Matemática Discreta

Unidade 28: Recorrências Lineares Homogêneas (2)

Renato Carmo
David Menotti

Departamento de Informática da UFPR

Segundo Período Especial de 2020

Definições

Definições

$a_1, \dots, a_k \in \mathbb{C}$

Definições

$a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{C}$

$\mathcal{R}(a_1, \ldots, a_k)$

Definições

$a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{C}$

$\mathcal{R}(a_1, \ldots, a_k)$: conjunto das funções que satisfazem
$f(n) = a_1 f(n-1) + a_2 f(n-2) + \ldots + a_k f(n-k)$, para todo $n \geq k$

Definições

$a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{C}$

$\mathcal{R}(a_1, \ldots, a_k)$: conjunto das funções que satisfazem
$f(n) = a_1 f(n-1) + a_2 f(n-2) + \ldots + a_k f(n-k),$ para todo $n \geq k$

$$\begin{aligned}\mathcal{R}(a_1, \ldots, a_k) := \{f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{C} \mid \\ & f(n) = a_1 f(n-1) + a_2 f(n-2) + \ldots + a_k f(n-k), \\ & \text{para todo } n \geq k\}\end{aligned}$$

Definições

$a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{C}$

$\mathcal{R}(a_1, \ldots, a_k)$: conjunto das funções que satisfazem
$f(n) = a_1 f(n-1) + a_2 f(n-2) + \ldots + a_k f(n-k)$, para todo $n \geq k$

$$\begin{aligned}\mathcal{R}(a_1, \ldots, a_k) := \{f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{C} \mid \\ & f(n) = a_1 f(n-1) + a_2 f(n-2) + \ldots + a_k f(n-k), \\ & \text{para todo } n \geq k\}\end{aligned}$$

$X^k - a_1 X^{k-1} - \ldots - a_{k-1} X^1 - a_k$

Definições

$a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{C}$

$\mathcal{R}(a_1, \ldots, a_k)$: conjunto das funções que satisfazem
$f(n) = a_1 f(n-1) + a_2 f(n-2) + \ldots + a_k f(n-k)$, para todo $n \geq k$

$$\begin{aligned}\mathcal{R}(a_1, \ldots, a_k) := \{f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{C} \mid \\ & f(n) = a_1 f(n-1) + a_2 f(n-2) + \ldots + a_k f(n-k), \\ & \text{para todo } n \geq k\}\end{aligned}$$

$X^k - a_1 X^{k-1} - \ldots - a_{k-1} X^1 - a_k$: **polinômio característico** (PC) de $\mathcal{R}(a_1, \ldots, a_k)$

Corolário 31

Corolário 31

$\mathcal{R}(a_1, \ldots, a_k)$ é um subespaço vetorial de $(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}, +)$

Corolário 31

$\mathcal{R}(a_1, \ldots, a_k)$ é um subespaço vetorial de $(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}, +)$

Demonstração.

Exercício 119 $\square$

Teorema 32

Teorema 32

r é raiz de multiplicidade m do PC de $\mathcal{R}(a_1, \ldots, a_k)$

Teorema 32

r é raiz de multiplicidade m do PC de $\mathcal{R}(a_1, \ldots, a_k)$

$$\Updownarrow$$

Teorema 32

r é raiz de multiplicidade m do PC de $\mathcal{R}(a_1, \ldots, a_k)$

$$\Updownarrow$$

m é o maior inteiro tal que $n^{m-1} r^n \in \mathcal{R}(a_1, \ldots, a_k)$

Teorema 32

r é raiz de multiplicidade m do PC de $\mathcal{R}(a_1, \ldots, a_k)$

$$\Updownarrow$$

m é o maior inteiro tal que $n^{m-1} r^n \in \mathcal{R}(a_1, \ldots, a_k)$

Convenção: $m = 1$

Teorema 32

r é raiz de multiplicidade m do PC de $\mathcal{R}(a_1, \dots, a_k)$

$$\Updownarrow$$

m é o maior inteiro tal que $n^{m-1} r^n \in \mathcal{R}(a_1, \dots, a_k)$

Convenção: $m = 1$: $n^0 r^n$

Teorema 32

r é raiz de multiplicidade m do PC de $\mathcal{R}(a_1, \ldots, a_k)$

$$\Updownarrow$$

m é o maior inteiro tal que $n^{m-1} r^n \in \mathcal{R}(a_1, \ldots, a_k)$

Convenção: $m = 1$: $n^0 r^n := r^n$

Corolário 33

Corolário 33

$$n^{m-1} r^n \in \mathcal{R}(a_1, \ldots, a_k)$$

Corolário 33

$$n^{m-1} r^n \in \mathcal{R}(a_1, \ldots, a_k)$$

$$\Updownarrow$$

Corolário 33

$$n^{m-1} r^n \in \mathcal{R}(a_1, \ldots, a_k)$$

$$\Updownarrow$$

$$(X - r)^m \text{ divide o PC de } \mathcal{R}(a_1, \ldots, a_k)$$

Corolário 33

$$n^{m-1} r^n \in \mathcal{R}(a_1, \ldots, a_k)$$

$$\Updownarrow$$

$$(X - r)^m \text{ divide o PC de } \mathcal{R}(a_1, \ldots, a_k)$$

Lembrete: $(X - r)^m$ divide P

Corolário 33

$$n^{m-1} r^n \in \mathcal{R}(a_1, \ldots, a_k)$$

$$\Updownarrow$$

$$(X - r)^m \text{ divide o PC de } \mathcal{R}(a_1, \ldots, a_k)$$

Lembrete: $(X - r)^m$ divide $P \Leftrightarrow (X - r)^j$ divide P, para todo $j \leq m$

Corolário 34

Corolário 34

r é raiz de multiplicidade m do PC de $\mathcal{R}(a_1, \ldots, a_k)$

Corolário 34

r é raiz de multiplicidade m do PC de $\mathcal{R}(a_1, \ldots, a_k)$

$$\Downarrow$$

$$B(r) = \left\{ n^j r^n \mid 0 \leq j < m \right\}$$

Corolário 34

r é raiz de multiplicidade m do PC de $\mathcal{R}(a_1, \ldots, a_k)$

$$\Downarrow$$

$B(r) = \left\{ n^j r^n \mid 0 \leq j < m \right\}$ é linearmente independente em $\mathcal{R}(a_1, \ldots, a_k)$

Corolário 35

Corolário 35

$r_1, \ldots, r_l$

Corolário 35

$r_1, \ldots, r_l$: raízes distintas do PC de $\mathcal{R}(a_1, \ldots, a_k)$

Corolário 35

$r_1, \ldots, r_l$: raízes distintas do PC de $\mathcal{R}(a_1, \ldots, a_k)$

$B(r_1) \cup B(r_2) \cup \ldots \cup B(r_l)$

Corolário 35

$r_1, \ldots, r_l$: raízes distintas do PC de $\mathcal{R}(a_1, \ldots, a_k)$

$B(r_1) \cup B(r_2) \cup \ldots \cup B(r_l)$ é base de $\mathcal{R}(a_1, \ldots, a_k)$

Corolário 36

Corolário 36

se $f(n) = a_1 f(n-1) + \ldots + a_k f(n-k)$, para todo $n \geq k$

Corolário 36

se $f(n) = a_1 f(n-1) + \ldots + a_k f(n-k),$ para todo $n \geq k$

então $f(n) = \sum_{i=1}^{l} \left(\sum_{j=0}^{m_i - 1} c_{i,j} n^j r_i^n \right),$ para todo $n \in \mathbb{N}$

Corolário 36

se $f(n) = a_1 f(n-1) + \ldots + a_k f(n-k)$, para todo $n \geq k$

então $f(n) = \sum_{i=1}^{l} \left(\sum_{j=0}^{m_i - 1} c_{i,j} n^j r_i^n \right)$, para todo $n \in \mathbb{N}$

onde

$r_1, \ldots, r_l$

Corolário 36

se $f(n) = a_1 f(n-1) + \ldots + a_k f(n-k)$, para todo $n \geq k$

então $f(n) = \sum_{i=1}^{l} \left(\sum_{j=0}^{m_i - 1} c_{i,j} n^j r_i^n \right)$, para todo $n \in \mathbb{N}$

onde

$r_1, \ldots, r_l$: distintas raízes de $X^k - a_1 X^{k-1} - \ldots - a_{k-1} X^1 - a_k$

Corolário 36

se $f(n) = a_1 f(n-1) + \ldots + a_k f(n-k),$ para todo $n \geq k$

então $f(n) = \sum_{i=1}^{l} \left(\sum_{j=0}^{m_i - 1} c_{i,j} n^j r_i^n \right),$ para todo $n \in \mathbb{N}$

onde

$r_1, \ldots, r_l$: distintas raízes de $X^k - a_1 X^{k-1} - \ldots - a_{k-1} X^1 - a_k$

m_i

Corolário 36

se $f(n) = a_1 f(n-1) + \ldots + a_k f(n-k)$, para todo $n \geq k$

então $f(n) = \sum_{i=1}^{l} \left(\sum_{j=0}^{m_i - 1} c_{i,j} n^j r_i^n \right)$, para todo $n \in \mathbb{N}$

onde

$r_1, \ldots, r_l$: distintas raízes de $X^k - a_1 X^{k-1} - \ldots - a_{k-1} X^1 - a_k$

m_i: multiplicidade de r_i

Corolário 36

se $f(n) = a_1 f(n-1) + \ldots + a_k f(n-k),$ para todo $n \geq k$

então $f(n) = \sum_{i=1}^{l} \left(\sum_{j=0}^{m_i - 1} c_{i,j} n^j r_i^n \right),$ para todo $n \in \mathbb{N}$

onde

$r_1, \ldots, r_l$: distintas raízes de $X^k - a_1 X^{k-1} - \ldots - a_{k-1} X^1 - a_k$

m_i: multiplicidade de r_i; $\quad c_{i,j}$

Corolário 36

se $f(n) = a_1 f(n-1) + \ldots + a_k f(n-k),$ para todo $n \geq k$

então $f(n) = \sum_{i=1}^{l} \left(\sum_{j=0}^{m_i - 1} c_{i,j} n^j r_i^n \right),$ para todo $n \in \mathbb{N}$

onde

$r_1, \ldots, r_l$: distintas raízes de $X^k - a_1 X^{k-1} - \ldots - a_{k-1} X^1 - a_k$

m_i: multiplicidade de r_i; $c_{i,j}$: solução do sistema

Corolário 36

se $f(n) = a_1 f(n-1) + \ldots + a_k f(n-k)$, para todo $n \geq k$

então $f(n) = \sum_{i=1}^{l} \left(\sum_{j=0}^{m_i - 1} c_{i,j} n^j r_i^n \right)$, para todo $n \in \mathbb{N}$

onde

$r_1, \ldots, r_l$: distintas raízes de $X^k - a_1 X^{k-1} - \ldots - a_{k-1} X^1 - a_k$

m_i: multiplicidade de r_i; $c_{i,j}$: solução do sistema

$$f(0) = \sum_{i=1}^{l} \left(\sum_{j=0}^{m_i - 1} c_{i,j} 0^j r_i^0 \right)$$

Corolário 36

se $f(n) = a_1 f(n-1) + \ldots + a_k f(n-k)$, para todo $n \geq k$

então $f(n) = \sum_{i=1}^{l} \left(\sum_{j=0}^{m_i - 1} c_{i,j} n^j r_i^n \right)$, para todo $n \in \mathbb{N}$

onde

$r_1, \ldots, r_l$: distintas raízes de $X^k - a_1 X^{k-1} - \ldots - a_{k-1} X^1 - a_k$

m_i: multiplicidade de r_i; $c_{i,j}$: solução do sistema

$$
\begin{aligned}
f(0) &= \sum_{i=1}^{l} \left(\sum_{j=0}^{m_i - 1} c_{i,j} 0^j r_i^0 \right) \\
\vdots &= \vdots \\
f(k-1) &= \sum_{i=1}^{l} \left(\sum_{j=0}^{m_i - 1} c_{i,j} (k-1)^j r_i^{k-1} \right)
\end{aligned}
$$