

Matemática Discreta

Unidade 68: Permutações com Repetição

Renato Carmo
David Menotti

Departamento de Informática da UFPR

Segundo Período Especial de 2020

Anagramas

Anagramas

anagramas de fruta

Anagramas

anagramas de fruta = # permutações sobre $\{f, r, u, t, a\}$

Anagramas

anagramas de fruta = # permutações sobre $\{f, r, u, t, a\}$

$|\{f, r, u, t, a\}|!$

Anagramas

anagramas de fruta = # permutações sobre $\{f, r, u, t, a\}$

$$|\{f, r, u, t, a\}|! \stackrel{C. 65}{=} |\{f, r, u, t, a\}|!$$

Anagramas

anagramas de fruta = # permutações sobre $\{f, r, u, t, a\}$

$$|\{f, r, u, t, a\}|! \stackrel{C. 65}{=} |\{f, r, u, t, a\}|! = 5!$$

Anagramas

anagramas de fruta = # permutações sobre $\{f, r, u, t, a\}$

$$|\{f, r, u, t, a\}|! \stackrel{C. 65}{=} |\{f, r, u, t, a\}|! = 5! = 120$$

Anagramas

anagramas de fruta = # permutações sobre $\{f, r, u, t, a\}$

$$|\{f, r, u, t, a\}|! \stackrel{C. 65}{=} |\{f, r, u, t, a\}|! = 5! = 120$$

anagramas de laranja

Anagramas

anagramas de fruta = # permutações sobre $\{f, r, u, t, a\}$

$$|\{f, r, u, t, a\}|! \stackrel{C. 65}{=} |\{f, r, u, t, a\}|! = 5! = 120$$

anagramas de laranja: $7!$

Anagramas

anagramas de fruta = # permutações sobre $\{f, r, u, t, a\}$

$$|\{f, r, u, t, a\}|! \stackrel{\text{C. 65}}{=} |\{f, r, u, t, a\}|! = 5! = 120$$

anagramas de laranja: $7! = 5040$

Anagramas

anagramas de fruta = # permutações sobre $\{f, r, u, t, a\}$

$$|\{f, r, u, t, a\}|! \stackrel{C. 65}{=} |\{f, r, u, t, a\}|! = 5! = 120$$

anagramas de laranja: $7! = 5040$???

Anagramas

anagramas de fruta = # permutações sobre $\{f, r, u, t, a\}$

$$|\{f, r, u, t, a\}|! \stackrel{C. 65}{=} |\{f, r, u, t, a\}|! = 5! = 120$$

anagramas de laranja: $7! = 5040$???

laranja

Anagramas

anagramas de fruta = # permutações sobre $\{f, r, u, t, a\}$

$$|\{f, r, u, t, a\}|! \stackrel{C. 65}{=} |\{f, r, u, t, a\}|! = 5! = 120$$

anagramas de laranja: $7! = 5040$???

laranja

laranja

Anagramas

anagramas de fruta = # permutações sobre $\{f, r, u, t, a\}$

$$|\{f, r, u, t, a\}|! \stackrel{C. 65}{=} |\{f, r, u, t, a\}|! = 5! = 120$$

anagramas de laranja: $7! = 5040$???

laranja

laranja

laranja

Anagramas

anagramas de fruta = # permutações sobre $\{f, r, u, t, a\}$

$$|\{f, r, u, t, a\}|! \stackrel{C. 65}{=} |\{f, r, u, t, a\}|! = 5! = 120$$

anagramas de laranja: $7! = 5040$???

laranja

laranja

laranja

...

Anagramas

anagramas de fruta = # permutações sobre $\{f, r, u, t, a\}$

$$|\{f, r, u, t, a\}|! \stackrel{C. 65}{=} |\{f, r, u, t, a\}|! = 5! = 120$$

anagramas de laranja: $7! = 5040$???

laranja

laranja

laranja

...

$$3! = 6$$

Anagramas

anagramas de fruta = # permutações sobre $\{f, r, u, t, a\}$

$$|\{f, r, u, t, a\}|! \stackrel{C. 65}{=} |\{f, r, u, t, a\}|! = 5! = 120$$

anagramas de laranja: $7! = 5040$???

laranja

laranja

laranja

...

$$3! = 6$$

$$\frac{7!}{3!}$$

Anagramas

anagramas de fruta = # permutações sobre $\{f, r, u, t, a\}$

$$|\{f, r, u, t, a\}|! \stackrel{C. 65}{=} |\{f, r, u, t, a\}|! = 5! = 120$$

anagramas de laranja: $7! = 5040$???

laranja

laranja

laranja

...

$$3! = 6$$

$$\frac{7!}{3!} = \frac{5040}{6} = 840$$

Mais Anagramas

Mais Anagramas

anagramas de banana

Mais Anagramas

anagramas de banana: $\frac{6!}{3!}$

Mais Anagramas

anagramas de banana: $\frac{6!}{3!} = 120$

Mais Anagramas

anagramas de banana: $\frac{6!}{3!} = 120$???

Mais Anagramas

anagramas de banana: $\frac{6!}{3!} = 120$???

banana

Mais Anagramas

anagramas de banana: $\frac{6!}{3!} = 120$???

bana

$$\frac{\frac{6!}{3!}}{2!}$$

Mais Anagramas

anagramas de banana: $\frac{6!}{3!} = 120$???

bana

$$\frac{\frac{6!}{3!}}{2!} = \frac{6!}{3!2!}$$

Mais Anagramas

anagramas de banana: $\frac{6!}{3!} = 120$???

bana

$$\frac{\frac{6!}{3!}}{2!} = \frac{6!}{3!2!} = 60$$

Coeficientes Multinomiais

Coeficientes Multinomiais

$$n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$$

Coeficientes Multinomiais

$$n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$$

coeficiente multinomial

Coeficientes Multinomiais

$$n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$$

coeficiente multinomial:
$$\binom{n_1 + \dots + n_k}{n_1, \dots, n_k}$$

Coeficientes Multinomiais

$$n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$$

coeficiente multinomial:
$$\binom{n_1 + \dots + n_k}{n_1, \dots, n_k} := \frac{(n_1 + \dots + n_k)!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$$

Coeficientes Multinomiais

$$n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$$

coeficiente multinomial:
$$\binom{n_1 + \dots + n_k}{n_1, \dots, n_k} := \frac{(n_1 + \dots + n_k)!}{n_1! n_2! \dots n_k!} = \frac{\left(\sum_{i=1}^k n_i\right)!}{\prod_{i=1}^k n_i!}$$

Coeficientes Multinomiais

$$n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$$

coeficiente multinomial:
$$\binom{n_1 + \dots + n_k}{n_1, \dots, n_k} := \frac{(n_1 + \dots + n_k)!}{n_1! n_2! \dots n_k!} = \frac{\left(\sum_{i=1}^k n_i\right)!}{\prod_{i=1}^k n_i!}$$

$$\binom{n}{k}$$

Coeficientes Multinomiais

$$n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$$

coeficiente multinomial:
$$\binom{n_1 + \dots + n_k}{n_1, \dots, n_k} := \frac{(n_1 + \dots + n_k)!}{n_1! n_2! \dots n_k!} = \frac{\left(\sum_{i=1}^k n_i\right)!}{\prod_{i=1}^k n_i!}$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Coeficientes Multinomiais

$$n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$$

coeficiente multinomial:
$$\binom{n_1 + \dots + n_k}{n_1, \dots, n_k} := \frac{(n_1 + \dots + n_k)!}{n_1! n_2! \dots n_k!} = \frac{\left(\sum_{i=1}^k n_i\right)!}{\prod_{i=1}^k n_i!}$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{(k + (n-k))!}{k!(n-k)!}$$

Coeficientes Multinomiais

$$n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$$

coeficiente multinomial:
$$\binom{n_1 + \dots + n_k}{n_1, \dots, n_k} := \frac{(n_1 + \dots + n_k)!}{n_1! n_2! \dots n_k!} = \frac{\left(\sum_{i=1}^k n_i\right)!}{\prod_{i=1}^k n_i!}$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{(k + (n-k))!}{k!(n-k)!} = \frac{((n-k) + k)!}{(n-k)!k!}$$

Coeficientes Multinomiais

$$n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$$

coeficiente multinomial:
$$\binom{n_1 + \dots + n_k}{n_1, \dots, n_k} := \frac{(n_1 + \dots + n_k)!}{n_1! n_2! \dots n_k!} = \frac{\left(\sum_{i=1}^k n_i\right)!}{\prod_{i=1}^k n_i!}$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{(k + (n-k))!}{k!(n-k)!} = \frac{((n-k) + k)!}{(n-k)!k!} = \binom{k + (n-k)}{k, n-k}$$

Coeficientes Multinomiais

$$n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$$

coeficiente multinomial:
$$\binom{n_1 + \dots + n_k}{n_1, \dots, n_k} := \frac{(n_1 + \dots + n_k)!}{n_1! n_2! \dots n_k!} = \frac{\left(\sum_{i=1}^k n_i\right)!}{\prod_{i=1}^k n_i!}$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{(k + (n-k))!}{k!(n-k)!} = \frac{((n-k) + k)!}{(n-k)!k!} = \binom{k + (n-k)}{k, n-k} = \binom{n}{n-k}$$

Teorema 73

Teorema 73

$$\binom{n_1 + \dots + n_k}{n_1, \dots, n_k} = \binom{n_1 + \dots + n_{k-1}}{n_1, \dots, n_{k-1}} \binom{n_1 + \dots + n_k}{n_k}$$

Teorema 73

$$\binom{n_1 + \dots + n_k}{n_1, \dots, n_k} = \binom{n_1 + \dots + n_{k-1}}{n_1, \dots, n_{k-1}} \binom{n_1 + \dots + n_k}{n_k}$$

Demonstração.

Exercício 56



Teorema 74

Teorema 74

$$A = \{a_1, \dots, a_k\}$$

Teorema 74

$A = \{a_1, \dots, a_k\}$, n_1 exemplares de a_1

Teorema 74

$A = \{a_1, \dots, a_k\}$, n_1 exemplares de a_1 , n_2 exemplares de a_2

Teorema 74

$A = \{a_1, \dots, a_k\}$, n_1 exemplares de a_1 , n_2 exemplares de a_2 , ...

Teorema 74

$A = \{a_1, \dots, a_k\}$, n_1 exemplares de a_1 , n_2 exemplares de a_2 , $\dots$, n_k exemplares de a_k

Teorema 74

$A = \{a_1, \dots, a_k\}$, n_1 exemplares de a_1 , n_2 exemplares de a_2 , $\dots$, n_k exemplares de a_k

permutações distintas de elementos de A

Teorema 74

$A = \{a_1, \dots, a_k\}$, n_1 exemplares de a_1 , n_2 exemplares de a_2 , $\dots$, n_k exemplares de a_k

permutações distintas de elementos de A

$$\binom{n_1 + \dots + n_k}{n_1, \dots, n_k}$$

Teorema 74

$A = \{a_1, \dots, a_k\}$, n_1 exemplares de a_1 , n_2 exemplares de a_2 , $\dots$, n_k exemplares de a_k

permutações distintas de elementos de A

$$\binom{n_1 + \dots + n_k}{n_1, \dots, n_k}$$

Demonstração.

Indução em k

