Matemática Discreta

Unidade 32: Recorrências Lineares não Homogêneas (1)

Renato Carmo
David Menotti

Departamento de Informática da UFPR

Segundo Período Especial de 2020

Recorrência Linear não Homogênea

Recorrência Linear não Homogênea

$$f(n) = a_1 f(n-1) + a_2 f(n-2) + \ldots + a_k f(n-k) + g(n), \text{ para todo } n \geq k$$

Recorrência Linear não Homogênea

$$f(n) = a_1 f(n-1) + a_2 f(n-2) + \ldots + a_k f(n-k) + g(n), \text{ para todo } n \geq k$$

$a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{C}$

Recorrência Linear não Homogênea

$$f(n) = a_1 f(n-1) + a_2 f(n-2) + \ldots + a_k f(n-k) + g(n), \text{ para todo } n \geq k$$

$a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{C}$

$g \colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$

Teorema 37

Teorema 37

$$f(n) = a_1 f(n-1) + a_2 f(n-2) + \ldots + a_k f(n-k) + g(n), \text{ para todo } n \geq k$$

Teorema 37

$$f(n) = a_1 f(n-1) + a_2 f(n-2) + \ldots + a_k f(n-k) + g(n), \text{ para todo } n \geq k$$

$g(n)$ satisfaz uma RLH

Teorema 37

$$f(n) = a_1 f(n-1) + a_2 f(n-2) + \ldots + a_k f(n-k) + g(n), \text{ para todo } n \geq k$$

$g(n)$ satisfaz uma RLH cujo PC é G

Teorema 37

$$f(n) = a_1 f(n-1) + a_2 f(n-2) + \ldots + a_k f(n-k) + g(n), \text{ para todo } n \geq k$$

$g(n)$ satisfaz uma RLH cujo PC é G

$f(n)$ satisfaz uma RLH cujo PC é

$$G(X^k - a_1 X^{k-1} - \ldots - a_{k-2} X^2 - a_{k-1} X - a_k)$$

Corolário 38

Corolário 38

$$g(n) = cn^k r^n$$

Corolário 38

$g(n) = cn^k r^n$ satisfaz uma RLH cujo PC é $(X - r)^{k+1}$

Corolário 39

Corolário 39

$f, g \colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ satisfazem RLHs cujos PCs são F e G

Corolário 39

$f, g \colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ satisfazem RLHs cujos PCs são F e G

$$f + g \text{ satisfaz uma RLH cujo PC é } FG$$

Corolário 39

$f, g \colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ satisfazem RLHs cujos PCs são F e G

$f + g$ satisfaz uma RLH cujo PC é FG

Demonstração.

f satisfaz uma RLH cujo PC é F

Corolário 39

$f, g \colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ satisfazem RLHs cujos PCs são F e G

$$f + g \text{ satisfaz uma RLH cujo PC é } FG$$

Demonstração.

f satisfaz uma RLH cujo PC é $F = X^k - a_1 X^{k-1} - \ldots - a_k$

Corolário 39

$f, g \colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ satisfazem RLHs cujos PCs são F e G

$$f + g \text{ satisfaz uma RLH cujo PC é } FG$$

Demonstração.

f satisfaz uma RLH cujo PC é $F = X^k - a_1 X^{k-1} - \ldots - a_k$
$f(n) = a_1 f(n-1) + \ldots + a_k f(n-k), \;$ para todo $n \geq k$

Corolário 39

$f, g \colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ satisfazem RLHs cujos PCs são F e G

$f + g$ satisfaz uma RLH cujo PC é FG

Demonstração.

f satisfaz uma RLH cujo PC é $F = X^k - a_1 X^{k-1} - \ldots - a_k$
$f(n) = a_1 f(n-1) + \ldots + a_k f(n-k),$ para todo $n \geq k$
$(f + g)(n)$

Corolário 39

$f, g \colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ satisfazem RLHs cujos PCs são F e G

$$f + g \text{ satisfaz uma RLH cujo PC é } FG$$

Demonstração.

f satisfaz uma RLH cujo PC é $F = X^k - a_1 X^{k-1} - \ldots - a_k$
$f(n) = a_1 f(n-1) + \ldots + a_k f(n-k),$ para todo $n \geq k$
$(f+g)(n) = f(n) + g(n)$

Corolário 39

$f, g \colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ satisfazem RLHs cujos PCs são F e G

$$f + g \text{ satisfaz uma RLH cujo PC é } FG$$

Demonstração.

f satisfaz uma RLH cujo PC é $F = X^k - a_1 X^{k-1} - \ldots - a_k$
$f(n) = a_1 f(n-1) + \ldots + a_k f(n-k),$ para todo $n \geq k$
$(f+g)(n) = f(n) + g(n) = a_1 f(n-1) + \ldots + a_k f(n-k) + g(n)$

Corolário 39

$f, g \colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ satisfazem RLHs cujos PCs são F e G

$f + g$ satisfaz uma RLH cujo PC é FG

Demonstração.

f satisfaz uma RLH cujo PC é $F = X^k - a_1 X^{k-1} - \ldots - a_k$
$f(n) = a_1 f(n-1) + \ldots + a_k f(n-k),$ para todo $n \geq k$
$(f+g)(n) = f(n) + g(n) = a_1 f(n-1) + \ldots + a_k f(n-k) + g(n)$
$g(n)$ satisfaz uma RLH cujo PC é G

Corolário 39

$f, g \colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ satisfazem RLHs cujos PCs são F e G

$f + g$ satisfaz uma RLH cujo PC é FG

Demonstração.

f satisfaz uma RLH cujo PC é $F = X^k - a_1 X^{k-1} - \ldots - a_k$
$f(n) = a_1 f(n-1) + \ldots + a_k f(n-k)$, para todo $n \geq k$
$(f+g)(n) = f(n) + g(n) = a_1 f(n-1) + \ldots + a_k f(n-k) + g(n)$
$g(n)$ satisfaz uma RLH cujo PC é G
$f + g$ satisfaz uma RLH cujo PC é $(X^k - a_1 X^{k-1} - \ldots - a_k)G$

Corolário 39

$f, g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ satisfazem RLHs cujos PCs são F e G

$$f + g \text{ satisfaz uma RLH cujo PC é } FG$$

Demonstração.

f satisfaz uma RLH cujo PC é $F = X^k - a_1 X^{k-1} - \ldots - a_k$
$f(n) = a_1 f(n-1) + \ldots + a_k f(n-k),\;$ para todo $n \geq k$
$(f+g)(n) = f(n) + g(n) = a_1 f(n-1) + \ldots + a_k f(n-k) + g(n)$
$g(n)$ satisfaz uma RLH cujo PC é G
$f + g$ satisfaz uma RLH cujo PC é $(X^k - a_1 X^{k-1} - \ldots - a_k)G = FG$

Corolário 39

$f, g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ satisfazem RLHs cujos PCs são F e G

$f + g$ satisfaz uma RLH cujo PC é FG

Demonstração.

f satisfaz uma RLH cujo PC é $F = X^k - a_1 X^{k-1} - \ldots - a_k$
$f(n) = a_1 f(n-1) + \ldots + a_k f(n-k),$ para todo $n \geq k$
$(f+g)(n) = f(n) + g(n) = a_1 f(n-1) + \ldots + a_k f(n-k) + g(n)$
$g(n)$ satisfaz uma RLH cujo PC é G
$f + g$ satisfaz uma RLH cujo PC é $(X^k - a_1 X^{k-1} - \ldots - a_k)G = FG$ (T. 37) $\square$