Matemática Discreta

Segunda Prova

5 de julho de 2021

Instruções

As respostas devem ser enviadas como um arquivo pdf anexo a uma mensagem de e-mail.

1. A mensagem deve ser **enviada** até as 17h30 para renato.carmo.rc@gmail.com (turma A) ou menottid@gmail.com (turma B).

2. O Subject: da mensagem deve ser "`CI1237: Prova 2`";

3. Quanto ao arquivo pdf anexo à mensagem,

   (a) o nome do arquivo deve ser seu "login" na rede do Departamento de Informática (por exemplo, `jbas18.pdf`);

   (b) O arquivo pode ser produzido digitalmente com LaTeX ou qualquer outro software, ou pode ser uma série de fotos de folhas manuscritas;

   (c) as respostas devem estar na mesma ordem das questões;

   (d) a resposta de cada questão deve iniciar uma página nova;

   (e) a resposta de cada questão pode ocupar várias páginas;

   (f) em cada questão, apresente o raciocínio que conduz à solução;

   (g) caso o arquivo seja produzido a partir de fotos de folhas manuscritas,

      i. escreva com clareza, bom contraste e boa letra;

      ii. cuide para que a fotografia/"scan" seja feita paralela à superfície do papel.

Durante o período de prova o Professor Menotti estará em https://meet.google.com/djw-vfmg-jmv para esclarecer eventuais dúvidas.

Você pode usar todos os resultados já vistos na disciplina como **lemas, teoremas e corolários** (inclusive aqueles cujas demonstrações são deixadas como exercícios) **sem necessidade de prová-los**: basta enunciá-los.

Você pode consultar o material online da disciplina (notas de aula, slides etc) mas não pode comunicar-se com os colegas até as 17h30.

Boa prova.

1. (25 pontos) Resolva a seguinte recorrência.

$$f(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n \leq 3, \\ 2f\left(\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor\right) + n - 3, & \text{para todo } n \geq 4. \end{cases}$$

2. (25 pontos) Resolva a seguinte recorrência.

$$f(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n \leq 2, \\ 6f(n-1) - 11f(n-2) + 6f(n-3), & \text{se } n \geq 3. \end{cases}$$

3. (25 pontos) Resolva a seguinte recorrência.

$$f(n) = \begin{cases} n^3, & \text{se } n \leq 2, \\ 12f(n-1) - 35f(n-2) + 5^n, & \text{se } n > 2. \end{cases}$$

4. (25 pontos) Dê uma expressão livre de somatórios para

$$\sum_{i=0}^{n} 2i^2 5^i.$$

==

1.

$$f(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n \leq 3. \\ 2f\left(\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor\right) + n - 3, & \text{para todo } n \geq 4. \end{cases}$$

Temos

$$f(n) = m(n)f(h(n)) + s(n), \text{ para todo } n \geq n_0,$$

onde

$$\begin{aligned} h(n) &= \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor, \\ m(n) &= 2, \\ s(n) &= n - 3, \\ n_0 &= 4, \end{aligned}$$

e, portanto,

$$h^k(n) = \left\lfloor \frac{n}{4^k} \right\rfloor,$$

e

$$h^k(n) < n_0,$$

se e somente se

$$\left\lfloor \frac{n}{4^k} \right\rfloor < 4,$$

ou seja,

$$\frac{n}{4^k} < 4,$$

isto é,

$$4^{k+1} > n,$$

ou seja

$$k > \log_4 n - 1$$

e

$$u = \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid h^k(n) < n_0\right\} = \lfloor \log_4 n - 1 \rfloor + 1 = \lfloor \log_4 n \rfloor - 1 + 1 = \lfloor \log_4 n \rfloor$$

Então

$$\begin{aligned}
f(n) &= f(h^u(n)) \prod_{i=0}^{u-1} m(h^i(n)) + \sum_{i=0}^{u-1} s(h^i(n)) \prod_{j=0}^{i-1} m(h^j(n)) \\
&= f\left(\left\lfloor \frac{n}{4^{\lfloor \log_4 n \rfloor}} \right\rfloor\right) \prod_{i=0}^{\lfloor \log_4 n \rfloor - 1} 2 + \sum_{i=0}^{\lfloor \log_4 n \rfloor - 1} s\left(\left\lfloor \frac{n}{4^i} \right\rfloor\right) \prod_{j=0}^{i-1} 2 \\
&= f\left(\left\lfloor \frac{n}{4^{\lfloor \log_4 n \rfloor}} \right\rfloor\right) 2^{\lfloor \log_4 n \rfloor} + \sum_{i=0}^{\lfloor \log_4 n \rfloor - 1} 2^i \left(\left\lfloor \frac{n}{4^i} \right\rfloor - 3\right) \\
&= 2^{\lfloor \log_4 n \rfloor} f\left(\left\lfloor \frac{n}{4^{\lfloor \log_4 n \rfloor}} \right\rfloor\right) + \sum_{i=0}^{\lfloor \log_4 n \rfloor - 1} 2^i \left\lfloor \frac{n}{4^i} \right\rfloor - 3 \sum_{i=0}^{\lfloor \log_4 n \rfloor - 1} 2^i \\
&= 2^{\lfloor \log_4 n \rfloor} f\left(\left\lfloor \frac{n}{4^{\lfloor \log_4 n \rfloor}} \right\rfloor\right) + \sum_{i=0}^{\lfloor \log_4 n \rfloor - 1} 2^i \left\lfloor \frac{n}{4^i} \right\rfloor - 2^{\lfloor \log_4 n \rfloor + 1} + 3 \\
&= 2^{\lfloor \log_4 n \rfloor} f\left(\left\lfloor \frac{n}{4^{\lfloor \log_4 n \rfloor}} \right\rfloor\right) + \sum_{i=0}^{\lfloor \log_4 n \rfloor - 1} 2^i \left\lfloor \frac{n}{4^i} \right\rfloor - 2^{\lfloor \log_4 n \rfloor + 1} + 3 \\
&= 2^{\lfloor \log_4 n \rfloor} \left(f\left(\left\lfloor \frac{n}{4^{\lfloor \log_4 n \rfloor}} \right\rfloor\right) - 2\right) + \sum_{i=0}^{\lfloor \log_4 n \rfloor - 1} 2^i \left\lfloor \frac{n}{4^i} \right\rfloor + 3.
\end{aligned}$$

Como

$$\frac{n}{4^{log_4 n}} = 1 \leq \frac{n}{4^{\lfloor \log_4 n \rfloor}} < 2 = \frac{n}{4^{log_4 n/2}},$$

vem que

$$\left\lfloor \frac{n}{4^{\lfloor \log_4 n \rfloor}} \right\rfloor = 1.$$

Então,

$$\begin{aligned}
f(n) &= 2^{\lfloor \log_4 n \rfloor} \left(f\left(\left\lfloor \frac{n}{4^{\lfloor \log_4 n \rfloor}} \right\rfloor\right) - 2\right) + \sum_{i=0}^{\lfloor \log_4 n \rfloor - 1} 2^i \left\lfloor \frac{n}{4^i} \right\rfloor + 3 \\
&= 2^{\lfloor \log_4 n \rfloor}(f(1) - 2) + \sum_{i=0}^{\lfloor \log_4 n \rfloor - 1} 2^i \left\lfloor \frac{n}{4^i} \right\rfloor + 3 \\
&= \sum_{i=0}^{\lfloor \log_4 n \rfloor - 1} 2^i \left\lfloor \frac{n}{4^i} \right\rfloor - 2^{\lfloor \log_4 n \rfloor} + 3.
\end{aligned}$$

2. $f(n)$ satisfaz uma RLH cujo PC é

$$X^3 - 6X^2 + 11X - 6 = (X-1)(X-2)(X-3)$$

e

$$f(n) = a1^n + b2^n + c3^n = a + b2^n + c3^n.$$

Os coeficientes a, b e c são dados por

$$\begin{array}{rcl} f(0) & = & a + b2^0 + c3^0, \\ f(1) & = & a + b2^1 + c3^1, \\ f(2) & = & a + b2^2 + c3^2, \end{array}$$

ou seja

$$\begin{array}{rcl} (1)\ 0 & = & a + b + c, \\ (2)\ 1 & = & a + 2b + 3c, \\ (3)\ 2 & = & a + 4b + 9c, \end{array}$$

fazendo (2)-(1) e (3)-(1), vem que,

$$\begin{array}{rcl} 1 & = & b + 2c, \\ 2 & = & 3b + 8c, \end{array}$$

ou seja

$$\begin{array}{rcl} (4)\ 3 & = & 3b + 6c, \\ (5)\ 2 & = & 3b + 8c, \end{array}$$

fazendo (4)-(5), vem que,

$$c = -\frac{1}{2},$$

e substituindo $c = -\frac{1}{2}$ em (1) e (2), vem que

$$\begin{array}{rcl} (6)\ \dfrac{1}{2} & = & a + b, \\ (7)\ \dfrac{5}{2} & = & a + 2b, \end{array}$$

fazendo (7)-(6), vem que

$$b = 2,$$

e então

$$a = -\frac{3}{2}$$

Portanto

$$f(n) = a1^n + b2^n + c3^n = -\frac{3}{2} + 2.2^n - \frac{1}{2}.3^n = 2^{n+1} - \frac{3^n}{2} - \frac{3}{2}, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

3. Usando a notação do Teorema **??** temos

$$\begin{aligned} a_1 &= 12, \\ a_2 &= -35, \\ g(n) &= 5^n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Como

$$g(n) = 5g(n-1), \text{ para todo } n > 0,$$

então g satisfaz uma RLH cujo polinômio característico é

$$G = (X - 5)$$

Pelo Teorema **??** temos que f pertence ao espaço vetorial cujo polinômio característico é

$$G(X^2 - 12X + 35) = (X-5)(X-5)(X-7) = (X-5)^2(X-7),$$

e, portanto, pelo Corolário **??**, temos

$$f(n) = a5^n + bn5^n + c7^n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

onde $\{a, b, c\}$ é a solução do sistema

$$f(t) = a5^t + bt5^t + c7^t, 0 \leq t < 3,$$

isto é,

$$\begin{aligned} f(0) &= a5^0 + b(0)5^0 + c7^0, \\ f(1) &= a5^1 + b(1)5^1 + c7^1, \\ f(2) &= a5^2 + b(2)5^2 + c7^2. \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} 0 &= a + c, \\ 1 &= 5a + 5b + 7c, \\ 8 &= 25a + 50b + 49c, \end{aligned}$$

e portanto

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{2}, \\ b &= \frac{2}{5}, \\ c &= -\frac{1}{2}, \end{aligned}$$

temos

$$f(n) = -\frac{1}{2}5^n + \frac{2}{5}n5^n - \frac{1}{2}7^n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

4.
$$\sum_{i=0}^{n} 2i^2 5^i.$$

Usando a notação do Corolário **??** temos

$$s(n) = \sum_{i=0}^{n} g(i),$$

com
$$g(n) = n^2 5^n.$$

Como
$$g(n) = n^{2} 5^n$$

podemos concluir que a função s satisfaz uma recorrência linear homogênea cujo polinômio característico é $(X-1)(X-5)^{2+1} = (X-1)(X-5)^3$.

Pelo Teorema **??**, temos

$$s(n) = a1^n + bn^0 5^n + cn^1 5^n + dn^2 5^n = a + b5^n + cn5^n + dn^2 5^n,$$

onde (a, b, c, d) é dado pela solução do sistema

$$\begin{aligned}
s(0) &= a + b5^0 + c.0.5^0 + d.0^2.5^0, \\
s(1) &= a + b5^1 + c.1.5^1 + d.1^2.5^1, \\
s(2) &= a + b5^2 + c.2.5^2 + d.2^2.5^2, \\
s(3) &= a + b5^3 + c.3.5^3 + d.3^2.5^3,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0 &= a + b + 0c + 0d, \\
10 &= a + 5b + 5c + 5d, \\
210 &= a + 25b + 50c + 100d, \\
2460 &= a + 125b + 375c + 1125d,
\end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned}
s(n) &= a + b5^n + cn5^n + dn^2 5^n \\
&= -\frac{15}{16} + \frac{15}{16}5^n - \frac{5}{4}n5^n + \frac{5}{2}n^2 5^n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$