

Matemática Discreta

Unidade 35: Recorrências Lineares Não Homogêneas (4)

Renato Carmo
David Menotti

Departamento de Informática da UFPR

Segundo Período Especial de 2020

Exercicio 124k

$$f(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n < 2, \\ f(n-1) + f(n-2) + 1, & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

Exercício 124k

$$f(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n < 2, \\ f(n-1) + f(n-2) + 1, & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

Usando a notação do Teorema 37 temos

$$\begin{aligned} a_1 &= 1, \\ a_2 &= 1, \\ g(n) &= 1, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Exercicio 124k

Como

$$g(n) = 1n^0 1^n,$$

Exercício 124k

Como

$$g(n) = 1n^0 1^n,$$

então g satisfaz uma RLH cujo polinômio característico é

$$G = (X - 1)^{0+1} = X - 1$$

Exercício 124k

Como

$$g(n) = 1n^0 1^n,$$

então g satisfaz uma RLH cujo polinômio característico é

$$G = (X - 1)^{0+1} = X - 1$$

Pelo Teorema 37 temos que f pertence ao espaço vetorial cujo polinômio característico é

$$G(X^2 - X - 1) = (X - 1)(X^2 - X - 1),$$

Exercício 124k

Como

$$g(n) = 1n^0 1^n,$$

então g satisfaz uma RLH cujo polinômio característico é

$$G = (X - 1)^{0+1} = X - 1$$

Pelo Teorema 37 temos que f pertence ao espaço vetorial cujo polinômio característico é

$$G(X^2 - X - 1) = (X - 1)(X^2 - X - 1),$$

e cujas raízes são

$$\begin{aligned} r_1 &= 1, \\ r_2 &= \frac{1 - \sqrt{5}}{2}, \\ r_3 &= \frac{1 + \sqrt{5}}{2}. \end{aligned}$$

Exercício 124k

Pelo Corolário 36, temos

$$\begin{aligned}f(n) &= ar_1^n + br_2^n + cr_3^n \\&= a1^n + b\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + c\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \\&= a + b\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + c\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n\end{aligned}$$

Exercício 124k

onde $\{a, b, c\}$ é a solução do sistema

$$f(0) = a + b \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^0 + c \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^0,$$

$$f(1) = a + b \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^1 + c \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^1,$$

$$f(2) = a + b \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^2 + c \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^2,$$

Exercício 124k

$$0 = a + b + c,$$

$$1 = a + b \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right) + c \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right),$$

$$f(0) + f(1) + 1 = a + b \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^2 + c \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^2,$$

Exercício 124k

$$0 = a + b + c,$$

$$1 = a + b \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right) + c \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right),$$

$$f(0) + f(1) + 1 = a + b \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^2 + c \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^2,$$

isto é,

$$0 = a + b + c,$$

$$1 = a + b \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right) + c \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right),$$

$$2 = a + b \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^2 + c \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^2,$$

Exercicio 124k

cuja solução é

$$a = -1,$$

$$b = \frac{5 - 3\sqrt{5}}{10},$$

$$c = \frac{5 + 3\sqrt{5}}{10},$$

Exercício 124k

cuja solução é

$$a = -1,$$

$$b = \frac{5 - 3\sqrt{5}}{10},$$

$$c = \frac{5 + 3\sqrt{5}}{10},$$

e portanto,

$$f(n) = \frac{5 - 3\sqrt{5}}{10} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n + \frac{5 + 3\sqrt{5}}{10} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - 1,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.