Matemática Discreta

Unidade 41: Somatórios (5)

Renato Carmo
David Menotti

Departamento de Informática da UFPR

Segundo Período Especial de 2020

Exercicio 131

Dê uma expressão[1] livre de somatórios para $\sum_{i=0}^{n} i2^i$.

[1] cfr. Exercício 46

Exercicio 131

Dê uma expressão[1] livre de somatórios para $\sum_{i=0}^{n} i2^i$.

Fazendo

$$s(n) = \sum_{i=0}^{n} g(i)$$

[1] cfr. Exercício 46

Exercicio 131

Dê uma expressão[1] livre de somatórios para $\sum_{i=0}^{n} i2^i$.

Fazendo

$$s(n) = \sum_{i=0}^{n} g(i) = \sum_{i=0}^{n-1} g(i) + n2^n$$

[1] cfr. Exercício 46

Exercicio 131

Dê uma expressão[1] livre de somatórios para $\sum_{i=0}^{n} i2^i$.

Fazendo

$$s(n) = \sum_{i=0}^{n} g(i) = \sum_{i=0}^{n-1} g(i) + n2^n = s(n-1) + g(n),$$

[1]cfr. Exercício 46

Exercicio 131

Dê uma expressão[1] livre de somatórios para $\sum_{i=0}^{n} i2^i$.

Fazendo

$$s(n) = \sum_{i=0}^{n} g(i) = \sum_{i=0}^{n-1} g(i) + n2^n = s(n-1) + g(n),$$

onde

$$g(n) = n2^n,$$

temos

$$g(n) = 1n^{1}2^n,$$

[1] cfr. Exercício 46

Exercicio 131

Dê uma expressão[1] livre de somatórios para $\sum_{i=0}^{n} i2^i$.

Fazendo

$$s(n) = \sum_{i=0}^{n} g(i) = \sum_{i=0}^{n-1} g(i) + n2^n = s(n-1) + g(n),$$

onde

$$g(n) = n2^n,$$

temos

$$g(n) = 1n^{1}2^n,$$

e daí, do Corolário 38 temos que a função g satisfaz uma RLH cujo PC é

$$G = (X - 2)^{1+1} = (X-2)^2.$$

[1]cfr. Exercício 46

Exercicio 131

E daí, pelo Corolário 40 temos que a função s satisfaz uma RLH cujo PC é

$$(X-1)G = (X-1)(X-2)^2.$$

Exercicio 131

E daí, pelo Corolário 40 temos que a função s satisfaz uma RLH cujo PC é

$$(X-1)G = (X-1)(X-2)^2.$$

Pelo Corolário 36, temos

$$s(n) = an^0 1^n + bn^0 2^n + cn^1 2^n$$

Exercicio 131

E daí, pelo Corolário 40 temos que a função s satisfaz uma RLH cujo PC é

$$(X-1)G = (X-1)(X-2)^2.$$

Pelo Corolário 36, temos

$$s(n) = an^0 1^n + bn^0 2^n + cn^1 2^n = a + b2^n + cn2^n$$

Exercicio 131

E daí, pelo Corolário 40 temos que a função s satisfaz uma RLH cujo PC é

$$(X-1)G = (X-1)(X-2)^2.$$

Pelo Corolário 36, temos

$$s(n) = an^0 1^n + bn^0 2^n + cn^1 2^n = a + b2^n + cn2^n$$

onde (a, b, c) é a solução do sistema

$$\begin{array}{rcl} s(0) & = & a + b.2^0 + c.0.2^0, \\ s(1) & = & a + b.2^1 + c.1.2^1, \\ s(2) & = & a + b.2^2 + c.2.2^2, \end{array}$$

Exercicio 131

E daí, pelo Corolário 40 temos que a função s satisfaz uma RLH cujo PC é

$$(X-1)G = (X-1)(X-2)^2.$$

Pelo Corolário 36, temos

$$s(n) = an^0 1^n + bn^0 2^n + cn^1 2^n = a + b2^n + cn2^n$$

onde (a, b, c) é a solução do sistema

$$\begin{aligned} s(0) &= a + b.2^0 + c.0.2^0, \\ s(1) &= a + b.2^1 + c.1.2^1, \\ s(2) &= a + b.2^2 + c.2.2^2, \end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned} \color{red}{0} &= a + b(1) + c(0)1, \\ 0 + \color{red}{12^1} &= a + b(2) + c(1)2, \\ 0 + 12^1 + \color{red}{22^2} &= a + b(4) + c(2)4. \end{aligned}$$

Exercicio 131

Ou seja,

$$\begin{aligned} 0 &= a + b, \\ 2 &= a + 2b + 2c, \\ 10 &= a + 4b + 8c, \end{aligned}$$

Exercicio 131

Ou seja,

$$\begin{aligned} 0 &= a + b, \\ 2 &= a + 2b + 2c, \\ 10 &= a + 4b + 8c, \end{aligned}$$

cuja solução é

$$a = 2, b = -2, c = 2.$$

Exercicio 131

Ou seja,

$$\begin{aligned} 0 &= a + b, \\ 2 &= a + 2b + 2c, \\ 10 &= a + 4b + 8c, \end{aligned}$$

cuja solução é

$$a = 2, b = -2, c = 2.$$

e portanto,

$$s(n) = a + b2^n + cn2^n$$

Exercicio 131

Ou seja,

$$\begin{aligned} 0 &= a + b, \\ 2 &= a + 2b + 2c, \\ 10 &= a + 4b + 8c, \end{aligned}$$

cuja solução é

$$a = 2, b = -2, c = 2.$$

e portanto,

$$s(n) = a + b2^n + cn2^n = 2 - 2 \times 2^n + 2n2^n,$$

Exercicio 131

Ou seja,

$$\begin{aligned} 0 &= a + b, \\ 2 &= a + 2b + 2c, \\ 10 &= a + 4b + 8c, \end{aligned}$$

cuja solução é

$$a = 2, b = -2, c = 2.$$

e portanto,

$$\begin{aligned} s(n) &= a + b2^n + cn2^n = 2 - 2 \times 2^n + 2n2^n, \\ &= 2^{n+1}(n-1) + 2 \end{aligned}$$

Exercicio 131

Ou seja,

$$\begin{aligned} 0 &= a + b, \\ 2 &= a + 2b + 2c, \\ 10 &= a + 4b + 8c, \end{aligned}$$

cuja solução é

$$a = 2, b = -2, c = 2.$$

e portanto,

$$\begin{aligned} s(n) &= a + b2^n + cn2^n = 2 - 2 \times 2^n + 2n2^n, \\ &= 2^{n+1}(n-1) + 2, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$