

Matemática Discreta

Primeira Prova

7 de junho de 2021

Instruções

As respostas devem ser enviadas como um arquivo pdf anexo a uma mensagem de e-mail.

1. A mensagem deve ser enviada até as 17h30 para renato.carmo.rc@gmail.com (turma A) ou menottid@gmail.com (turma B).
2. O Subject: da mensagem deve ser “CI1237: Prova 1”;
3. Quanto ao arquivo pdf anexo à mensagem,
 - (a) o nome do arquivo deve ser seu “login” na rede do Departamento de Informática (por exemplo, `jbas18.pdf`);
 - (b) as respostas devem estar na mesma ordem das questões/ítems;
 - (c) a resposta de cada questão/item deve iniciar uma página nova;
 - (d) a resposta de cada questão/item pode ocupar várias páginas;
 - (e) por favor,
 - i. escreva com clareza, bom contraste e boa letra;
 - ii. cuide para que a fotografia/”scan” seja feita paralela à superfície do papel.

Durante o período de prova o Professor Menotti estará em <https://meet.google.com/djw-vfmg-jmv> para esclarecer eventuais dúvidas.

Boa prova.

1. Prove que não é verdade que:

- (a) (10 pontos) $\sum_{i=1}^n \lfloor f(i) \rfloor \approx \sum_{i=1}^n f(i)$, para todo $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$.
- (b) (10 pontos) $\lg n \approx \log n$.

2. Considere o seguinte algoritmo para computar o quadrado de um inteiro n .

$S(n)$
Se $n = 0$ Devolva 0 $q \leftarrow S(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor)$ $q \leftarrow q + q + q + q$ Se n é ímpar $q \leftarrow q + n + n - 1$ Devolva q

- (a) (25 pontos) Prove que o algoritmo está correto¹, isto é, que $S(n) = n^2$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
- (b) (25 pontos) Prove que o número de somas e subtrações efetuadas na execução de $S(n)$ é no máximo $6(\lfloor \lg n \rfloor + 1)$, para todo $n \geq 1$.

3. (30 pontos) Para cada $n \geq 1$, Seja p_n o n -ésimo número primo (por exemplo, $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$). Prove que² $p_n \leq 2^{2^{n-1}}$ para todo $n \geq 1$.

¹**Sugestão:** Estude separadamente os casos em que n é par ou ímpar.

²**Sugestão:** Use o fato de que $p_{n+1} \leq 1 + \prod_{i=1}^n p_i$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

1. (a) Para $f(n) = 1/2$ temos $\sum_{i=1}^n \lfloor f(n) \rfloor = 0$ e $\sum_{i=1}^n f(n) = n/2$, e daí,

$$\lim \frac{\sum_{i=1}^n \lfloor f(n) \rfloor}{\sum_{i=1}^n f(n)} = \frac{\lim \sum_{i=1}^n \lfloor f(n) \rfloor}{\lim \sum_{i=1}^n f(n)} = \frac{0}{n/2} = 0 \neq 1.$$

- (b) Como

$$\frac{\lg n}{\log n} = \frac{\lg n}{\lg n / \lg 10} = \lg 10 \frac{\lg n}{\lg n} = \lg 10,$$

Então

$$\lim \frac{\lg n}{\log n} \neq 1.$$

2.

- (a)

HI: Seja $a \in \mathbb{N}$ tal que

$$S(k) = k^2, \text{ para todo } k \in [0..a].$$

Passo: Vamos provar que $S(a+1) = (a+1)^2$.

Se $a+1$ é par, temos do algoritmo que

$$S(a+1) = 4S\left(\left\lfloor \frac{a}{2} \right\rfloor\right) = 4S\left(\frac{a}{2}\right) \stackrel{\text{HI}}{=} 4\left(\frac{a}{2}\right)^2 = 4\frac{a^2}{4} = a^2.$$

Se $a+1$ é ímpar, temos

$$\begin{aligned} S(a+1) &= 4S\left(\left\lfloor \frac{a}{2} \right\rfloor\right) + 2a - 1 = 4S\left(\frac{a-1}{2}\right) + 2a - 1 \stackrel{\text{HI}}{=} 4\left(\frac{a-1}{2}\right)^2 + 2a - 1 \\ &= 4\frac{a^2 - 2a + 1}{4} + 2a - 1 = a^2 - 2a + 1 +$$

Passo: Vamos provar que $s(a+1) \leq 6(\lfloor \lg(a+1) \rfloor + 1)$

Do algoritmo temos

$$\begin{aligned} s(a+1) &\leq s\left(\left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor\right) + 6 \stackrel{\text{HI}}{\leq} 6\left(\left\lfloor \lg \left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor \right\rfloor + 1\right) + 6 \\ &= 6\left(\left\lfloor \lg \left(\frac{a+1}{2}\right) \right\rfloor + 1\right) + 6 = 6(\lfloor \lg(a+1) \rfloor - 1 + 1) + 6 \\ &= 6(\lfloor \lg(a+1) \rfloor) + 6 = 6(\lfloor \lg(a+1) \rfloor + 1). \end{aligned}$$

Base: Vamos provar que $s(k) \leq 6(\lfloor \lg k \rfloor + 1)$ para todo $k \in \{1\}$.

Basta verificar que

$$s(1) = 6 = 6(\lfloor \lg 1 \rfloor + 1).$$

3. **HI:** Seja $a \geq 1$ tal que

$$p_k \leq 2^{2^{k-1}}, \text{ para todo } k \in [1..a].$$

Passo: Vamos provar que

$$p_{a+1} \leq 2^{2^{(a+1)-1}} = 2^{2^a}.$$

De acordo com a sugestão, temos

$$p_{a+1} \leq 1 + \prod_{i=1}^a p_i \stackrel{\text{HI}}{\leq} 1 + \prod_{i=1}^a 2^{2^{i-1}} \leq 1 + \prod_{i=0}^{a-1} 2^{2^i} = 1 + 2^{\sum_{i=0}^{a-1} 2^i} = 1 + 2^{2^a - 1} \leq 2^{2^a}.$$

Base: Vamos provar que

$$p_k \leq 2^{2^{k-1}}, \text{ para todo } k \in \{1\}.$$

Basta verificar que $p_1 = 2$ e que