

Matemática Discreta

Aula Extra: Exercícios e Exemplos Interessantes

Renato Carmo
David Menotti

Departamento de Informática da UFPR

Segundo Período Especial de 2020

Aula Extra: Exercícios e Exemplos Interessantes

- Exercício 79
- Exercício 83
- Exercício 84
- Exercício 87
- Exercício 85
- Exercício 49
- Exercício 61
- Exercício ??

1. Exercício 79

Considere o Algoritmo Mínimo(v, a, b) dado por

Mínimo(v, a, b)

Se $a = b$

 Devolva a

$m \leftarrow \lfloor \frac{a+b}{2} \rfloor$

$m_1 \leftarrow \text{Mínimo}(v, a, m)$

$m_2 \leftarrow \text{Mínimo}(v, m+1, b)$

Se $v[m_1] \leq v[m_2]$

 Devolva m_1

Devolva m_2

Prove por indução em n que, dado $a \in \mathbb{Z}$, a execução de Mínimo($v, a, a + n - 1$) faz $n - 1$ comparações entre elementos de v , para todo $n \geq 1$.

1. Exercício 79

Seja $a \in \mathbb{Z}$ e seja $C: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ a função dada por

$C(n) :=$ número de comparações na execução de $\text{Minimo}(v, a, a + n - 1)$.

1. Exercício 79

Seja $a \in \mathbb{Z}$ e seja $C: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ a função dada por

$$C(n) := \text{número de comparações na execução de } \text{Minimo}(v, a, a + n - 1).$$

Vamos provar que

$$C(n) = n - 1, \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \text{ e } n > 0,$$

por indução em n .

1. Exercício 79

Seja $a \in \mathbb{Z}$ e seja $C: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ a função dada por

$$C(n) := \text{número de comparações na execução de } \text{Minimo}(v, a, a + n - 1).$$

Vamos provar que

$$C(n) = n - 1, \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \text{ e } n > 0,$$

por indução em n .

HI: Seja $p \in \mathbb{N}$ e $p > 0$ tal que

$$C(k) = k - 1, \text{ para todo } k \in [1..p].$$

1. Exercício 79

Passo: Vamos provar que

$$C(p+1) = (p+1) - 1 = p.$$

1. Exercício 79

Passo: Vamos provar que

$$C(p+1) = (p+1) - 1 = p.$$

Do Algoritmo Minimo() temos que, se $p+1 > 1$, então

$$\begin{aligned} C(p+1) &= C(m-a+1) + C((a + ((p+1) - 1)) - (m+1) + 1) + 1 \\ &= C(m-a+1) + C(a+p-m) + 1, \end{aligned}$$

onde

$$m = \left\lfloor \frac{a + (a + (p+1) - 1)}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{2a + p}{2} \right\rfloor = \left\lfloor a + \frac{p}{2} \right\rfloor = a + \left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor$$

1. Exercício 79

Passo: ...

e, portanto,

$$m - a + 1 = a + \left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor - a + 1 = \left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor + 1,$$

1. Exercício 79

Passo: ...

e, portanto,

$$m - a + 1 = a + \left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor - a + 1 = \left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor + 1,$$

e

$$a + p - m = a + p - \left(a + \left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor \right) = a + p - a - \left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor = \left\lceil \frac{p}{2} \right\rceil$$

1. Exercício 79

Passo: ...

e, portanto,

$$m - a + 1 = a + \left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor - a + 1 = \left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor + 1,$$

e

$$a + p - m = a + p - \left(a + \left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor \right) = a + p - a - \left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor = \left\lceil \frac{p}{2} \right\rceil$$

e daí

$$C(p+1) = C\left(\left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor + 1\right) + C\left(\left\lceil \frac{p}{2} \right\rceil\right) + 1.$$

1. Exercício 79

Passo: ...

Se $1 \leq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor + 1 \leq p$ e $1 \leq \lceil \frac{p}{2} \rceil \leq p$, então, pela HI temos

$$\begin{aligned} C\left(\left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor + 1\right) &= \left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor, \text{ e} \\ C\left(\left\lceil \frac{p}{2} \right\rceil\right) &= \left\lceil \frac{p}{2} \right\rceil - 1, \end{aligned}$$

1. Exercício 79

Passo: ...

Se $1 \leq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor + 1 \leq p$ e $1 \leq \lceil \frac{p}{2} \rceil \leq p$, então, pela HI temos

$$\begin{aligned}C\left(\left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor + 1\right) &= \left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor, \text{ e} \\C\left(\left\lceil \frac{p}{2} \right\rceil\right) &= \left\lceil \frac{p}{2} \right\rceil - 1,\end{aligned}$$

e daí

$$C(p+1) = \left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor + \left\lceil \frac{p}{2} \right\rceil - 1 + 1 = p.$$

1. Exercício 79

Passo: ...

Se $1 \leq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor + 1 \leq p$ e $1 \leq \lceil \frac{p}{2} \rceil \leq p$, então, pela HI temos

$$\begin{aligned}C\left(\left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor + 1\right) &= \left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor, \text{ e} \\C\left(\left\lceil \frac{p}{2} \right\rceil\right) &= \left\lceil \frac{p}{2} \right\rceil - 1,\end{aligned}$$

e daí

$$C(p+1) = \left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor + \left\lceil \frac{p}{2} \right\rceil - 1 + 1 = p.$$

Base: Vamos provar que $C(p) = p - 1$ para todo $p \in \{1\}$.

Do Algoritmo Mínimo() temos que, se $p = 1$, então

$$C(1) = 0 = p - 1.$$

2. Exercício 83

O seguinte algoritmo devolve o n -ésimo termo da sequência de Fibonacci.

$F(n)$

Se $n \leq 1$

 Devolva n

Devolva $\mathbf{F}(n - 1) + \mathbf{F}(n - 2)$

Prove que o número de somas na execução de $F(n)$ é pelo menos $F(n)$, para todo $n \geq 2$.

2. Exercício 83

Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $S(n)$ o número de somas na execução de $F(n)$.

2. Exercício 83

Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $S(n)$ o número de somas na execução de $F(n)$.

Vamos provar por indução em n que $S(n) \geq F(n)$ para todo $n \geq 2$.

2. Exercício 83

Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $S(n)$ o número de somas na execução de $F(n)$.

Vamos provar por indução em n que $S(n) \geq F(n)$ para todo $n \geq 2$.

HI: Seja $a \in \mathbb{N}$ e $a \geq 2$ tal que

$$S(k) \geq F(k), \text{ para todo } k \in [2..a].$$

2. Exercício 83

Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $S(n)$ o número de somas na execução de $F(n)$.

Vamos provar por indução em n que $S(n) \geq F(n)$ para todo $n \geq 2$.

HI: Seja $a \in \mathbb{N}$ e $a \geq 2$ tal que

$$S(k) \geq F(k), \text{ para todo } k \in [2..a].$$

Passo: Vamos provar que $S(a+1) \geq F(a+1)$.

2. Exercício 83

Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $S(n)$ o número de somas na execução de $F(n)$.

Vamos provar por indução em n que $S(n) \geq F(n)$ para todo $n \geq 2$.

HI: Seja $a \in \mathbb{N}$ e $a \geq 2$ tal que

$$S(k) \geq F(k), \text{ para todo } k \in [2..a].$$

Passo: Vamos provar que $S(a+1) \geq F(a+1)$.

Do algoritmo temos que, se $a+1 \geq 2$, então

$$S(a+1) = S(a) + S(a-1) + 1,$$

2. Exercício 83

Passo: ...

Se $a - 1 \geq 2$, ou seja, $a + 1 \geq 4$, temos da HI

$$\begin{aligned} S(a) &\geq F(a), \text{ e} \\ S(a - 1) &\geq F(a - 1), \end{aligned}$$

2. Exercício 83

Passo: ...

Se $a - 1 \geq 2$, ou seja, $a + 1 \geq 4$, temos da HI

$$\begin{aligned} S(a) &\geq F(a), \text{ e} \\ S(a - 1) &\geq F(a - 1), \end{aligned}$$

e, portanto

$$S(a + 1) \geq F(a) + F(a - 1) + 1 \geq F(a + 1) + 1 > F(a + 1).$$

2. Exercício 83

Base: Vamos provar que

$$S(b) \geq F(b), \text{ para todo } b \in \{2, 3\}.$$

2. Exercício 83

Base: Vamos provar que

$$S(b) \geq F(b), \text{ para todo } b \in \{2, 3\}.$$

Basta verificar que

$$S(2) = 1 = F(2),$$

$$S(3) = 2 = F(3).$$

3. Exercício 84

- a) Combine as informações dos Exercícios 53, 76 e 78 para propor um algoritmo para o cálculo de $F(n)$.
- b) Dê uma expressão para o número $s(n)$ de somas efetuadas pelo seu algoritmo para calcular $F(n)$.
- c) Compare o resultado obtido com o número de somas efetuadas pelo algoritmo do Exercício 83.

3. Exercício 84.a Combine as informações dos Exercícios 53, 76 e 78 para propor um algoritmo para o cálculo de $F(n)$.

a) Do Exercício 53 temos que

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} F(n+1) & F(n) \\ F(n) & F(n-1) \end{pmatrix}, \text{ para todo } n > 0.$$

3. Exercício 84.a Combine as informações dos Exercícios 53, 76 e 78 para propor um algoritmo para o cálculo de $F(n)$.

a) Do Exercício 53 temos que

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} F(n+1) & F(n) \\ F(n) & F(n-1) \end{pmatrix}, \text{ para todo } n > 0.$$

O Exercício 78 propõe o Algoritmo $\text{Exp}(x, n)$ que computa o valor de x^n .

3. Exercício 84.a Combine as informações dos Exercícios 53, 76 e 78 para propor um algoritmo para o cálculo de $F(n)$.

a) Do Exercício 53 temos que

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} F(n+1) & F(n) \\ F(n) & F(n-1) \end{pmatrix}, \text{ para todo } n > 0.$$

O Exercício 78 propõe o Algoritmo $\text{Exp}(x, n)$ que computa o valor de x^n .
Combinando estas informações obtemos o seguinte algoritmo.

$F(n)$

Se $n \leq 1$

 Devolva n

$M \leftarrow \text{Exp}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, n\right)$

Devolva $M[1, 2]$

3. Exercício 84.b Dê uma expressão para o número $s(n)$ de somas efetuadas pelo seu algoritmo para calcular $F(n)$.

- b) Segue imediatamente do Exercício 78 que a execução de $F(n)$ executa exatamente $\lfloor \lg(n) \rfloor + b(n) + 1$ multiplicações sobre a matriz M , onde b é a função do Exercício 76.

3. Exercício 84.b Dê uma expressão para o número $s(n)$ de somas efetuadas pelo seu algoritmo para calcular $F(n)$.

- b) Segue imediatamente do Exercício 78 que a execução de $F(n)$ executa exatamente $\lfloor \lg(n) \rfloor + b(n) + 1$ multiplicações sobre a matriz M , onde b é a função do Exercício 76.

Cada multiplicação matricial efetuada, por sua vez, envolve 4 somas, de forma que

$$s(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n \leq 1, \\ 4(\lfloor \lg(n) \rfloor + b(n) + 1), & \text{se } n > 1. \end{cases}$$

3. Exercício 84.b Dê uma expressão para o número $s(n)$ de somas efetuadas pelo seu algoritmo para calcular $F(n)$.

- b) Segue imediatamente do Exercício 78 que a execução de $F(n)$ executa exatamente $\lfloor \lg(n) \rfloor + b(n) + 1$ multiplicações sobre a matriz M , onde b é a função do Exercício 76.

Cada multiplicação matricial efetuada, por sua vez, envolve 4 somas, de forma que

$$s(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n \leq 1, \\ 4(\lfloor \lg(n) \rfloor + b(n) + 1), & \text{se } n > 1. \end{cases}$$

Do Exercício 76, temos que

$$b(n) \leq \lfloor \lg n \rfloor + 1, \text{ para todo } n > 0,$$

e, consequentemente,

$$s(n) = 4(\lfloor \lg(n) \rfloor + b(n) + 1) \leq 4(\lfloor \lg(n) \rfloor + \lfloor \lg n \rfloor + 1 + 1) = 8 \lfloor \lg(n) \rfloor + 8,$$

para todo $n > 0$.

3. Exercício 84.c Compare o resultado obtido com o número de somas efetuadas pelo algoritmo do Exercício 83.

c) Do Exercício 83 temos que $S(n) \geq F(n)$ para todo $n \geq 2$.

3. Exercício 84.c Compare o resultado obtido com o número de somas efetuadas pelo algoritmo do Exercício 83.

- c) Do Exercício 83 temos que $S(n) \geq F(n)$ para todo $n \geq 2$.
Basta observar que $s(9) \leq 32 < F(9) = 34 \leq S(9)$.

3. Exercício 84.c Compare o resultado obtido com o número de somas efetuadas pelo algoritmo do Exercício 83.

- c) Do Exercício 83 temos que $S(n) \geq F(n)$ para todo $n \geq 2$.
Basta observar que $s(9) \leq 32 < F(9) = 34 \leq S(9)$.
Na verdade, $s(8) \leq 32 < S(8) = 33$.

3. Exercício 84.c Compare o resultado obtido com o número de somas efetuadas pelo algoritmo do Exercício 83.

- c) Do Exercício 83 temos que $S(n) \geq F(n)$ para todo $n \geq 2$.
Basta observar que $s(9) \leq 32 < F(9) = 34 \leq S(9)$.
Na verdade, $s(8) \leq 32 < S(8) = 33$.

Mais importante,

$$\lim \frac{s(n)}{S(n)} = 0,$$

ou seja, para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que

$$s(n) \leq \varepsilon S(n).$$

4. Exercício 87

Prove por indução em n que, se $0 \leq k \leq n$, então o seguinte algoritmo devolve $\frac{n!}{k!(n-k)!}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

$B(n, k)$

Se $k = 0$

 Devolva 1

Devolva $\frac{nB(n-1, k-1)}{k}$

4. Exercício 87

Vamos provar que se $0 \leq k \leq n$, então

$$B(n, k) = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

por indução em n .

4. Exercício 87

Vamos provar que se $0 \leq k \leq n$, então

$$B(n, k) = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

por indução em n .

HI: Seja $a \in \mathbb{N}$ tal que, se $k \in [0..m]$, então

$$B(m, k) = \frac{m!}{k!(m-k)!}, \text{ para todo } m \in [0..a].$$

4. Exercício 87

Passo: Vamos provar que se $k \in [0..a+1]$, então

$$B(a+1, k) = \frac{(a+1)!}{k!((a+1)-k)!}.$$

4. Exercício 87

Passo: Vamos provar que se $k \in [0..a+1]$, então

$$B(a+1, k) = \frac{(a+1)!}{k!((a+1)-k)!}.$$

Seja $k \in [0..a+1]$.

Se $k = 0$, então

$$B(a+1, k) = 1.$$

e

$$\frac{(a+1)!}{k!((a+1)-k)!} = \frac{(a+1)!}{(a+1)!} = 1,$$

de modo que

$$B(a+1, k) = \frac{(a+1)!}{k!((a+1)-k)!}.$$

4. Exercício 87

Passo: ...

Se $k > 0$, então

$$B(a+1, k) = \frac{a+1}{k} B((a+1) - 1, k - 1) = \frac{a+1}{k} B(a, k - 1),$$

e como $a \in [0..a]$, pela HI temos

$$B(a, k - 1) = \frac{a!}{(k - 1)!(a - (k - 1))!},$$

e daí,

$$B(a+1, k) = \frac{a+1}{k} \frac{a!}{(k - 1)!(a - (k - 1))!} = \frac{(a+1)!}{k!((a+1) - k)!}.$$

4. Exercício 87

Base: Basta verificar que

$$B(0, 0) = \frac{0!}{0!(0 - 0)!}$$

5. Exercício 85

Considere o seguinte algoritmo de ordenação, conhecido como “ordenação por inserção”.

Ordena(v, a, b)

Se $a \geq b$

 Devolva v

Ordena($v, a, b - 1$)

Insere(v, a, b)

Devolva v

onde ...

5. Exercício 85

onde

$\text{Insere}(v, a, b)$

$p \leftarrow \text{Busca}(v[b], v, a, b - 1)$

$i \leftarrow b$

Enquanto $i \geq p + 1$

$\text{Troca}(v, i, i - 1)$

$i \leftarrow i - 1$

Devolva v

$\text{Busca}(x, v, a, b)$ é o algoritmo do Exercício ??, e

$\text{Troca}(v, a, b)$ troca os valores de $v[a]$ e $v[b]$ entre si.

Use o resultado dos Exercícios 28 e 65 para estabelecer um limitante superior para o número de comparações na execução de $\text{Ordena}(v, a, a + n - 1)$ em função do valor de n .

5. Exercício 85

Fazendo

$B(n)$: número máximo de comparações na execução de $\text{Busca}(x, v, a, a + n - 1)$,

$I(n)$: número máximo de comparações na execução de $\text{Insere}(v, a, a + n - 1)$,

$O(n)$: número máximo de comparações na execução de $\text{Ordena}(v, a, a + n - 1)$,

temos, para $n > 1$,

$$O(n) = O(n - 1) + I(n),$$

e

$$I(n) = B(n).$$

5. Exercício 85

Então

$$\begin{aligned}O(n) &= O(n-1) + I(n) \\&= O(n-1) + B(n) = O(n-2) + B(n-1) + B(n) \\&= \dots \\&= O(n - (n-0)) + B(n - (n-1)) + B(n - (n-2)) + \dots + B(n-1) + B(n) \\&= O(0) + B(1) + B(2) + \dots + B(n-1) + B(n) \\&= O(0) + \sum_{i=1}^n B(i).\end{aligned}$$

5. Exercício 85

Do *Algoritmo* Ordena(v, a, b) temos que $O(0) = 0$ e do item anterior temos que

$$B(n) \leq \lfloor \lg n \rfloor + 1, \text{ para todo } n \geq 1,$$

de forma que

$$\begin{aligned} O(n) &\leq 0 + \sum_{i=1}^n (\lfloor \lg n \rfloor + 1) \\ &\stackrel{T5}{=} \sum_{i=1}^n \lfloor \lg i \rfloor + \sum_{i=1}^n 1 \stackrel{T4}{=} n + \sum_{i=1}^n \lfloor \lg i \rfloor \stackrel{\text{ex. 28}}{=} n + n \lfloor \lg n \rfloor - \left(2^{\lfloor \lg n \rfloor + 1} - \lfloor \lg n \rfloor - 2\right) \\ &= n \lfloor \lg n \rfloor + n + \lfloor \lg n \rfloor + 2 - 2^{\lfloor \lg n \rfloor + 1} \leq n \lfloor \lg n \rfloor + n + \lfloor \lg n \rfloor + 2 - n \\ &= n \lfloor \lg n \rfloor + \lfloor \lg n \rfloor + 2 \\ &= n \lfloor \lg n \rfloor \left(1 + \frac{\lfloor \lg n \rfloor + 2}{n \lfloor \lg n \rfloor}\right) \approx n \lfloor \lg n \rfloor \end{aligned}$$

5. Exercício 85

Como

$$1 + \frac{\lfloor \lg n \rfloor + 2}{n \lfloor \lg n \rfloor} \leq \frac{5}{2},$$

para todo $n \geq 2$, então

$$O(n) \leq \frac{5}{2} n \lfloor \lg n \rfloor, \text{ para todo } n \geq 2.$$

6. Exercício 49

Prove por indução em n que, dados $x, y \in \mathbb{C}$,

$$\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^i y^{n-i} = (x + y)^n,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ e $n > 0$ ¹.

Conclua a partir daí que

$$\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} = 2^n,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ e $n > 0$.

¹**Sugestão:** Use a definição de $\binom{n}{k}$ dada no Exercício 47

6. Exercício 49

Sejam $x, y \in \mathbb{C}$. Vamos provar que

$$\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^i y^{n-i} = (x + y)^n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

por indução em n .

6. Exercício 49

Sejam $x, y \in \mathbb{C}$. Vamos provar que

$$\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^i y^{n-i} = (x+y)^n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

por indução em n .

HI: Seja $a \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{i=0}^k \binom{k}{i} x^i y^{k-i} = (x+y)^k, \text{ para todo } k \in [0..a].$$

6. Exercício 49

Passo: Vamos provar que

$$\sum_{i=0}^{a+1} \binom{a+1}{i} x^i y^{a+1-i} = (x+y)^{a+1}.$$

6. Exercício 49

Passo: Vamos provar que

$$\sum_{i=0}^{a+1} \binom{a+1}{i} x^i y^{a+1-i} = (x+y)^{a+1}.$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{a+1} \binom{a+1}{i} x^i y^{a+1-i} &= \binom{a+1}{0} x^0 y^{a+1-0} + \sum_{i=1}^{a+1} \binom{a+1}{i} x^i y^{a+1-i} \\ &= x^0 y^{a+1} + \sum_{i=1}^{a+1} \left(\binom{a}{i} + \binom{a}{i-1} \right) x^i y^{a+1-i} \\ &= x^0 y^{a+1} + \sum_{i=1}^{a+1} \binom{a}{i} x^i y^{a+1-i} + \sum_{i=1}^{a+1} \binom{a}{i-1} x^i y^{a+1-i} \end{aligned}$$

6. Exercício 49

Passo: ...

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{a+1} \binom{a+1}{i} x^i y^{a+1-i} &= x^0 y^{a+1} + \sum_{i=1}^{a+1} \binom{a}{i} x^i y^{a+1-i} + \sum_{i=1}^{a+1} \binom{a}{i-1} x^i y^{a+1-i} \\&= \sum_{i=0}^{a+1} \binom{a}{i} x^i y^{a+1-i} + \sum_{i=0}^a \binom{a}{i} x^{i+1} y^{a+1-(i+1)} \\&= \sum_{i=0}^a \binom{a}{i} x^i y^{a+1-i} + \binom{a}{a+1} x^{a+1} y^{a+1-(a+1)} \\&\quad + x \sum_{i=0}^a \binom{a}{i} x^i y^{a-i} \\&= y \sum_{i=0}^a \binom{a}{i} x^i y^{a-i} + x \sum_{i=0}^a \binom{a}{i} x^i y^{a-i}.\end{aligned}$$

6. Exercício 49

Passo: ...

Como $a \in [0..a]$, pela HI temos

$$\sum_{i=0}^a \binom{a}{i} x^i y^{a-i} = (x + y)^a,$$

e daí

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{a+1} \binom{a+1}{i} x^i y^{a+1-i} &= y(x + y)^a + x(x + y)^a \\ &= (y + x)(x + y)^a = (x + y)^{a+1}. \end{aligned}$$

6. Exercício 49

Base: Basta provar que

$$(x + y)^1 = \sum_{i=0}^1 \binom{1}{i} x^i y^{1-i}.$$

Por um lado, temos que

$$\sum_{i=0}^1 \binom{1}{i} x^i y^{0-i} = \binom{1}{0} x^0 y^{1-0} + \binom{1}{1} x^1 y^{1-1} = y + x = (x + y),$$

por outro, temos que

$$(x + y)^1 = (x + y).$$

6. Exercício 49

Finalmente, para concluir que

$$\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} = 2^n,$$

basta tomar $x = y = 1$, e então

$$\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} 1^i 1^{n-i} = (1 + 1)^n.$$

e portanto

$$\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} = 2^n.$$

7. Exercício 61

Prove, por indução em $|X|$ que, se $f, g: A \rightarrow \mathbb{C}$ e $X \subseteq A$ é um conjunto finito, então

$$\sum_{x \in X} (f(x) + g(x)) = \sum_{x \in X} f(x) + \sum_{x \in X} g(x).$$

7. Exercício 61

Sejam $f, g: A \rightarrow \mathbb{C}$. Vamos provar que

$$\sum_{x \in X} (f(x) + g(x)) = \sum_{x \in X} f(x) + \sum_{x \in X} g(x), \text{ para todo } X \subseteq A,$$

por indução em $|X|$.

7. Exercício 61

Sejam $f, g: A \rightarrow \mathbb{C}$. Vamos provar que

$$\sum_{x \in X} (f(x) + g(x)) = \sum_{x \in X} f(x) + \sum_{x \in X} g(x), \text{ para todo } X \subseteq A,$$

por indução em $|X|$.

HI: Seja $a \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{x \in X} (f(x) + g(x)) = \sum_{x \in X} f(x) + \sum_{x \in X} g(x), \text{ para todo } X \subseteq A \mid |X| \in [0..a]$$

7. Exercício 61

Passo: Vamos provar que

$$\sum_{x \in X} (f(x) + g(x)) = \sum_{x \in X} f(x) + \sum_{x \in X} g(x), \text{ para todo } X \subseteq A \mid |X| = a+1.$$

7. Exercício 61

Passo: Vamos provar que

$$\sum_{x \in X} (f(x) + g(x)) = \sum_{x \in X} f(x) + \sum_{x \in X} g(x), \text{ para todo } X \subseteq A \mid |X| = a+1.$$

Seja $X \subseteq A$ tal que $|X| = a + 1$.

Como $a + 1 > 0$, então $X \neq \emptyset$ e existe $y \in X$ de forma que

$$\sum_{x \in X} (f(x) + g(x)) = \sum_{x \in X - \{y\}} (f(x) + g(x)) + (f(y) + g(y)).$$

7. Exercício 61

Passo: Vamos provar que

$$\sum_{x \in X} (f(x) + g(x)) = \sum_{x \in X} f(x) + \sum_{x \in X} g(x), \text{ para todo } X \subseteq A \mid |X| = a+1.$$

Seja $X \subseteq A$ tal que $|X| = a + 1$.

Como $a + 1 > 0$, então $X \neq \emptyset$ e existe $y \in X$ de forma que

$$\sum_{x \in X} (f(x) + g(x)) = \sum_{x \in X - \{y\}} (f(x) + g(x)) + (f(y) + g(y)).$$

Como $|X - \{y\}| = |X| - 1 = (a + 1) - 1 = a \in [0..a]$, temos da HI que

$$\sum_{x \in X - \{y\}} (f(x) + g(x)) = \sum_{x \in X - \{y\}} f(x) + \sum_{x \in X - \{y\}} g(x),$$

7. Exercício 61

Passo: ...

e daí,

$$\begin{aligned}\sum_{x \in X} (f(x) + g(x)) &= \sum_{x \in X - \{y\}} f(x) + \sum_{x \in X - \{y\}} g(x) + (f(y) + g(y)) \\ &= \sum_{x \in X - \{y\}} f(x) + f(y) + \sum_{x \in X - \{y\}} g(x) + g(y) \\ &= \sum_{x \in X} f(x) + \sum_{x \in X} g(x),\end{aligned}$$

7. Exercício 61

Base: Vamos provar que

$$\sum_{x \in X} (f(x) + g(x)) = \sum_{x \in X} f(x) + \sum_{x \in X} g(x), \text{ para todo } X \subseteq A \mid |X| = 0.$$

Se $|X| = 0$, então $X = \emptyset$ e

$$\sum_{x \in X} (f(x) + g(x)) = 0,$$

e

$$\sum_{x \in X} f(x) + \sum_{x \in X} g(x) = 0 + 0 = 0.$$

8. Exercício ??

Prove por indução que qualquer valor maior ou igual a 4 reais pode ser obtido somente com cédulas de 2 e 5 reais.

8. Exercício ??

Um valor n pode ser obtido com cédulas de 2 e 5 reais se e somente se existem $d_n, c_n \in \mathbb{N}$ tais que

$$n = 2d_n + 5c_n.$$

8. Exercício ??

Um valor n pode ser obtido com cédulas de 2 e 5 reais se e somente se existem $d_n, c_n \in \mathbb{N}$ tais que

$$n = 2d_n + 5c_n.$$

Vamos provar que, para todo $n \geq 4$, existem $d_n, c_n \in \mathbb{N}$ tais que

$$n = 2d_n + 5c_n,$$

por indução em n .

8. Exercício ??

Um valor n pode ser obtido com cédulas de 2 e 5 reais se e somente se existem $d_n, c_n \in \mathbb{N}$ tais que

$$n = 2d_n + 5c_n.$$

Vamos provar que, para todo $n \geq 4$, existem $d_n, c_n \in \mathbb{N}$ tais que

$$n = 2d_n + 5c_n,$$

por indução em n .

HI: Seja $a \in \mathbb{N}$ e $a \geq 4$ tal que existem $d_k, c_k \in \mathbb{N}$ tais que

$$k = 2d_k + 5c_k, \text{ para todo } k \in [4..a].$$

8. Exercício ??

Passo: Vamos provar que existem $d_{a+1}, c_{a+1} \in \mathbb{N}$ tais que

$$a + 1 = 2d_{a+1} + 5c_{a+1}.$$

8. Exercício ??

Passo: Vamos provar que existem $d_{a+1}, c_{a+1} \in \mathbb{N}$ tais que

$$a + 1 = 2d_{a+1} + 5c_{a+1}.$$

Como $a \in [4..a]$, então, pela HI, existem $d_a, c_a \in \mathbb{N}$ tais que

$$a = 2d_a + 5c_a.$$

8. Exercício ??

Passo: ...

Se $c_a > 0$, então podemos fazer

$$d_{a+1} := d_a + 3, \text{ e}$$

$$c_{a+1} := c_a - 1,$$

e daí

$$2d_{a+1} + 5c_{a+1} = 2(d_a + 3) + 5(c_a - 1) = 2d_a + 5c_a + 1 = a + 1.$$

8. Exercício ??

Passo: ...

Se, por outro lado, $c_a = 0$, então, como $a \geq 4$, temos $d_a \geq 2$ e podemos fazer

$$d_{a+1} := d_a - 2, \text{ e}$$

$$c_{a+1} := 1,$$

e daí

$$2d_{a+1} + 5c_{a+1} = 2(d_a - 2) + 5(1) = 2d_a + 1 = a + 1.$$

8. Exercício ??

Base: Basta fazer

$$d_4 := 2, \text{ e}$$

$$c_4 := 0,$$

e temos

$$4 = 2d_4 + 5c_4 = 2(2) + 5(0) = 4.$$