

Matemática Discreta

Unidade 30: Recorrências Lineares Homogêneas (4)

Renato Carmo
David Menotti

Departamento de Informática da UFPR

Segundo Período Especial de 2020

Exercício 120b

b)

$$f(n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 0 \\ 9, & \text{se } n = 1 \text{ ou } n = 2 \\ 9f(n-1) - 27f(n-2) + 27f(n-3), & \text{se } n \geq 3. \end{cases}$$

Exercício 120b

b)

$$f(n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 0 \\ 9, & \text{se } n = 1 \text{ ou } n = 2 \\ 9f(n-1) - 27f(n-2) + 27f(n-3), & \text{se } n \geq 3. \end{cases}$$

Seja $\mathcal{R}(9, -27, +27)$ o conjunto das funções que satisfazem $f(n)$, para todo $n \geq 3$.

Exercício 120b

b)

$$f(n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 0 \\ 9, & \text{se } n = 1 \text{ ou } n = 2 \\ 9f(n-1) - 27f(n-2) + 27f(n-3), & \text{se } n \geq 3. \end{cases}$$

Seja $\mathcal{R}(9, -27, +27)$ o conjunto das funções que satisfazem $f(n)$, para todo $n \geq 3$.

A equação de recorrência pode ser reescrita (na forma homogênea) como

$$f(n) - 9f(n-1) + 27f(n-2) - 27f(n-3) = 0.$$

Exercício 120b

b)

$$f(n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 0 \\ 9, & \text{se } n = 1 \text{ ou } n = 2 \\ 9f(n-1) - 27f(n-2) + 27f(n-3), & \text{se } n \geq 3. \end{cases}$$

Seja $\mathcal{R}(9, -27, +27)$ o conjunto das funções que satisfazem $f(n)$, para todo $n \geq 3$. A equação de recorrência pode ser reescrita (na forma homogênea) como

$$f(n) - 9f(n-1) + 27f(n-2) - 27f(n-3) = 0.$$

Assim fica evidente que $f(n)$ satisfaz uma recorrência linear homogênea (RLH) cujo polinômio característico (PC) é

$$X^3 - 9X^2 + 27X - 27.$$

Exercício 120b

b)

$$f(n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 0 \\ 9, & \text{se } n = 1 \text{ ou } n = 2 \\ 9f(n-1) - 27f(n-2) + 27f(n-3), & \text{se } n \geq 3. \end{cases}$$

Seja $\mathcal{R}(9, -27, +27)$ o conjunto das funções que satisfazem $f(n)$, para todo $n \geq 3$. A equação de recorrência pode ser reescrita (na forma homogênea) como

$$f(n) - 9f(n-1) + 27f(n-2) - 27f(n-3) = 0.$$

Assim fica evidente que $f(n)$ satisfaz uma recorrência linear homogênea (RLH) cujo polinômio característico (PC) é

$$X^3 - 9X^2 + 27X - 27.$$

Resta saber quais as raízes deste PC.

Exercício 120b

Seja o PC dado por

$$X^3 - 9X^2 + 27X - 27.$$

Exercício 120b

Seja o PC dado por

$$X^3 - 9X^2 + 27X - 27.$$

Pelo *dispositivo prático de Brit-Ruffini*, podemos determinar as raízes de polinômios avaliando os múltiplos do coeficiente de grau 0, ou seja

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -9 & 27 & -27 \end{array}$$

Exercício 120b

Seja o PC dado por

$$X^3 - 9X^2 + 27X - 27.$$

Pelo *dispositivo prático de Brit-Ruffini*, podemos determinar as raízes de polinômios avaliando os múltiplos do coeficiente de grau 0, ou seja

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -9 & 27 & -27 \\ \hline \end{array}$$

Exercício 120b

Seja o PC dado por

$$X^3 - 9X^2 + 27X - 27.$$

Pelo *dispositivo prático de Brit-Ruffini*, podemos determinar as raízes de polinômios avaliando os múltiplos do coeficiente de grau 0, ou seja

1		1	-9	27	-27
		1			

Exercício 120b

Seja o PC dado por

$$X^3 - 9X^2 + 27X - 27.$$

Pelo *dispositivo prático de Brit-Ruffini*, podemos determinar as raízes de polinômios avaliando os múltiplos do coeficiente de grau 0, ou seja

1		1	-9	27	-27
		1	-8		

Exercício 120b

Seja o PC dado por

$$X^3 - 9X^2 + 27X - 27.$$

Pelo *dispositivo prático de Brit-Ruffini*, podemos determinar as raízes de polinômios avaliando os múltiplos do coeficiente de grau 0, ou seja

1		1	-9	27	-27
		1	-8	19	

Exercício 120b

Seja o PC dado por

$$X^3 - 9X^2 + 27X - 27.$$

Pelo *dispositivo prático de Brit-Ruffini*, podemos determinar as raízes de polinômios avaliando os múltiplos do coeficiente de grau 0, ou seja

1		1	-9	27	-27	
		1	-8	19	-8	não é raiz

Exercício 120b

Seja o PC dado por

$$X^3 - 9X^2 + 27X - 27.$$

Pelo *dispositivo prático de Brit-Ruffini*, podemos determinar as raízes de polinômios avaliando os múltiplos do coeficiente de grau 0, ou seja

3		1	-9	27	-27

Exercício 120b

Seja o PC dado por

$$X^3 - 9X^2 + 27X - 27.$$

Pelo *dispositivo prático de Brit-Ruffini*, podemos determinar as raízes de polinômios avaliando os múltiplos do coeficiente de grau 0, ou seja

3		1	-9	27	-27
		1			

Exercício 120b

Seja o PC dado por

$$X^3 - 9X^2 + 27X - 27.$$

Pelo *dispositivo prático de Brit-Ruffini*, podemos determinar as raízes de polinômios avaliando os múltiplos do coeficiente de grau 0, ou seja

3		1	-9	27	-27
		1	-6		

Exercício 120b

Seja o PC dado por

$$X^3 - 9X^2 + 27X - 27.$$

Pelo *dispositivo prático de Brit-Ruffini*, podemos determinar as raízes de polinômios avaliando os múltiplos do coeficiente de grau 0, ou seja

3		1	-9	27	-27
		1	-6	+9	

Exercício 120b

Seja o PC dado por

$$X^3 - 9X^2 + 27X - 27.$$

Pelo *dispositivo prático de Brit-Ruffini*, podemos determinar as raízes de polinômios avaliando os múltiplos do coeficiente de grau 0, ou seja

3		1	-9	27	-27
		1	-6	+9	0

Exercício 120b

Seja o PC dado por

$$X^3 - 9X^2 + 27X - 27.$$

Pelo *dispositivo prático de Brit-Ruffini*, podemos determinar as raízes de polinômios avaliando os múltiplos do coeficiente de grau 0, ou seja

3		1	-9	27	-27
		1	-6	+9	0

Exercício 120b

Seja o PC dado por

$$X^3 - 9X^2 + 27X - 27.$$

Pelo *dispositivo prático de Brit-Ruffini*, podemos determinar as raízes de polinômios avaliando os múltiplos do coeficiente de grau 0, ou seja

3		1	-9	27	-27
3		1	-6	+9	0

Exercício 120b

Seja o PC dado por

$$X^3 - 9X^2 + 27X - 27.$$

Pelo *dispositivo prático de Brit-Ruffini*, podemos determinar as raízes de polinômios avaliando os múltiplos do coeficiente de grau 0, ou seja

3		1	-9	27	-27
3		1	-6	+9	0
		1			

Exercício 120b

Seja o PC dado por

$$X^3 - 9X^2 + 27X - 27.$$

Pelo *dispositivo prático de Brit-Ruffini*, podemos determinar as raízes de polinômios avaliando os múltiplos do coeficiente de grau 0, ou seja

3		1	-9	27	-27
3		1	-6	+9	0
		1	-3		

Exercício 120b

Seja o PC dado por

$$X^3 - 9X^2 + 27X - 27.$$

Pelo *dispositivo prático de Brit-Ruffini*, podemos determinar as raízes de polinômios avaliando os múltiplos do coeficiente de grau 0, ou seja

3		1	-9	27	-27
3		1	-6	+9	0
		1	-3	0	

Exercício 120b

Seja o PC dado por

$$X^3 - 9X^2 + 27X - 27.$$

Pelo *dispositivo prático de Brit-Ruffini*, podemos determinar as raízes de polinômios avaliando os múltiplos do coeficiente de grau 0, ou seja

3	1	-9	27	-27
3	1	-6	+9	0
	1	-3	0	

Exercício 120b

Seja o PC dado por

$$X^3 - 9X^2 + 27X - 27.$$

Pelo *dispositivo prático de Brit-Ruffini*, podemos determinar as raízes de polinômios avaliando os múltiplos do coeficiente de grau 0, ou seja

3	1	-9	27	-27
3	1	-6	+9	0
3	1	-3	0	

Exercício 120b

Seja o PC dado por

$$X^3 - 9X^2 + 27X - 27.$$

Pelo *dispositivo prático de Brit-Ruffini*, podemos determinar as raízes de polinômios avaliando os múltiplos do coeficiente de grau 0, ou seja

3		1	-9	27	-27
3		1	-6	+9	0
3		1	-3	0	
		1			

Exercício 120b

Seja o PC dado por

$$X^3 - 9X^2 + 27X - 27.$$

Pelo *dispositivo prático de Brit-Ruffini*, podemos determinar as raízes de polinômios avaliando os múltiplos do coeficiente de grau 0, ou seja

3		1	-9	27	-27
3		1	-6	+9	0
3		1	-3	0	
		1	0		

Então, tem-se que o PC é divisível por 3, 3 e 3, isto é

$$X^3 - 9X^2 + 27X - 27 = (X - 3)(X - 3)(X - 3) = (X - 3)^3.$$

Exercício 120b

Então o conjunto $\{n^0 3^n, n^1 3^n, n^2 3^n\} = \{3^n, n 3^n, n^2 3^n\}$ é linearmente independente em $\mathcal{R}(9, -27, 27)$.

Exercício 120b

Então o conjunto $\{n^0 3^n, n^1 3^n, n^2 3^n\} = \{3^n, n 3^n, n^2 3^n\}$ é linearmente independente em $\mathcal{R}(9, -27, 27)$.

Portanto, $f \in \mathcal{R}(9, -27, 27)$ pode ser escrita como uma combinação linear de 3^n , $n 3^n$ e $n^2 3^n$, isto é, existem $a, b, c \in \mathbb{C}$ tais que

$$f(n) = a 3^n + b n 3^n + c n^2 3^n,$$

Exercício 120b

Então o conjunto $\{n^0 3^n, n^1 3^n, n^2 3^n\} = \{3^n, n 3^n, n^2 3^n\}$ é linearmente independente em $\mathcal{R}(9, -27, 27)$.

Portanto, $f \in \mathcal{R}(9, -27, 27)$ pode ser escrita como uma combinação linear de 3^n , $n 3^n$ e $n^2 3^n$, isto é, existem $a, b, c \in \mathbb{C}$ tais que

$$f(n) = a 3^n + b n 3^n + c n^2 3^n,$$

Os valores de a, b e c podem ser determinados pelo sistema

$$f(0) = a 3^0 + b \cdot 0 \cdot 3^0 + c \cdot 0^2 3^0,$$

$$f(1) = a 3^1 + b \cdot 1 \cdot 3^1 + c \cdot 1^2 3^1,$$

$$f(2) = a 3^2 + b \cdot 2 \cdot 3^2 + c \cdot 2^2 3^2,$$

Exercicio 120b

ou seja,

$$1 = 1a + 0b + 0c,$$

$$9 = 3a + 3b + 3c,$$

$$9 = 9a + 18b + 36c,$$

Exercicio 120b

ou seja,

$$1 = 1a + 0b + 0c,$$

$$9 = 3a + 3b + 3c,$$

$$9 = 9a + 18b + 36c,$$

e portanto,

$$a = 1, b = 4, c = -2.$$

Exercicio 120b

ou seja,

$$1 = 1a + 0b + 0c,$$

$$9 = 3a + 3b + 3c,$$

$$9 = 9a + 18b + 36c,$$

e portanto,

$$a = 1, b = 4, c = -2.$$

E portanto,

$$f(n) = 3^n + 4n3^n - 2n^23^n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$