

Matemática Discreta

Unidade 63: Permutações Circulares

Renato Carmo
David Menotti

Departamento de Informática da UFPR

Segundo Período Especial de 2020

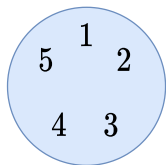
Permutações Circulares

Dizemos que duas permutações sobre A são **circularmente equivalentes** se “preservam as vizinhanças”.

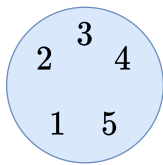
Permutações Circulares

Dizemos que duas permutações sobre A são **circularmente equivalentes** se “preservam as vizinhanças”.

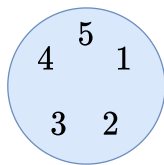
Por exemplo, $(1, 2, 3, 4, 5)$, $(3, 4, 5, 1, 2)$ e $(5, 1, 2, 3, 4)$ são permutações circularmente equivalentes sobre $[5]$.



$(1, 2, 3, 4, 5)$



$(3, 4, 5, 1, 2)$

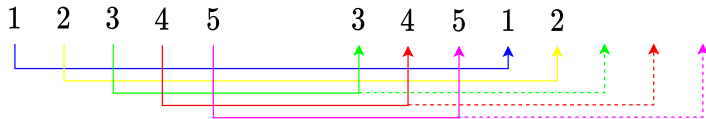
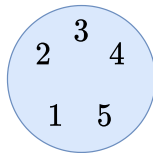
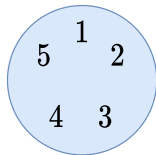


$(5, 1, 2, 3, 4)$

Permutações Circulares

Dizemos que duas permutações sobre A são **circularmente equivalentes** se “preservam as vizinhanças”.

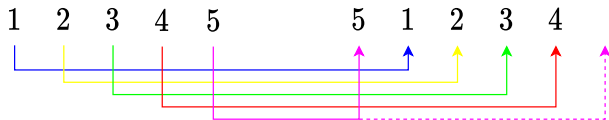
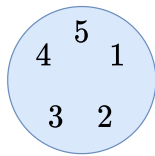
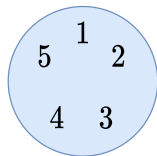
Por exemplo, $(1, 2, 3, 4, 5)$, $(3, 4, 5, 1, 2)$ e $(5, 1, 2, 3, 4)$ são permutações circularmente equivalentes sobre $[5]$.



Permutações Circulares

Dizemos que duas permutações sobre A são **circularmente equivalentes** se “preservam as vizinhanças”.

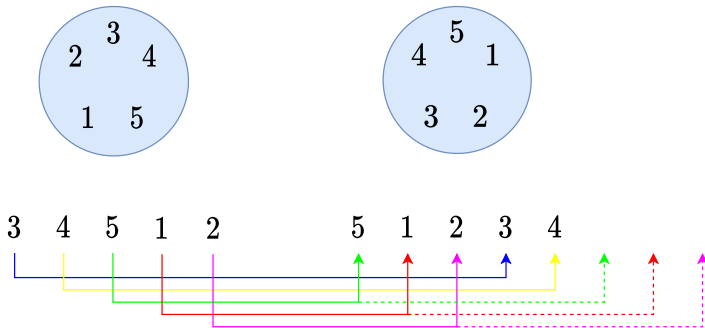
Por exemplo, $(1, 2, 3, 4, 5)$, $(3, 4, 5, 1, 2)$ e $(5, 1, 2, 3, 4)$ são permutações circularmente equivalentes sobre $[5]$.



Permutações Circulares

Dizemos que duas permutações sobre A são **circularmente equivalentes** se “preservam as vizinhanças”.

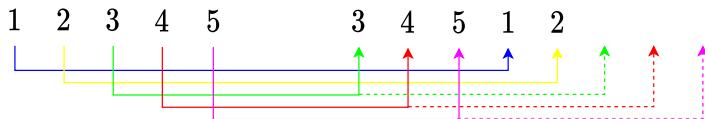
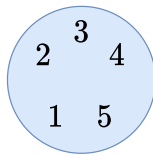
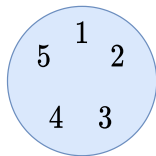
Por exemplo, $(1, 2, 3, 4, 5)$, $(3, 4, 5, 1, 2)$ e $(5, 1, 2, 3, 4)$ são permutações circularmente equivalentes sobre $[5]$.



Permutações Circulares

Mais formalmente, dizemos que duas sequências $u = (u_1, \dots, u_n)$ e $v = (v_1, \dots, v_n)$ são circularmente equivalentes se existe $k \in [0..n-1]$ tal que

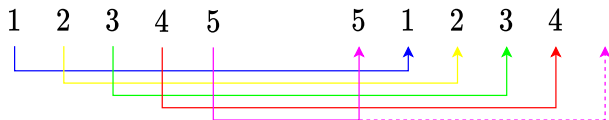
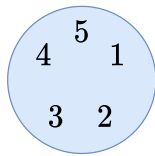
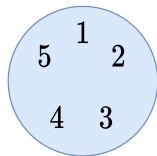
$$u_i = v_{i+k \bmod n}, \text{ para todo } i \in [n].$$



Permutações Circulares

Mais formalmente, dizemos que duas sequências $u = (u_1, \dots, u_n)$ e $v = (v_1, \dots, v_n)$ são circularmente equivalentes se existe $k \in [0..n-1]$ tal que

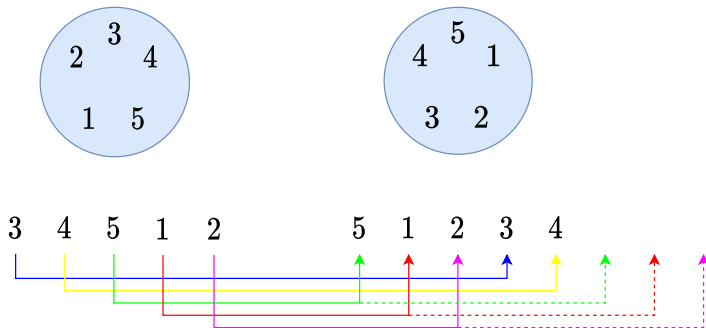
$$u_i = v_{i+k \bmod n}, \text{ para todo } i \in [n].$$



Permutações Circulares

Mais formalmente, dizemos que duas sequências $u = (u_1, \dots, u_n)$ e $v = (v_1, \dots, v_n)$ são circularmente equivalentes se existe $k \in [0..n-1]$ tal que

$$u_i = v_{i+k \bmod n}, \text{ para todo } i \in [n].$$



Permutações Circulares

O conjunto das permutações sobre um conjunto finito A que **não** são circularmente equivalentes é conhecido pelo nome de conjunto das **permutações circulares** sobre A .

Permutações Circulares

O conjunto das permutações sobre um conjunto finito A que **não** são circularmente equivalentes é conhecido pelo nome de conjunto das **permutações circulares** sobre A .

Qual o número de permutações sobre $[n]$ que não são circularmente equivalentes?

$$[3]!$$

(1, 2, 3) (1, 3, 2)

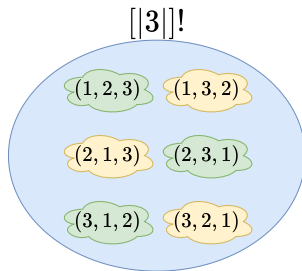
(2, 1, 3) (2, 3, 1)

(3, 1, 2) (3, 2, 1)

Permutações Circulares

O conjunto das permutações sobre um conjunto finito A que **não** são circularmente equivalentes é conhecido pelo nome de conjunto das **permutações circulares** sobre A .

Qual o número de permutações sobre $[n]$ que não são circularmente equivalentes?



Permutações Circulares

O conjunto das permutações sobre um conjunto finito A que **não** são circularmente equivalentes é conhecido pelo nome de conjunto das **permutações circulares** sobre A . Qual o número de permutações sobre $[n]$ que não são circularmente equivalentes?

$$([n])!$$

(1, 2, 3, 4) (1, 2, 4, 3) (2, 1, 3, 4) (2, 1, 4, 3)

(1, 3, 2, 4) (1, 3, 4, 2) (2, 3, 1, 4) (2, 3, 4, 1)

(1, 4, 2, 3) (1, 4, 3, 2) (2, 4, 1, 3) (2, 4, 3, 1)

(3, 1, 2, 4) (3, 1, 4, 2) (4, 1, 2, 3) (4, 1, 3, 2)

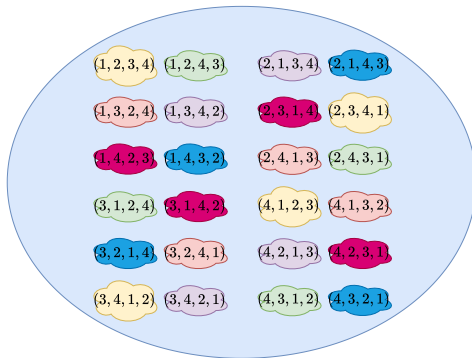
(3, 2, 1, 4) (3, 2, 4, 1) (4, 2, 1, 3) (4, 2, 3, 1)

(3, 4, 1, 2) (3, 4, 2, 1) (4, 3, 1, 2) (4, 3, 2, 1)

Permutações Circulares

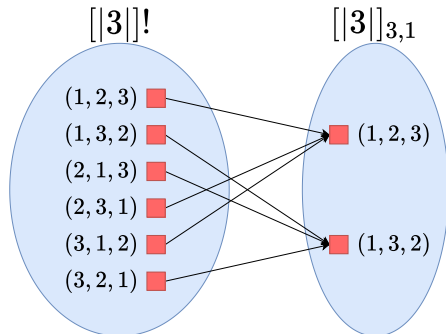
O conjunto das permutações sobre um conjunto finito A que **não** são circularmente equivalentes é conhecido pelo nome de conjunto das **permutações circulares** sobre A . Qual o número de permutações sobre $[n]$ que não são circularmente equivalentes?

$$[4]!$$



Permutações Circulares

Seja $F: [n]! \rightarrow [n]_{n,1}$ a função que associa a cada permutação de $f \in [n]!$ a permutação circularmente equivalente a f que começa por 1, isto é, se

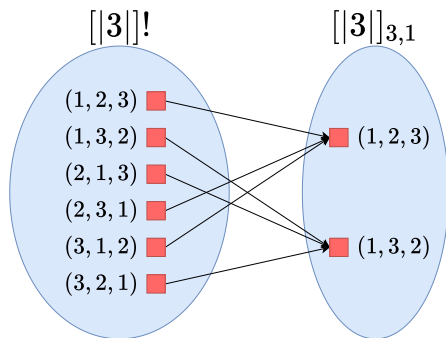


Permutações Circulares

Seja $F: [n]! \rightarrow [n]_{n,1}$ a função que associa a cada permutação de $f \in [n]!$ a permutação circularmente equivalente a f que começa por 1, isto é, se

$$f = (a_1, \dots, a_{k-1}, a_k = 1, a_{k+1}, \dots, a_n),$$

então



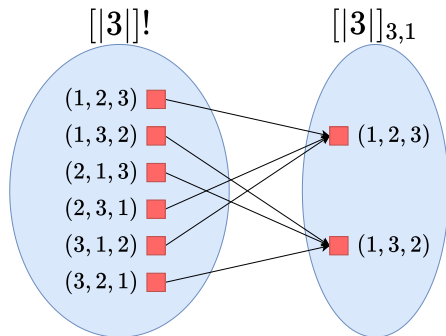
Permutações Circulares

Seja $F: [n]! \rightarrow [n]_{n,1}$ a função que associa a cada permutação de $f \in [n]!$ a permutação circularmente equivalente a f que começa por 1, isto é, se

$$f = (a_1, \dots, a_{k-1}, a_k = 1, a_{k+1}, \dots, a_n),$$

então

$$F(f) = (1, a_{k+1}, \dots, a_1, \dots, a_{k-1}).$$



Permutações Circulares

Então, para cada permutação $f \in [n]!$, o conjunto $F^{-1}((1, a_{k+1}, \dots, a_1, \dots, a_{k-1}))$ é o conjunto das permutações circularmente equivalentes a f .

Permutações Circulares

Então, para cada permutação $f \in [n]!$, o conjunto $F^{-1}((1, a_{k+1}, \dots, a_1, \dots, a_{k-1}))$ é o conjunto das permutações circularmente equivalentes a f .

E a quantidade de tais conjuntos é o número de permutações sobre $[n]$ **não** circularmente equivalentes.

Permutações Circulares

Então, para cada permutação $f \in [n]!$, o conjunto $F^{-1}((1, a_{k+1}, \dots, a_1, \dots, a_{k-1}))$ é o conjunto das permutações circularmente equivalentes a f .

E a quantidade de tais conjuntos é o número de permutações sobre $[n]$ **não** circularmente equivalentes.

Noutras palavras, o número de permutações não circularmente equivalentes sobre $[n]$ é $|[n]_{n,1}|$.

Permutações Circulares

Do Corolário 46 temos

$$|[n]| = \sum_{f \in F([n])} |F^{-1}(f)| =$$

Permutações Circulares

Do Corolário 46 temos

$$|[n]| = \sum_{f \in F([n])} |F^{-1}(f)| = \sum_{f \in [n]_{n,1}} |F^{-1}(f)| =$$

Permutações Circulares

Do Corolário 46 temos

$$|[n]| = \sum_{f \in F([n])} |F^{-1}(f)| = \sum_{f \in [n]_{n,1}} |F^{-1}(f)| = \sum_{f \in [n]_{n,1}} n =$$

Permutações Circulares

Do Corolário 46 temos

$$|[n]| = \sum_{f \in F([n])} |F^{-1}(f)| = \sum_{f \in [n]_{n,1}} |F^{-1}(f)| = \sum_{f \in [n]_{n,1}} n = n|[n]_{n,1}|,$$

ou seja,

Permutações Circulares

Do Corolário 46 temos

$$|[n]!| = \sum_{f \in F([n]!)} |F^{-1}(f)| = \sum_{f \in [n]_{n,1}} |F^{-1}(f)| = \sum_{f \in [n]_{n,1}} n = n|[n]_{n,1}|,$$

ou seja,

$$|[n]_{n,1}| = \frac{|[n]!|}{n} =$$

Permutações Circulares

Do Corolário 46 temos

$$|[n]!| = \sum_{f \in F([n]!)} |F^{-1}(f)| = \sum_{f \in [n]_{n,1}} |F^{-1}(f)| = \sum_{f \in [n]_{n,1}} n = n|[n]_{n,1}|,$$

ou seja,

$$|[n]_{n,1}| = \frac{|[n]!|}{n} = \frac{n!}{n} =$$

Permutações Circulares

Do Corolário 46 temos

$$|[n]!| = \sum_{f \in F([n]!)} |F^{-1}(f)| = \sum_{f \in [n]_{n,1}} |F^{-1}(f)| = \sum_{f \in [n]_{n,1}} n = n|[n]_{n,1}|,$$

ou seja,

$$|[n]_{n,1}| = \frac{|[n]!|}{n} = \frac{n!}{n} = \frac{n(n-1)!}{n} =$$

Permutações Circulares

Do Corolário 46 temos

$$|[n]!| = \sum_{f \in F([n]!)} |F^{-1}(f)| = \sum_{f \in [n]_{n,1}} |F^{-1}(f)| = \sum_{f \in [n]_{n,1}} n = n|[n]_{n,1}|,$$

ou seja,

$$|[n]_{n,1}| = \frac{|[n]!|}{n} = \frac{n!}{n} = \frac{n(n-1)!}{n} = (n-1)! .$$

Permutações Circulares

Do Corolário 46 temos

$$|[n]| = \sum_{f \in F([n])} |F^{-1}(f)| = \sum_{f \in [n]_{n,1}} |F^{-1}(f)| = \sum_{f \in [n]_{n,1}} n = n|[n]_{n,1}|,$$

ou seja,

$$|[n]_{n,1}| = \frac{|[n]|}{n} = \frac{n!}{n} = \frac{n(n-1)!}{n} = (n-1)!.$$

Teorema

O número de permutações circulares sobre um conjunto de n elementos é $(n-1)!$

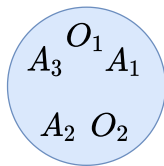
Exercícios 181

Dois meninos e três meninas formarão uma roda dando-se as mãos.

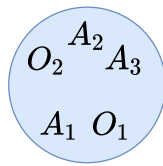
Exercícios 181

Dois meninos e três meninas formarão uma roda dando-se as mãos.

De quantos modos diferentes poderão formar a roda de modo que os dois meninos não fiquem juntos?



$(O_1, A_1, O_2, A_2, A_3)$

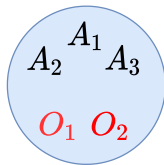


$(A_2, A_3, O_1, A_1, O_2)$

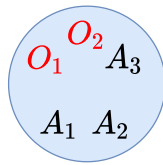
Exercícios 181

Dois meninos e três meninas formarão uma roda dando-se as mãos.

De quantos modos diferentes poderão formar a roda de modo que os dois meninos não fiquem juntos?



$(A_1, A_3, O_2, O_1, A_2)$

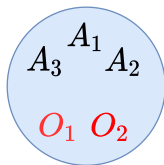


$(O_2, A_3, A_2, A_1, O_1)$

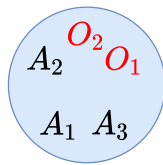
Exercícios 181

Dois meninos e três meninas formarão uma roda dando-se as mãos.

De quantos modos diferentes poderão formar a roda de modo que os dois meninos não fiquem juntos?



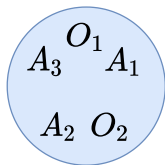
$(A_1, A_2, O_2, O_1, A_3)$



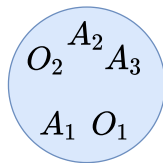
$(O_2, O_1, A_3, A_1, A_2)$

Exercícios 181

Cada modo diferente de as crianças formarem a roda corresponde a uma permutação circular das crianças.



$(O_1, A_1, O_2, A_2, A_3)$



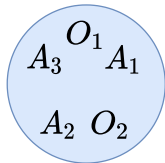
$(A_2, A_3, O_1, A_1, O_2)$

Exercícios 181

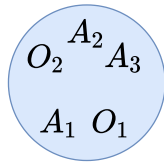
Cada modo diferente de as crianças formarem a roda corresponde a uma permutação circular das crianças.

O número de tais permutações é

$$(5 - 1)! = 4! = 24.$$



$(O_1, A_1, O_2, A_2, A_3)$



$(A_2, A_3, O_1, A_1, O_2)$

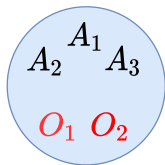
Exercícios 181

O número de modos em que os meninos ficam **juntos** corresponde a tratar os dois meninos como se fossem um só.

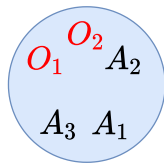
Exercícios 181

O número de modos em que os meninos ficam **juntos** corresponde a tratar os dois meninos como se fossem um só.

Observe abaixo que as permutações não são circularmente equivalentes, mas representam a mesma configuração não desejada em que os meninos estão juntos.



$(A_1, A_3, O_2, O_1, A_2)$



$(O_2, A_2, A_1, A_3, O_1)$

Exercícios 181

Se houvesse um só menino (e três meninas) teríamos

$$(4 - 1)! = 3! = 6$$

modos diferentes de formar a roda.

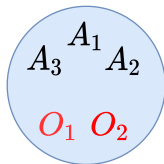
Exercícios 181

Se houvesse um só menino (e três meninas) teríamos

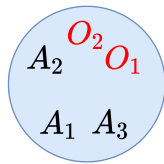
$$(4 - 1)! = 3! = 6$$

modos diferentes de formar a roda.

Para cada um destes modos, temos duas configurações possíveis, a saber, um deles à esquerda do outro e vice-versa, como ilustrado abaixo.



$(A_1, A_2, O_2, O_1, A_3)$



$(O_2, O_1, A_3, A_1, A_2)$

Exercícios 181

Assim, o número de modos diferentes de formar a roda em que os meninos ficam juntos é $2 \times 6 = 12$.

Exercícios 181

Assim, o número de modos diferentes de formar a roda em que os meninos ficam juntos é $2 \times 6 = 12$.

E o número de modos diferentes de formar a roda de modo que os dois meninos não fiquem juntos é

$$PC_5 - 2PC_4 =$$

Exercícios 181

Assim, o número de modos diferentes de formar a roda em que os meninos ficam juntos é $2 \times 6 = 12$.

E o número de modos diferentes de formar a roda de modo que os dois meninos não fiquem juntos é

$$PC_5 - 2PC_4 = (5 - 1)! - 2(4 - 1)! =$$

Exercícios 181

Assim, o número de modos diferentes de formar a roda em que os meninos ficam juntos é $2 \times 6 = 12$.

E o número de modos diferentes de formar a roda de modo que os dois meninos não fiquem juntos é

$$PC_5 - 2PC_4 = (5 - 1)! - 2(4 - 1)! = 4! - 2 \cdot 3! =$$

Exercícios 181

Assim, o número de modos diferentes de formar a roda em que os meninos ficam juntos é $2 \times 6 = 12$.

E o número de modos diferentes de formar a roda de modo que os dois meninos não fiquem juntos é

$$PC_5 - 2PC_4 = (5 - 1)! - 2(4 - 1)! = 4! - 2 \cdot 3! = 24 - 12 =$$

Exercícios 181

Assim, o número de modos diferentes de formar a roda em que os meninos ficam juntos é $2 \times 6 = 12$.

E o número de modos diferentes de formar a roda de modo que os dois meninos não fiquem juntos é

$$PC_5 - 2PC_4 = (5 - 1)! - 2(4 - 1)! = 4! - 2 \cdot 3! = 24 - 12 = 12,$$

onde PC_n indica a permutação circular de n elementos que é $(n - 1)!$.