

Matemática Discreta

Unidade 2: Predicados e Quantificadores

Renato Carmo
David Menotti

Departamento de Informática da UFPR

Segundo Período Especial de 2020

Predicados

Predicado: “proposição parametrizada”

Predicados

Predicado: “proposição parametrizada”

$$P(x): x \leq x^2$$

Predicados

Predicado: “proposição parametrizada”

$$P(x): x \leq x^2$$

x : **variável livre** do predicado

Predicados

Predicado: “proposição parametrizada”

$$P(x): x \leq x^2$$

x : **variável livre** do predicado

Predicados não são verdadeiros nem falsos

Predicados

Predicado: “proposição parametrizada”

$$P(x): x \leq x^2$$

x : **variável livre** do predicado

Predicados não são verdadeiros nem falsos

Predicados podem ter várias variáveis livres

Predicados

Predicado: “proposição parametrizada”

$$P(x): x \leq x^2$$

x : **variável livre** do predicado

Predicados não são verdadeiros nem falsos

Predicados podem ter várias variáveis livres

$$Q(x, y): x \leq y^2.$$

Predicados

Predicado: “proposição parametrizada”

$$P(x): x \leq x^2$$

x : **variável livre** do predicado

Predicados não são verdadeiros nem falsos

Predicados podem ter várias variáveis livres

$$Q(x, y): x \leq y^2.$$

variáveis livres “especificadas” (“instanciadas”) $\longrightarrow$ proposição

Exercício 3

$$\begin{aligned}P(x) &: x \leq x^2, \\Q(x, y) &: x \leq y^2.\end{aligned}$$

Exercício 3

$$\begin{aligned}P(x) &: x \leq x^2, \\Q(x, y) &: x \leq y^2.\end{aligned}$$

1. $P(2)$

Exercício 3

$$\begin{aligned}P(x) &: x \leq x^2, \\Q(x, y) &: x \leq y^2.\end{aligned}$$

1. $P(2)$ é a proposição " $2 \leq 2^2$ "

Exercício 3

$$\begin{aligned}P(x) &: x \leq x^2, \\Q(x, y) &: x \leq y^2.\end{aligned}$$

1. $P(2)$ é a proposição " $2 \leq 2^2$ "

verdadeira

Exercício 3

$$\begin{aligned}P(x) &: x \leq x^2, \\Q(x, y) &: x \leq y^2.\end{aligned}$$

1. $P(2)$ é a proposição " $2 \leq 2^2$ "

verdadeira

2. $P(1/2)$

Exercício 3

$$\begin{aligned}P(x) &: x \leq x^2, \\Q(x, y) &: x \leq y^2.\end{aligned}$$

1. $P(2)$ é a proposição " $2 \leq 2^2$ "

verdadeira

2. $P(1/2)$ é a proposição " $1/2 \leq (1/2)^2$ "

Exercício 3

$$\begin{aligned}P(x) &: x \leq x^2, \\Q(x, y) &: x \leq y^2.\end{aligned}$$

1. $P(2)$ é a proposição " $2 \leq 2^2$ " verdadeira
2. $P(1/2)$ é a proposição " $1/2 \leq (1/2)^2$ " falsa

Exercício 3

$$\begin{aligned}P(x) &: x \leq x^2, \\Q(x, y) &: x \leq y^2.\end{aligned}$$

1. $P(2)$ é a proposição " $2 \leq 2^2$ " verdadeira
2. $P(1/2)$ é a proposição " $1/2 \leq (1/2)^2$ " falsa
3. $Q(1, 1)$

Exercício 3

$$\begin{aligned}P(x) &: x \leq x^2, \\Q(x, y) &: x \leq y^2.\end{aligned}$$

1. $P(2)$ é a proposição " $2 \leq 2^2$ " verdadeira
2. $P(1/2)$ é a proposição " $1/2 \leq (1/2)^2$ " falsa
3. $Q(1, 1)$ é a proposição " $1 \leq 1^2$ ".

Exercício 3

$$\begin{aligned}P(x) &: x \leq x^2, \\Q(x, y) &: x \leq y^2.\end{aligned}$$

1. $P(2)$ é a proposição " $2 \leq 2^2$ " verdadeira
2. $P(1/2)$ é a proposição " $1/2 \leq (1/2)^2$ " falsa
3. $Q(1, 1)$ é a proposição " $1 \leq 1^2$ ". verdadeira

Exercício 3

$$\begin{aligned}P(x) &: x \leq x^2, \\Q(x, y) &: x \leq y^2.\end{aligned}$$

1. $P(2)$ é a proposição " $2 \leq 2^2$ " verdadeira
2. $P(1/2)$ é a proposição " $1/2 \leq (1/2)^2$ " falsa
3. $Q(1, 1)$ é a proposição " $1 \leq 1^2$ ". verdadeira
4. $Q(1, t)$

Exercício 3

$$\begin{aligned}P(x) &: x \leq x^2, \\Q(x, y) &: x \leq y^2.\end{aligned}$$

1. $P(2)$ é a proposição " $2 \leq 2^2$ " verdadeira
2. $P(1/2)$ é a proposição " $1/2 \leq (1/2)^2$ " falsa
3. $Q(1, 1)$ é a proposição " $1 \leq 1^2$ ". verdadeira
4. $Q(1, t)$ não é uma proposição

Exercício 3

$$P(x) : x \leq x^2,$$

$$Q(x, y) : x \leq y^2.$$

1. $P(2)$ é a proposição " $2 \leq 2^2$ " verdadeira
2. $P(1/2)$ é a proposição " $1/2 \leq (1/2)^2$ " falsa
3. $Q(1, 1)$ é a proposição " $1 \leq 1^2$ ". verdadeira
4. $Q(1, t)$ não é uma proposição
 $Q(1, t)$ é o predicado " $1 \leq t^2$ "

Quantificadores

$P(x)$: predicado

X : conjunto

$P(x)$, para todo $x \in X$ é uma proposição

Quantificadores

$P(x)$: predicado

X : conjunto

$P(x)$, para todo $x \in X$ é uma proposição

quantificação universal de P em X

Quantificadores

$P(x)$: predicado

X : conjunto

$P(x)$, para todo $x \in X$ é uma proposição **quantificação universal de P em X**

“ $P(x)$, para todo $x \in X$ ” é uma proposição verdadeira quando

Quantificadores

$P(x)$: predicado

X : conjunto

$P(x)$, para todo $x \in X$ é uma proposição **quantificação universal de P em X**

“ $P(x)$, para todo $x \in X$ ” é uma proposição verdadeira quando
 $P(\bar{x})$ for verdadeira para todo elemento $\bar{x} \in X$

Quantificadores

$P(x)$: predicado

X : conjunto

$P(x)$, para todo $x \in X$ é uma proposição **quantificação universal de P em X**

“ $P(x)$, para todo $x \in X$ ” é uma proposição verdadeira quando
 $P(\bar{x})$ for verdadeira para todo elemento $\bar{x} \in X$

$P(x)$, para algum $x \in X$ é uma proposição

Quantificadores

$P(x)$: predicado

X : conjunto

$P(x)$, para todo $x \in X$ é uma proposição **quantificação universal de P em X**

“ $P(x)$, para todo $x \in X$ ” é uma proposição verdadeira quando
 $P(\bar{x})$ for verdadeira para todo elemento $\bar{x} \in X$

$P(x)$, para algum $x \in X$ é uma proposição **quantificação existencial de P em X**

Quantificadores

$P(x)$: predicado

X : conjunto

$P(x)$, para todo $x \in X$ é uma proposição **quantificação universal de P em X**

“ $P(x)$, para todo $x \in X$ ” é uma proposição verdadeira quando
 $P(\bar{x})$ for verdadeira para todo elemento $\bar{x} \in X$

$P(x)$, para algum $x \in X$ é uma proposição **quantificação existencial de P em X**

“ $P(x)$, para algum $x \in X$ ” é uma proposição verdadeira quando

Quantificadores

$P(x)$: predicado

X : conjunto

$P(x)$, para todo $x \in X$ é uma proposição **quantificação universal de P em X**

“ $P(x)$, para todo $x \in X$ ” é uma proposição verdadeira quando
 $P(\bar{x})$ for verdadeira para todo elemento $\bar{x} \in X$

$P(x)$, para algum $x \in X$ é uma proposição **quantificação existencial de P em X**

“ $P(x)$, para algum $x \in X$ ” é uma proposição verdadeira quando
 $P(\bar{x})$ for verdadeira para algum elemento $\bar{x} \in X$

Exercício 4

$$P(x): "x \leq x^2"$$

Exercício 4

$$P(x): "x \leq x^2"$$

1. $P(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$

Exercício 4

$$P(x): "x \leq x^2"$$

1. $P(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$ é uma proposição falsa

Exercício 4

$$P(x): "x \leq x^2"$$

1. $P(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$ é uma proposição falsa porque $\frac{1}{2} \in X$

Exercício 4

$$P(x): "x \leq x^2"$$

1. $P(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$ é uma proposição falsa porque $\frac{1}{2} \in X$ e $P\left(\frac{1}{2}\right)$

Exercício 4

$$P(x): "x \leq x^2"$$

1. $P(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$ é uma proposição falsa porque $\frac{1}{2} \in X$ e $P\left(\frac{1}{2}\right)$ é a proposição $\frac{1}{2} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^2$

Exercício 4

$$P(x): "x \leq x^2"$$

1. $P(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$ é uma proposição falsa porque $\frac{1}{2} \in X$ e $P\left(\frac{1}{2}\right)$ é a proposição $\frac{1}{2} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^2$ que é falsa

Exercício 4

$$P(x): "x \leq x^2"$$

1. $P(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$ é uma proposição falsa porque $\frac{1}{2} \in X$ e $P\left(\frac{1}{2}\right)$ é a proposição $\frac{1}{2} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^2$ que é falsa
2. $P(x)$, para algum $x \in \mathbb{R}$

Exercício 4

$$P(x): "x \leq x^2"$$

1. $P(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$ é uma proposição falsa porque $\frac{1}{2} \in X$ e $P\left(\frac{1}{2}\right)$ é a proposição $\frac{1}{2} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^2$ que é falsa
2. $P(x)$, para algum $x \in \mathbb{R}$ é uma proposição verdadeira

Exercício 4

$P(x)$: " $x \leq x^2$ "

1. $P(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$ é uma proposição falsa porque $\frac{1}{2} \in X$ e $P\left(\frac{1}{2}\right)$ é a proposição $\frac{1}{2} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^2$ que é falsa
2. $P(x)$, para algum $x \in \mathbb{R}$ é uma proposição verdadeira porque $2 \in X$

Exercício 4

$$P(x): "x \leq x^2"$$

1. $P(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$ é uma proposição falsa
porque $\frac{1}{2} \in X$ e
 $P\left(\frac{1}{2}\right)$ é a proposição $\frac{1}{2} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^2$ que é falsa
2. $P(x)$, para algum $x \in \mathbb{R}$ é uma proposição verdadeira
porque $2 \in X$ e
 $P(2)$ é a proposição $2 \leq 2^2$

Exercício 4

$$P(x): "x \leq x^2"$$

1. $P(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$ é uma proposição falsa porque $\frac{1}{2} \in X$ e $P\left(\frac{1}{2}\right)$ é a proposição $\frac{1}{2} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^2$ que é falsa
2. $P(x)$, para algum $x \in \mathbb{R}$ é uma proposição verdadeira porque $2 \in X$ e $P(2)$ é a proposição $2 \leq 2^2$ que é verdadeira

Exercício 4

$$P(x): "x \leq x^2"$$

1. $P(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$ é uma proposição falsa
porque $\frac{1}{2} \in X$ e
 $P\left(\frac{1}{2}\right)$ é a proposição $\frac{1}{2} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^2$ que é falsa
2. $P(x)$, para algum $x \in \mathbb{R}$ é uma proposição verdadeira
porque $2 \in X$ e
 $P(2)$ é a proposição $2 \leq 2^2$ que é verdadeira
3. $P(x)$, para todo $x \geq 1$ é uma proposição verdadeira

Exercício 4

$$P(x): "x \leq x^2"$$

1. $P(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$ é uma proposição falsa
porque $\frac{1}{2} \in X$ e
 $P\left(\frac{1}{2}\right)$ é a proposição $\frac{1}{2} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^2$ que é falsa
2. $P(x)$, para algum $x \in \mathbb{R}$ é uma proposição verdadeira
porque $2 \in X$ e
 $P(2)$ é a proposição $2 \leq 2^2$ que é verdadeira
3. $P(x)$, para todo $x \geq 1$ é uma proposição verdadeira
4. $P(x)$, para algum $0 < x < 1$ é uma proposição falsa

Teorema 2

$P(x)$: predicado

Teorema 2

$P(x)$: predicado

não $(P(x), \text{ para todo } x \in X)$

Teorema 2

$P(x)$: predicado

$\text{não } (P(x), \text{ para todo } x \in X) \equiv (\text{não } P(x)), \text{ para algum } x \in X$

Teorema 2

$P(x)$: predicado

$\neg (P(x), \text{ para todo } x \in X) \equiv (\neg P(x)), \text{ para algum } x \in X,$

$\neg (P(x), \text{ para algum } x \in X)$

Teorema 2

$P(x)$: predicado

$\neg (P(x), \text{ para todo } x \in X) \equiv (\neg P(x)), \text{ para algum } x \in X,$

$\neg (P(x), \text{ para algum } x \in X) \equiv (\neg P(x)), \text{ para todo } x \in X.$

Quantificação no conjunto vazio

$P(x)$: predicado,

X : $\emptyset$

Quantificação no conjunto vazio

$P(x)$: predicado,

X : $\emptyset$

1. $P(x)$, para algum $x \in X$

Quantificação no conjunto vazio

$P(x)$: predicado,

X : $\emptyset$

1. $P(x)$, para algum $x \in X$ é uma proposição falsa

Quantificação no conjunto vazio

$P(x)$: predicado,

X : $\emptyset$

1. $P(x)$, para algum $x \in X$ é uma proposição falsa porque a proposição $P(\bar{x})$ não é verdadeira para nenhum $\bar{x} \in X$

Quantificação no conjunto vazio

$P(x)$: predicado,

X : $\emptyset$

1. $P(x)$, para algum $x \in X$ é uma proposição falsa
porque a proposição $P(\bar{x})$ não é verdadeira para nenhum $\bar{x} \in X$
2. $(\text{não } P(x))$, para algum $x \in X$

Quantificação no conjunto vazio

$P(x)$: predicado,

X : $\emptyset$

1. $P(x)$, para algum $x \in X$ é uma proposição falsa
porque a proposição $P(\bar{x})$ não é verdadeira para nenhum $\bar{x} \in X$
2. $(\text{não } P(x))$, para algum $x \in X$ **também** é uma proposição falsa

Quantificação no conjunto vazio

$P(x)$: predicado,

X : $\emptyset$

1. $P(x)$, para algum $x \in X$ é uma proposição falsa
porque a proposição $P(\bar{x})$ não é verdadeira para nenhum $\bar{x} \in X$
2. $(\text{não } P(x))$, para algum $x \in X$ **também** é uma proposição falsa
3. não $((\text{não } P(x)), \text{ para algum } x \in X)$

Quantificação no conjunto vazio

$P(x)$: predicado,

X : $\emptyset$

1. $P(x)$, para algum $x \in X$ é uma proposição falsa
porque a proposição $P(\bar{x})$ não é verdadeira para nenhum $\bar{x} \in X$
2. $(\text{não } P(x))$, para algum $x \in X$ **também** é uma proposição falsa
3. $\text{não } ((\text{não } P(x)), \text{ para algum } x \in X)$ é uma proposição verdadeira

Quantificação no conjunto vazio

$P(x)$: predicado,

X : $\emptyset$

1. $P(x)$, para algum $x \in X$ é uma proposição falsa
porque a proposição $P(\bar{x})$ não é verdadeira para nenhum $\bar{x} \in X$
2. $(\text{não } P(x))$, para algum $x \in X$ **também** é uma proposição falsa
3. $\text{não } ((\text{não } P(x)), \text{ para algum } x \in X)$ é uma proposição verdadeira
4. $\text{não } ((\text{não } P(x)), \text{ para algum } x \in X)$

Quantificação no conjunto vazio

$P(x)$: predicado,

X : $\emptyset$

1. $P(x)$, para algum $x \in X$ é uma proposição falsa
porque a proposição $P(\bar{x})$ não é verdadeira para nenhum $\bar{x} \in X$
2. $(\text{não } P(x))$, para algum $x \in X$ **também** é uma proposição falsa
3. $\text{não } ((\text{não } P(x)), \text{ para algum } x \in X)$ é uma proposição verdadeira
4. $\text{não } ((\text{não } P(x)), \text{ para algum } x \in X)$
 $\equiv (\text{não } (\text{não } P(x)), \text{ para todo } x \in X)$

Quantificação no conjunto vazio

$P(x)$: predicado,

X : $\emptyset$

1. $P(x)$, para algum $x \in X$ é uma proposição falsa
porque a proposição $P(\bar{x})$ não é verdadeira para nenhum $\bar{x} \in X$
2. $(\text{não } P(x))$, para algum $x \in X$ **também** é uma proposição falsa
3. $\text{não } ((\text{não } P(x)), \text{ para algum } x \in X)$ é uma proposição verdadeira
4. $\text{não } ((\text{não } P(x)), \text{ para algum } x \in X)$
 $\equiv (\text{não } (\text{não } P(x)), \text{ para todo } x \in X)$ (T. 2)

Quantificação no conjunto vazio

$P(x)$: predicado,

X : $\emptyset$

1. $P(x)$, para algum $x \in X$ é uma proposição falsa
porque a proposição $P(\bar{x})$ não é verdadeira para nenhum $\bar{x} \in X$
 2. $(\text{não } P(x))$, para algum $x \in X$ **também** é uma proposição falsa
 3. $\text{não} ((\text{não } P(x)), \text{ para algum } x \in X)$ é uma proposição verdadeira
 4. $\text{não} ((\text{não } P(x)), \text{ para algum } x \in X)$
 $\equiv (\text{não} (\text{não } P(x)), \text{ para todo } x \in X)$
 $\equiv P(x), \text{ para todo } x \in X$
- (T. 2)

Quantificação no conjunto vazio

$P(x)$: predicado,

X : $\emptyset$

1. $P(x)$, para algum $x \in X$ é uma proposição falsa
porque a proposição $P(\bar{x})$ não é verdadeira para nenhum $\bar{x} \in X$
2. $(\text{não } P(x))$, para algum $x \in X$ **também** é uma proposição falsa
3. $\text{não} ((\text{não } P(x)), \text{ para algum } x \in X)$ é uma proposição verdadeira
4. $\text{não} ((\text{não } P(x)), \text{ para algum } x \in X)$
 $\equiv (\text{não} (\text{não } P(x)), \text{ para todo } x \in X)$ (T. 2)
 $\equiv P(x)$, para todo $x \in X$ é uma proposição verdadeira

Corolário 3

$P(x)$: predicado,

X : $\emptyset$

Corolário 3

$P(x)$: predicado,

X : $\emptyset$

1. $P(x)$, para todo $x \in X$ é uma proposição verdadeira

Corolário 3

$P(x)$: predicado,
 $X: \emptyset$

1. $P(x)$, para todo $x \in X$ é uma proposição verdadeira,
2. $P(x)$, para algum $x \in X$ é uma proposição falsa