

# Matemática Discreta

## Unidade 47: Produto Cartesiano (1)

Renato Carmo  
David Menotti

Departamento de Informática da UFPR

Segundo Período Especial de 2020

## Teorema 49

### Teorema

*Se  $A$  é um conjunto finito e  $U$  é um conjunto com um único elemento, então,*

$$|U \times A| = |A|.$$

### Teorema

*Se  $A$  é um conjunto finito e  $U$  é um conjunto com um único elemento, então,*

$$|U \times A| = |A|.$$

## Teorema 49

### Demonstração.

Seja  $A$  um conjunto finito e seja  $U = \{u\}$  um conjunto com um único elemento.

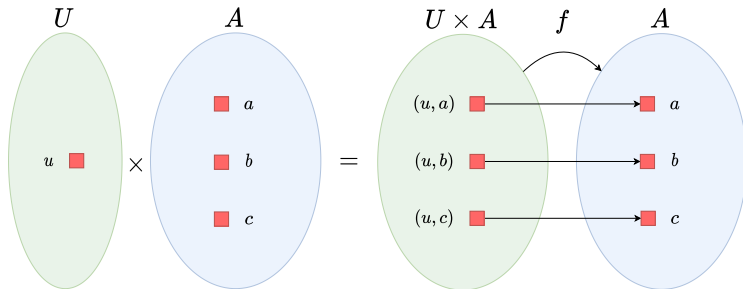
## Teorema 49

### Demonstração.

Seja  $A$  um conjunto finito e seja  $U = \{u\}$  um conjunto com um único elemento. Para provar que

$$|U \times A| = |A|,$$

basta provar que a função  $(u, a) \mapsto a$  é uma bijeção  $U \times A \rightarrow A$ .



## Teorema 50

### Teorema

*Se  $A$  e  $B$  são conjuntos finitos, então*

$$|A \times B| = |A||B|.$$

## Teorema 50

Demonstração.

Sejam  $A$  e  $B$  conjuntos finitos. Vamos provar que

$$|A \times B| = |A||B|.$$

## Teorema 50

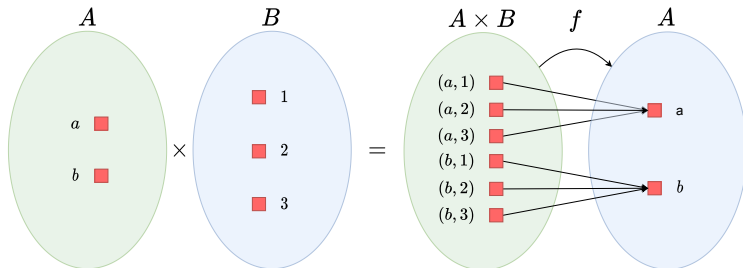
### Demonstração.

Sejam  $A$  e  $B$  conjuntos finitos. Vamos provar que

$$|A \times B| = |A||B|.$$

Seja  $f: A \times B \rightarrow A$  a função dada por

$$f(a, b) = a.$$



## Teorema 50

Demonstração.

Pelo Corolário 46 temos

$$A \times B = \bigcup_{a \in f(A \times B)} f^{-1}(a) = \bigcup_{a \in A} f^{-1}(a),$$

## Teorema 50

### Demonstração.

Pelo Corolário 46 temos

$$A \times B = \bigcup_{a \in f(A \times B)} f^{-1}(a) = \bigcup_{a \in A} f^{-1}(a),$$

e para cada  $a \in A$ ,

$$f^{-1}(a) = \{(a, b) \in A \times B \mid b \in B\} = \{a\} \times B \stackrel{T}{\sim} B,$$

## Teorema 50

Demonstração.

e portanto,

$$|f^{-1}(a)| \stackrel{C. 42}{=} |B|,$$

## Teorema 50

Demonstração.

e portanto,

$$|f^{-1}(a)| \stackrel{\text{C. 42}}{=} |B|,$$

e conseqüentemente,

$$|A \times B| = \left| \bigcup_{a \in A} f^{-1}(a) \right| \stackrel{\text{C. 44}}{=} \sum_{a \in A} |f^{-1}(a)| = \sum_{a \in A} |B| \stackrel{\text{T. 4}}{=} |A| |B|.$$

