k \leq \lg 255d + \lg \left(1 - \frac{256}{255^2d}\right).$$

Exercício 153

$$255 \cdot 256^{k+1}k \left(1 - \frac{1}{255k}\right) \leq 255^2d - 256.$$

Como $k \geq 1$, então basta

$$255 \cdot 256^{k+1}k \leq 255^2d - 256,$$

isto é

$$256^{k+1}k \leq 255d - \frac{256}{255} = 255d \left(1 - \frac{256}{255^2d}\right)$$

ou seja

$$(k+1) \lg 256 + \lg k \leq \lg 255d + \lg \left(1 - \frac{256}{255^2d}\right).$$

Então basta

$$8k + 8 + \lg k \leq \lg 255d - 1$$

Exercício 153

$$255 \cdot 256^{k+1}k \left(1 - \frac{1}{255k}\right) \leq 255^2d - 256.$$

Como $k \geq 1$, então basta

$$255 \cdot 256^{k+1}k \leq 255^2d - 256,$$

isto é

$$256^{k+1}k \leq 255d - \frac{256}{255} = 255d \left(1 - \frac{256}{255^2d}\right)$$

ou seja

$$(k+1) \lg 256 + \lg k \leq \lg 255d + \lg \left(1 - \frac{256}{255^2d}\right).$$

Então basta

$$8k + 8 + \lg k \leq \lg 255d - 1$$

ou seja

$$8k + \lg k \leq \lg 255d - 9 = \lg 255 + \lg d - 9.$$

Exercício 153

Como $\lg 255 > 7$ e $\lg d > 32$, então basta

$$8k + \lg k \leq 7 + 32 - 9 = 30.$$

Exercício 153

Como $\lg 255 > 7$ e $\lg d > 32$, então basta

$$8k + \lg k \leq 7 + 32 - 9 = 30.$$

ou seja

$$k \leq \frac{30 - \lg k}{8} = \frac{30}{8} - \frac{\lg k}{8} < 4,$$

Exercício 153

Como $\lg 255 > 7$ e $\lg d > 32$, então basta

$$8k + \lg k \leq 7 + 32 - 9 = 30.$$

ou seja

$$k \leq \frac{30 - \lg k}{8} = \frac{30}{8} - \frac{\lg k}{8} < 4,$$

e portanto,

$$n = \max \left\{ k \in \mathbb{N} \mid \frac{256}{255} k 256^k - \frac{256}{255^2} 256^k + \frac{256}{255^2} \leq d, \right\} \geq 3.$$

Exercício 153

Efetivamente,

$$\begin{aligned}s(3) &= 50\,462\,976 < d, \\ s(4) &= 17\,230\,332\,160 > d.\end{aligned}$$

Exercício 153

Efetivamente,

$$\begin{aligned}s(3) &= 50\,462\,976 < d, \\ s(4) &= 17\,230\,332\,160 > d.\end{aligned}$$

e, portanto,

$$n = 3,$$

ou seja, cabem num dvd todos os possíveis arquivos de tamanho até 3.

Exercício 153

Efetivamente,

$$\begin{aligned}s(3) &= 50\,462\,976 < d, \\ s(4) &= 17\,230\,332\,160 > d.\end{aligned}$$

e, portanto,

$$n = 3,$$

ou seja, cabem num dvd todos os possíveis arquivos de tamanho até 3.

Observe que, $4 \times 256^4 = 17\,179\,869\,184 > 4\,700\,372\,992$, e

$$\left\lceil \frac{4 \times 256^4}{4\,700\,372\,992} \right\rceil = 4,$$

e, portanto,

Exercício 153

Efetivamente,

$$\begin{aligned}s(3) &= 50\,462\,976 < d, \\ s(4) &= 17\,230\,332\,160 > d.\end{aligned}$$

e, portanto,

$$n = 3,$$

ou seja, cabem num dvd todos os possíveis arquivos de tamanho até 3.

Observe que, $4 \times 256^4 = 17\,179\,869\,184 > 4\,700\,372\,992$, e

$$\left\lceil \frac{4 \times 256^4}{4\,700\,372\,992} \right\rceil = 4,$$

e, portanto, num dvd não cabem todos os arquivos de tamanho 4.

Exercício 153

Efetivamente,

$$\begin{aligned}s(3) &= 50\,462\,976 < d, \\ s(4) &= 17\,230\,332\,160 > d.\end{aligned}$$

e, portanto,

$$n = 3,$$

ou seja, cabem num dvd todos os possíveis arquivos de tamanho até 3.

Observe que, $4 \times 256^4 = 17\,179\,869\,184 > 4\,700\,372\,992$, e

$$\left\lceil \frac{4 \times 256^4}{4\,700\,372\,992} \right\rceil = 4,$$

e, portanto, num dvd não cabem todos os arquivos de tamanho 4.

Isto é, precisa-se de 4 dvd's para armazenarmos todos os arquivos de tamanho 4.