

Matemática Discreta

Unidade 31: Recorrências Lineares Homogêneas (5)

Renato Carmo
David Menotti

Departamento de Informática da UFPR

Segundo Período Especial de 2020

Exercicio 120c

c)

$$f(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n \leq 1 \\ 3, & \text{se } n = 2 \\ 7f(n-1) - 16f(n-2) + 12f(n-3), & \text{se } n \geq 3. \end{cases}$$

Exercício 120c

c)

$$f(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n \leq 1 \\ 3, & \text{se } n = 2 \\ 7f(n-1) - 16f(n-2) + 12f(n-3), & \text{se } n \geq 3. \end{cases}$$

Seja $\mathcal{R}(7, -16, +12)$ o conjunto das funções que satisfazem $f(n)$, para todo $n \geq 3$.

Exercício 120c

c)

$$f(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n \leq 1 \\ 3, & \text{se } n = 2 \\ 7f(n-1) - 16f(n-2) + 12f(n-3), & \text{se } n \geq 3. \end{cases}$$

Seja $\mathcal{R}(7, -16, +12)$ o conjunto das funções que satisfazem $f(n)$, para todo $n \geq 3$.

A equação de recorrência pode ser reescrita (na forma homogênea) como

$$f(n) - 7f(n-1) + 16f(n-2) - 12f(n-3) = 0.$$

Exercício 120c

c)

$$f(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n \leq 1 \\ 3, & \text{se } n = 2 \\ 7f(n-1) - 16f(n-2) + 12f(n-3), & \text{se } n \geq 3. \end{cases}$$

Seja $\mathcal{R}(7, -16, +12)$ o conjunto das funções que satisfazem $f(n)$, para todo $n \geq 3$. A equação de recorrência pode ser reescrita (na forma homogênea) como

$$f(n) - 7f(n-1) + 16f(n-2) - 12f(n-3) = 0.$$

Assim fica evidente que $f(n)$ satisfaz uma recorrência linear homogênea (RLH) cujo polinômio característico (PC) é

$$X^3 - 7X^2 + 16X - 12.$$

Exercício 120c

c)

$$f(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n \leq 1 \\ 3, & \text{se } n = 2 \\ 7f(n-1) - 16f(n-2) + 12f(n-3), & \text{se } n \geq 3. \end{cases}$$

Seja $\mathcal{R}(7, -16, +12)$ o conjunto das funções que satisfazem $f(n)$, para todo $n \geq 3$. A equação de recorrência pode ser reescrita (na forma homogênea) como

$$f(n) - 7f(n-1) + 16f(n-2) - 12f(n-3) = 0.$$

Assim fica evidente que $f(n)$ satisfaz uma recorrência linear homogênea (RLH) cujo polinômio característico (PC) é

$$X^3 - 7X^2 + 16X - 12.$$

Resta saber quais as raízes deste PC.

Exercício 120c

Seja o PC dado por

$$X^3 - 7X^2 + 16X - 12.$$

Exercício 120c

Seja o PC dado por

$$X^3 - 7X^2 + 16X - 12.$$

Pelo *dispositivo prático de Brit-Ruffini*, podemos determinar as raízes de polinômios avaliando os múltiplos do coeficiente de grau 0, ou seja

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -7 & 16 & -12 \end{array}$$

Exercício 120c

Seja o PC dado por

$$X^3 - 7X^2 + 16X - 12.$$

Pelo *dispositivo prático de Brit-Ruffini*, podemos determinar as raízes de polinômios avaliando os múltiplos do coeficiente de grau 0, ou seja

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -7 & 16 & -12 \\ \hline \end{array}$$

Exercício 120c

Seja o PC dado por

$$X^3 - 7X^2 + 16X - 12.$$

Pelo *dispositivo prático de Brit-Ruffini*, podemos determinar as raízes de polinômios avaliando os múltiplos do coeficiente de grau 0, ou seja

1		1	-7	16	-12
		1			

Exercício 120c

Seja o PC dado por

$$X^3 - 7X^2 + 16X - 12.$$

Pelo *dispositivo prático de Brit-Ruffini*, podemos determinar as raízes de polinômios avaliando os múltiplos do coeficiente de grau 0, ou seja

1		1	-7	16	-12
		1	-6		

Exercício 120c

Seja o PC dado por

$$X^3 - 7X^2 + 16X - 12.$$

Pelo *dispositivo prático de Brit-Ruffini*, podemos determinar as raízes de polinômios avaliando os múltiplos do coeficiente de grau 0, ou seja

1		1	-7	16	-12
		1	-6	10	

Exercício 120c

Seja o PC dado por

$$X^3 - 7X^2 + 16X - 12.$$

Pelo *dispositivo prático de Brit-Ruffini*, podemos determinar as raízes de polinômios avaliando os múltiplos do coeficiente de grau 0, ou seja

1		1	-7	16	-12	
		1	-6	10	-2	não é raiz

Exercício 120c

Seja o PC dado por

$$X^3 - 7X^2 + 16X - 12.$$

Pelo *dispositivo prático de Brit-Ruffini*, podemos determinar as raízes de polinômios avaliando os múltiplos do coeficiente de grau 0, ou seja

2		1	-7	16	-12

Exercício 120c

Seja o PC dado por

$$X^3 - 7X^2 + 16X - 12.$$

Pelo *dispositivo prático de Brit-Ruffini*, podemos determinar as raízes de polinômios avaliando os múltiplos do coeficiente de grau 0, ou seja

2		1	-7	16	-12
		1			

Exercício 120c

Seja o PC dado por

$$X^3 - 7X^2 + 16X - 12.$$

Pelo *dispositivo prático de Brit-Ruffini*, podemos determinar as raízes de polinômios avaliando os múltiplos do coeficiente de grau 0, ou seja

2		1	-7	16	-12
		1	-5		

Exercício 120c

Seja o PC dado por

$$X^3 - 7X^2 + 16X - 12.$$

Pelo *dispositivo prático de Brit-Ruffini*, podemos determinar as raízes de polinômios avaliando os múltiplos do coeficiente de grau 0, ou seja

2		1	-7	16	-12
		1	-5	+6	

Exercício 120c

Seja o PC dado por

$$X^3 - 7X^2 + 16X - 12.$$

Pelo *dispositivo prático de Brit-Ruffini*, podemos determinar as raízes de polinômios avaliando os múltiplos do coeficiente de grau 0, ou seja

2		1	-7	16	-12
		1	-5	+6	0

Exercício 120c

Seja o PC dado por

$$X^3 - 7X^2 + 16X - 12.$$

Pelo *dispositivo prático de Brit-Ruffini*, podemos determinar as raízes de polinômios avaliando os múltiplos do coeficiente de grau 0, ou seja

2	1	-7	16	-12
	1	-5	+6	0

Exercício 120c

Seja o PC dado por

$$X^3 - 7X^2 + 16X - 12.$$

Pelo *dispositivo prático de Brit-Ruffini*, podemos determinar as raízes de polinômios avaliando os múltiplos do coeficiente de grau 0, ou seja

2	1	-7	16	-12
3	1	-5	+6	0

Exercício 120c

Seja o PC dado por

$$X^3 - 7X^2 + 16X - 12.$$

Pelo *dispositivo prático de Brit-Ruffini*, podemos determinar as raízes de polinômios avaliando os múltiplos do coeficiente de grau 0, ou seja

2		1	-7	16	-12
3		1	-5	+6	0
		1			

Exercício 120c

Seja o PC dado por

$$X^3 - 7X^2 + 16X - 12.$$

Pelo *dispositivo prático de Brit-Ruffini*, podemos determinar as raízes de polinômios avaliando os múltiplos do coeficiente de grau 0, ou seja

2		1	-7	16	-12
3		1	-5	+6	0
		1	-2		

Exercício 120c

Seja o PC dado por

$$X^3 - 7X^2 + 16X - 12.$$

Pelo *dispositivo prático de Brit-Ruffini*, podemos determinar as raízes de polinômios avaliando os múltiplos do coeficiente de grau 0, ou seja

2	1	-7	16	-12
3	1	-5	+6	0
	1	-2	0	

Exercício 120c

Seja o PC dado por

$$X^3 - 7X^2 + 16X - 12.$$

Pelo *dispositivo prático de Brit-Ruffini*, podemos determinar as raízes de polinômios avaliando os múltiplos do coeficiente de grau 0, ou seja

2	1	-7	16	-12
3	1	-5	+6	0
	1	-2	0	

Exercício 120c

Seja o PC dado por

$$X^3 - 7X^2 + 16X - 12.$$

Pelo *dispositivo prático de Brit-Ruffini*, podemos determinar as raízes de polinômios avaliando os múltiplos do coeficiente de grau 0, ou seja

2	1	-7	16	-12
3	1	-5	+6	0
2	1	-2	0	

Exercício 120c

Seja o PC dado por

$$X^3 - 7X^2 + 16X - 12.$$

Pelo *dispositivo prático de Brit-Ruffini*, podemos determinar as raízes de polinômios avaliando os múltiplos do coeficiente de grau 0, ou seja

2		1	-7	16	-12
3		1	-5	+6	0
2		1	-2	0	
		1			

Exercício 120c

Seja o PC dado por

$$X^3 - 7X^2 + 16X - 12.$$

Pelo *dispositivo prático de Brit-Ruffini*, podemos determinar as raízes de polinômios avaliando os múltiplos do coeficiente de grau 0, ou seja

2		1	-7	16	-12
3		1	-5	+6	0
2		1	-2	0	
		1	0		

Então, tem-se que o PC é divisível por 2, 2 e 3, isto é

$$X^3 - 7X^2 + 16X - 12 = (X - 2)(X - 2)(X - 3) = (X - 2)^2(X - 3).$$

Exercício 120c

Então o conjunto $\{n^0 2^n, n^1 2^n, n^2 3^n\} = \{2^n, n 2^n, 3^n\}$ é linearmente independente em $\mathcal{R}(7, -16, 12)$.

Exercício 120c

Então o conjunto $\{n^0 2^n, n^1 2^n, n^2 3^n\} = \{2^n, n 2^n, 3^n\}$ é linearmente independente em $\mathcal{R}(7, -16, 12)$.

Portanto, $f \in \mathcal{R}(7, -16, 12)$ pode ser escrita como uma combinação linear de 2^n , $n 2^n$ e 3^n , isto é, existem $a, b, c \in \mathbb{C}$ tais que

$$f(n) = a 2^n + b n 2^n + c 3^n,$$

Exercício 120c

Então o conjunto $\{n^0 2^n, n^1 2^n, n^2 3^n\} = \{2^n, n 2^n, 3^n\}$ é linearmente independente em $\mathcal{R}(7, -16, 12)$.

Portanto, $f \in \mathcal{R}(7, -16, 12)$ pode ser escrita como uma combinação linear de 2^n , $n 2^n$ e 3^n , isto é, existem $a, b, c \in \mathbb{C}$ tais que

$$f(n) = a 2^n + b n 2^n + c 3^n,$$

Os valores de a, b e c podem ser determinados pelo sistema

$$f(0) = a 2^0 + b \cdot 0 \cdot 2^0 + c \cdot 3^0,$$

$$f(1) = a 2^1 + b \cdot 1 \cdot 2^1 + c \cdot 3^1,$$

$$f(2) = a 2^2 + b \cdot 2 \cdot 2^2 + c \cdot 3^2,$$

Exercicio 120c

ou seja,

$$0 = 1a + 0b + 1c,$$

$$1 = 2a + 2b + 3c,$$

$$3 = 4a + 8b + 9c,$$

Exercicio 120c

ou seja,

$$0 = 1a + 0b + 1c,$$

$$1 = 2a + 2b + 3c,$$

$$3 = 4a + 8b + 9c,$$

e portanto,

$$a = 1, b = 1, c = -1.$$

Exercicio 120c

ou seja,

$$0 = 1a + 0b + 1c,$$

$$1 = 2a + 2b + 3c,$$

$$3 = 4a + 8b + 9c,$$

e portanto,

$$a = 1, b = 1, c = -1.$$

E portanto,

$$f(n) = 2^n + n2^n - 3^n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$