

Matemática Discreta

Unidade 39: Somatórios (3)

Renato Carmo
David Menotti

Departamento de Informática da UFPR

Segundo Período Especial de 2020

Exercício 128

Dado $q \in \mathbb{C} - \{0\}$, uma **progressão geométrica**¹ de razão q é uma função $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ satisfazendo

$$\frac{f(n+1)}{f(n)} = q, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Assim, a soma dos n termos iniciais de uma progressão geométrica é dada por

$$s(n) = \sum_{i=0}^{n-1} f(i).$$

- a) Expresse a função f acima por meio de uma recorrência linear homogênea.
- b) Resolva esta recorrência, obtendo assim uma expressão para o termo geral da progressão geométrica.
- c) Dê uma expressão livre de somatórios para $s(n)$.

¹cfr. Exercício 110

Exercício 128a

- a) Exprese a função f acima por meio de uma recorrência linear homogênea.

Exercício 128a

- a) Expresse a função f acima por meio de uma recorrência linear homogênea.

Como

$$f(n+1) = qf(n), \text{ para todo } n \geq 0,$$

Exercício 128a

- a) Expresse a função f acima por meio de uma recorrência linear homogênea.

Como

$$f(n+1) = qf(n), \text{ para todo } n \geq 0,$$

pode-se fazer a troca de variável $n+1 = t$, e então temos $n = t-1$ e

$$f(t) = qf(t-1), \text{ para todo } t \geq 1.$$

Exercício 128a

- a) Expresse a função f acima por meio de uma recorrência linear homogênea.

Como

$$f(n+1) = qf(n), \text{ para todo } n \geq 0,$$

pode-se fazer a troca de variável $n+1 = t$, e então temos $n = t-1$ e

$$f(t) = qf(t-1), \text{ para todo } t \geq 1.$$

Assim podemos expressar f como uma RLH da seguinte forma

$$f(n) = qf(n-1), \text{ para todo } n \geq 1.$$

Exercício 128b

- b) Resolva esta recorrência ($f(n) = qf(n-1)$, para todo $n \geq 1$), obtendo assim uma expressão para o termo geral da progressão geométrica.

Exercício 128b

- b) Resolva esta recorrência ($f(n) = qf(n-1)$, para todo $n \geq 1$), obtendo assim uma expressão para o termo geral da progressão geométrica.

Usando a notação do C. 36 temos que $f(n)$ satisfaz uma RLH cujo PC é $X - q$.

Exercício 128b

- b) Resolva esta recorrência ($f(n) = qf(n-1)$, para todo $n \geq 1$), obtendo assim uma expressão para o termo geral da progressão geométrica.

Usando a notação do C. 36 temos que $f(n)$ satisfaz uma RLH cujo PC é $X - q$.

E daí,

$$f(n) = aq^n,$$

onde a é dado por

$$f(0) = aq^0,$$

Exercício 128b

- b) Resolva esta recorrência ($f(n) = qf(n-1)$, para todo $n \geq 1$), obtendo assim uma expressão para o termo geral da progressão geométrica.

Usando a notação do C. 36 temos que $f(n)$ satisfaz uma RLH cujo PC é $X - q$.

E daí,

$$f(n) = aq^n,$$

onde a é dado por

$$f(0) = aq^0,$$

isto é

$$a = f(0),$$

Exercício 128b

b) Resolva esta recorrência ($f(n) = qf(n-1)$, para todo $n \geq 1$), obtendo assim uma expressão para o termo geral da progressão geométrica.

Usando a notação do C. 36 temos que $f(n)$ satisfaz uma RLH cujo PC é $X - q$.

E daí,

$$f(n) = aq^n,$$

onde a é dado por

$$f(0) = aq^0,$$

isto é

$$a = f(0),$$

e, portanto,

$$f(n) = f(0)q^n$$

Exercício 128b

b) Resolva esta recorrência ($f(n) = qf(n-1)$, para todo $n \geq 1$), obtendo assim uma expressão para o termo geral da progressão geométrica.

Usando a notação do C. 36 temos que $f(n)$ satisfaz uma RLH cujo PC é $X - q$.

E daí,

$$f(n) = aq^n,$$

onde a é dado por

$$f(0) = aq^0,$$

isto é

$$a = f(0),$$

e, portanto,

$$f(n) = f(0)q^n = a_1q^{n'-1}.$$

Exercício 128c

- c) Dê uma expressão livre de somatórios para $s(n)$.

Exercicio 128c

c) Dê uma expressão livre de somatórios para $s(n)$.

Como

$$s(n) = \sum_{i=0}^{n-1} f(i) = \sum_{i=0}^{n-1} f(0) \cdot q^i$$

Exercício 128c

c) Dê uma expressão livre de somatórios para $s(n)$.

Como

$$s(n) = \sum_{i=0}^{n-1} f(i) = \sum_{i=0}^{n-1} f(0) \cdot q^i = s(n-1) + f(0) \cdot q^{n-1}.$$

e $f(n)$ satisfaz uma RLH cujo PC é $(X - q)$,

Exercício 128c

c) Dê uma expressão livre de somatórios para $s(n)$.

Como

$$s(n) = \sum_{i=0}^{n-1} f(i) = \sum_{i=0}^{n-1} f(0) \cdot q^i = s(n-1) + f(0) \cdot q^{n-1}.$$

e $f(n)$ satisfaz uma RLH cujo PC é $(X - q)$, então (C. 40), a função $s(n)$ satisfaz uma RLH cujo PC é $(X - 1)(X - q)$.

Exercício 128c

c) Dê uma expressão livre de somatórios para $s(n)$.

Como

$$s(n) = \sum_{i=0}^{n-1} f(i) = \sum_{i=0}^{n-1} f(0) \cdot q^i = s(n-1) + f(0) \cdot q^{n-1}.$$

e $f(n)$ satisfaz uma RLH cujo PC é $(X - q)$, então (C. 40), a função $s(n)$ satisfaz uma RLH cujo PC é $(X - 1)(X - q)$.

E daí (C. 36),

$$s(n) = a1^n + bq^n = a + bq^n,$$

Exercício 128c

c) Dê uma expressão livre de somatórios para $s(n)$.

Como

$$s(n) = \sum_{i=0}^{n-1} f(i) = \sum_{i=0}^{n-1} f(0) \cdot q^i = s(n-1) + f(0) \cdot q^{n-1}.$$

e $f(n)$ satisfaz uma RLH cujo PC é $(X - q)$, então (C. 40), a função $s(n)$ satisfaz uma RLH cujo PC é $(X - 1)(X - q)$.

E daí (C. 36),

$$s(n) = a1^n + bq^n = a + bq^n,$$

onde a e b são dados por

$$\begin{aligned} s(0) &= a + bq^0 = a + b, \\ s(1) &= a + bq^1 = a + bq, \end{aligned}$$

Exercicio 128c

$$\begin{aligned}s(0) &= a + bq^0 = a + b, \\s(1) &= a + bq^1 = a + bq,\end{aligned}$$

Exercicio 128c

$$\begin{aligned}s(0) &= a + bq^0 = a + b, \\ s(1) &= a + bq^1 = a + bq,\end{aligned}$$

ou seja,

$$s(0) = 0 = a + b,$$

Exercicio 128c

$$\begin{aligned}s(0) &= a + bq^0 = a + b, \\ s(1) &= a + bq^1 = a + bq,\end{aligned}$$

ou seja,

$$s(0) = 0 = a + b,$$

e portanto,

$$b = -a,$$

Exercicio 128c

$$\begin{aligned}s(0) &= a + bq^0 = a + b, \\ s(1) &= a + bq^1 = a + bq,\end{aligned}$$

ou seja,

$$s(0) = 0 = a + b,$$

e portanto,

$$b = -a,$$

e

$$s(1) = f(0) = a + bq = a - aq,$$

e portanto,

$$a = f(0)/(1 - q),$$

Exercicio 128c

$$\begin{aligned}s(0) &= a + bq^0 = a + b, \\ s(1) &= a + bq^1 = a + bq,\end{aligned}$$

ou seja,

$$s(0) = 0 = a + b,$$

e portanto,

$$b = -a,$$

e

$$s(1) = f(0) = a + bq = a - aq,$$

e portanto,

$$a = f(0)/(1 - q),$$

e

$$b = -a = -f(0)/(1 - q).$$

Portanto

$$s(n) = a + bq^n$$

Portanto

$$\begin{aligned} s(n) &= a + bq^n \\ &= \frac{f(0)}{1-q} - \frac{f(0)}{1-q}q^n \end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned} s(n) &= a + bq^n \\ &= \frac{f(0)}{1-q} - \frac{f(0)}{1-q}q^n = \frac{f(0)}{1-q}(1 - q^n) \end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned} s(n) &= a + bq^n \\ &= \frac{f(0)}{1-q} - \frac{f(0)}{1-q}q^n = \frac{f(0)}{1-q}(1-q^n) \\ &= f(0)\frac{q^n-1}{q-1} \end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned} s(n) &= a + bq^n \\ &= \frac{f(0)}{1-q} - \frac{f(0)}{1-q}q^n = \frac{f(0)}{1-q}(1-q^n) \\ &= f(0)\frac{q^n-1}{q-1} = a_1 \frac{(q^{n'}-1)-1}{q-1}. \end{aligned}$$