

Matemática Discreta

Unidade 62: Permutações

Renato Carmo

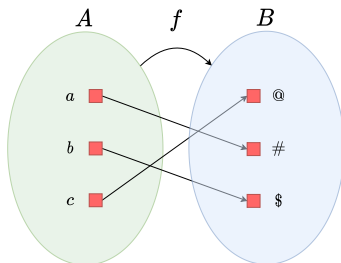
David Menotti

Departamento de Informática da UFPR

Segundo Período Especial de 2020

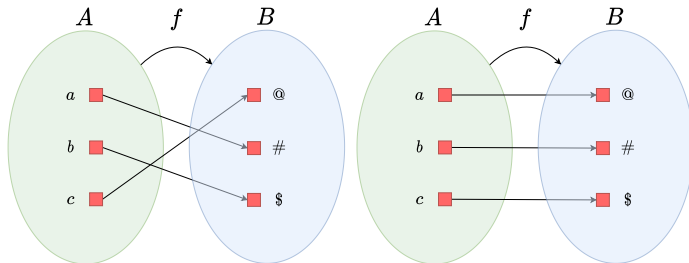
Corolário

Se A e B são conjuntos finitos com o mesmo número de elementos, o número de funções bijetoras $A \rightarrow B$ é $|A|!$.



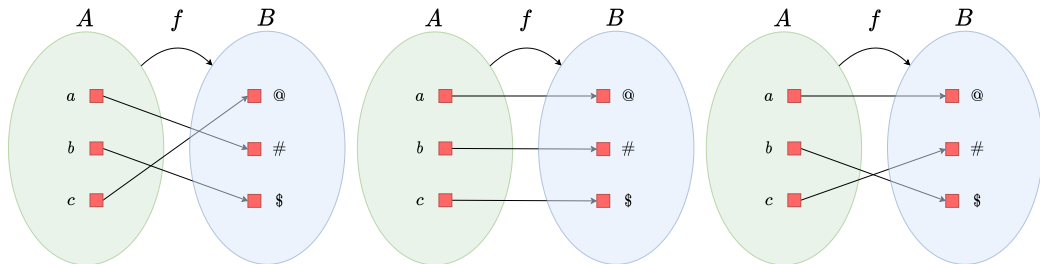
Corolário

Se A e B são conjuntos finitos com o mesmo número de elementos, o número de funções bijetoras $A \rightarrow B$ é $|A|!$.



Corolário

Se A e B são conjuntos finitos com o mesmo número de elementos, o número de funções bijetoras $A \rightarrow B$ é $|A|!$.



Corolário 64

Demonstração.

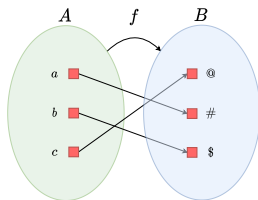
Sejam A e B conjuntos finitos com o mesmo número de elementos.

Corolário 64

Demonstração.

Sejam A e B conjuntos finitos com o mesmo número de elementos.

Então cada função injetora $A \rightarrow B$



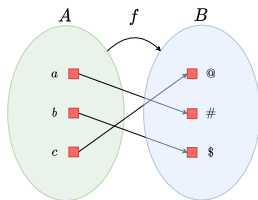
é bijetora e

Corolário 64

Demonstração.

Sejam A e B conjuntos finitos com o mesmo número de elementos.

Então cada função injetora $A \rightarrow B$



é bijetora e o número de tais funções é

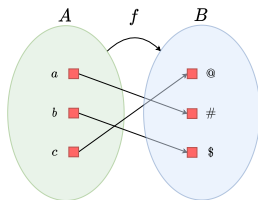
$$|B_A| = |B|_{|A|} =$$

Corolário 64

Demonstração.

Sejam A e B conjuntos finitos com o mesmo número de elementos.

Então cada função injetora $A \rightarrow B$



é bijetora e o número de tais funções é

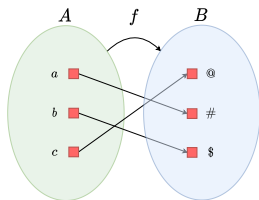
$$|B_A| = |B|_{|A|} = |A|_{|A|} =$$

Corolário 64

Demonstração.

Sejam A e B conjuntos finitos com o mesmo número de elementos.

Então cada função injetora $A \rightarrow B$



é bijetora e o número de tais funções é

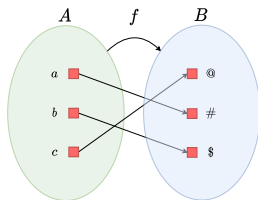
$$|B_A| = |B|_{|A|} = |A|_{|A|} = \frac{|A|!}{(|A| - |A|)!} =$$

Corolário 64

Demonstração.

Sejam A e B conjuntos finitos com o mesmo número de elementos.

Então cada função injetora $A \rightarrow B$



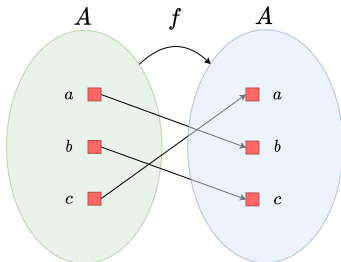
é bijetora e o número de tais funções é

$$|B_A| = |B|_{|A|} = |A|_{|A|} = \frac{|A|!}{(|A| - |A|)!} = \frac{|A|!}{0!} = |A|!.$$



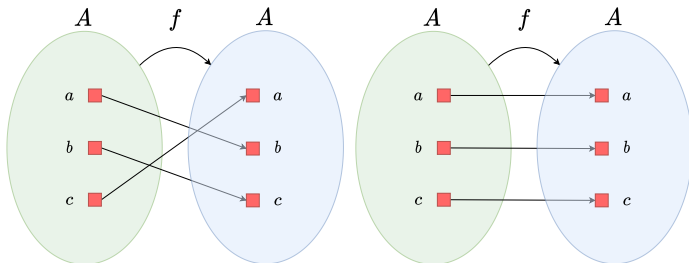
Permutações

Bijeções $A \rightarrow A$ também são conhecidas pelo nome de **permutações** sobre A .



Permutações

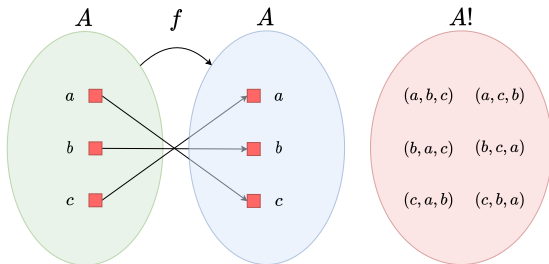
Bijeções $A \rightarrow A$ também são conhecidas pelo nome de **permutações** sobre A .



Corolário 65

Corolário

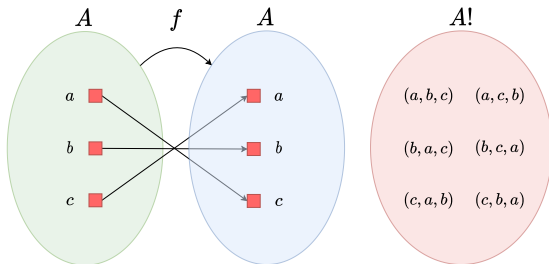
O número de permutações sobre um conjunto de n elementos é $n!$.



Corolário 65

Corolário

O número de permutações sobre um conjunto de n elementos é $n!$.



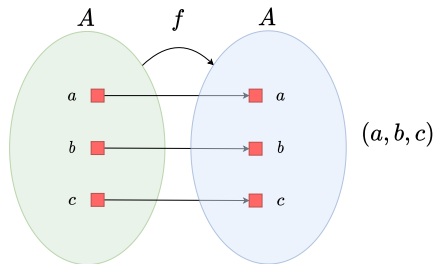
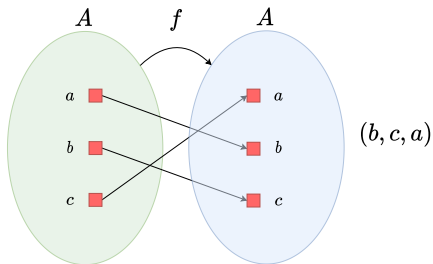
O conjunto das permutações sobre um conjunto A será denotado $A!$.

Funções e Sequências

Na correspondência natural entre funções $A \rightarrow A$ e sequências de $A^{|A|}$,

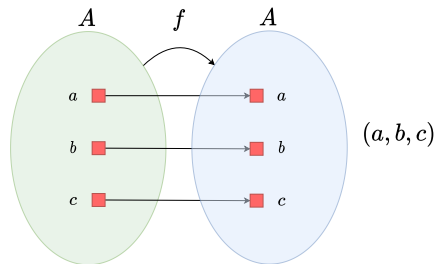
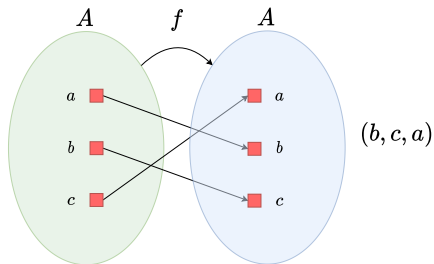
Funções e Sequências

Na correspondência natural entre funções $A \rightarrow A$ e sequências de $A^{|A|}$, funções bijetoras sobre A correspondem a sequências sobre A onde cada elemento de A aparece exatamente uma vez.



Funções e Sequências

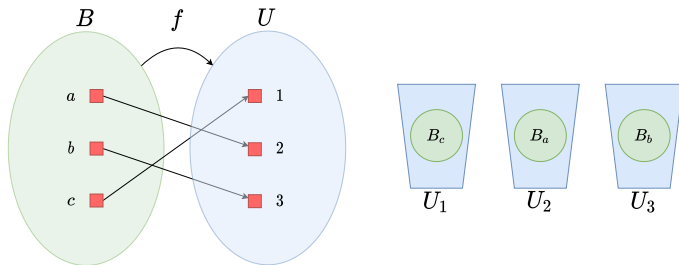
Na correspondência natural entre funções $A \rightarrow A$ e sequências de $A^{|A|}$, funções bijetoras sobre A correspondem a sequências sobre A onde cada elemento de A aparece exatamente uma vez.



Sequências assim também são chamadas de **permutações** dos elementos de A .

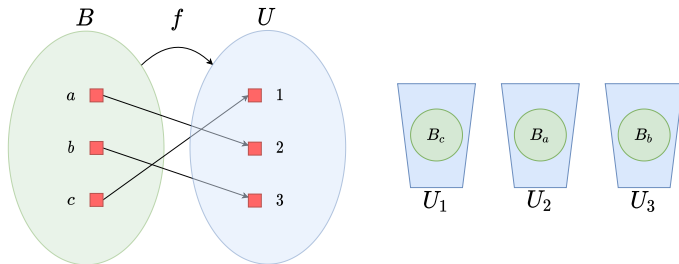
Bolas e Urnas

No modelo de **bolas e urnas**, funções bijetoras $B \rightarrow U$ correspondem a distribuições das



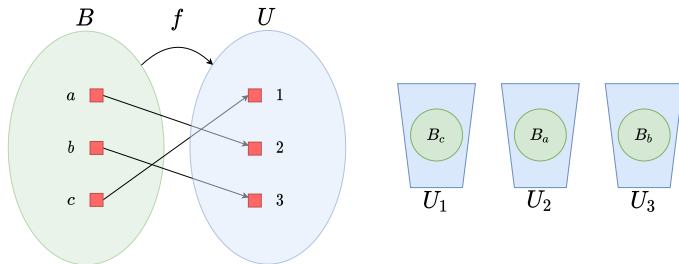
Bolas e Urnas

No modelo de **bolas e urnas**, funções bijetoras $B \rightarrow U$ correspondem a distribuições das **distintas** bolas de B pelas



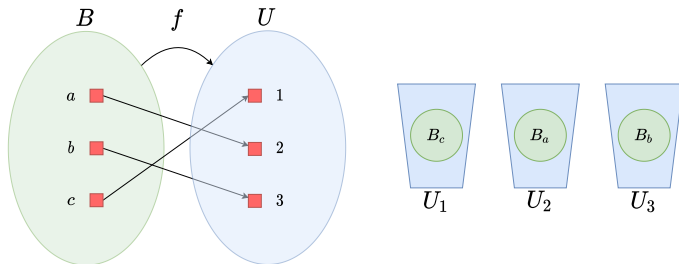
Bolas e Urnas

No modelo de **bolas e urnas**, funções bijetoras $B \rightarrow U$ correspondem a distribuições das **distintas** bolas de B pelas **distintas** urnas em U de maneira que



Bolas e Urnas

No modelo de **bolas e urnas**, funções bijetoras $B \rightarrow U$ correspondem a distribuições das **distintas** bolas de B pelas **distintas** urnas em U de maneira que cada urna tenha exatamente uma bola.



Corolário

Existem $n!$ maneiras de distribuir n bolas distintas por n urnas distintas de tal maneira que cada urna receba exatamente uma bola.

Exercícios 177

Colocando todos os números obtidos pelas permutações dos dígitos de $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ em ordem crescente, qual o lugar ocupado pelo número 43521?

Exercícios 177

Colocando todos os números obtidos pelas permutações dos dígitos de $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ em ordem crescente, qual o lugar ocupado pelo número 43521?

O conjunto dos números obtidos pelas permutações dos dígitos de $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ que são menores que 43521 é

$$M = \{1\} \times \{2, 3, 4, 5\}! \cup \{2\} \times \{1, 3, 4, 5\}! \cup \{3\} \times \{1, 2, 4, 5\}!$$

Exercícios 177

Colocando todos os números obtidos pelas permutações dos dígitos de $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ em ordem crescente, qual o lugar ocupado pelo número 43 521?

O conjunto dos números obtidos pelas permutações dos dígitos de $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ que são menores que 43 521 é

$$\begin{aligned} M = & \{1\} \times \{2, 3, 4, 5\}! \cup \{2\} \times \{1, 3, 4, 5\}! \cup \{3\} \times \{1, 2, 4, 5\}! \\ & \cup \{4\} \times \{1\} \times \{2, 3, 5\}! \cup \{4\} \times \{2\} \times \{1, 3, 5\}! \end{aligned}$$

Exercícios 177

Colocando todos os números obtidos pelas permutações dos dígitos de $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ em ordem crescente, qual o lugar ocupado pelo número 43 521?

O conjunto dos números obtidos pelas permutações dos dígitos de $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ que são menores que 43 521 é

$$\begin{aligned} M = & \{1\} \times \{2, 3, 4, 5\}! \cup \{2\} \times \{1, 3, 4, 5\}! \cup \{3\} \times \{1, 2, 4, 5\}! \\ & \cup \{4\} \times \{1\} \times \{2, 3, 5\}! \cup \{4\} \times \{2\} \times \{1, 3, 5\}! \\ & \cup \{4\} \times \{3\} \times \{1\} \times \{2, 5\}! \cup \{4\} \times \{3\} \times \{2\} \times \{1, 5\}! \end{aligned}$$

Exercícios 177

Colocando todos os números obtidos pelas permutações dos dígitos de $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ em ordem crescente, qual o lugar ocupado pelo número 43 521?

O conjunto dos números obtidos pelas permutações dos dígitos de $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ que são menores que 43 521 é

$$\begin{aligned} M = & \{1\} \times \{2, 3, 4, 5\}! \cup \{2\} \times \{1, 3, 4, 5\}! \cup \{3\} \times \{1, 2, 4, 5\}! \\ & \cup \{4\} \times \{1\} \times \{2, 3, 5\}! \cup \{4\} \times \{2\} \times \{1, 3, 5\}! \\ & \cup \{4\} \times \{3\} \times \{1\} \times \{2, 5\}! \cup \{4\} \times \{3\} \times \{2\} \times \{1, 5\}! \\ & \cup \{4\} \times \{3\} \times \{5\} \times \{1\} \times \{2\}! \end{aligned}$$

e daí,

$$\begin{aligned} |M| = & |\{1\} \times \{2, 3, 4, 5\}! \cup \{2\} \times \{1, 3, 4, 5\}! \cup \{3\} \times \{1, 2, 4, 5\}! \\ & \cup \{4\} \times \{1\} \times \{2, 3, 5\}! \cup \{4\} \times \{2\} \times \{1, 3, 5\}! \\ & \cup \{4\} \times \{3\} \times \{1\} \times \{2, 5\}! \cup \{4\} \times \{3\} \times \{2\} \times \{1, 5\}! \\ & \cup \{4\} \times \{3\} \times \{5\} \times \{1\} \times \{2\}!| \end{aligned}$$

e daí,

$$\begin{aligned}
 |M| = & |\{1\} \times \{2, 3, 4, 5\}| \cup |\{2\} \times \{1, 3, 4, 5\}| \cup |\{3\} \times \{1, 2, 4, 5\}| \\
 & \cup |\{4\} \times \{1\} \times \{2, 3, 5\}| \cup |\{4\} \times \{2\} \times \{1, 3, 5\}| \\
 & \cup |\{4\} \times \{3\} \times \{1\} \times \{2, 5\}| \cup |\{4\} \times \{3\} \times \{2\} \times \{1, 5\}| \\
 & \cup |\{4\} \times \{3\} \times \{5\} \times \{1\} \times \{2\}|
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \stackrel{\text{C. 44}}{=} |\{1\} \times \{2, 3, 4, 5\}| + |\{2\} \times \{1, 3, 4, 5\}| + |\{3\} \times \{1, 2, 4, 5\}| \\
 & \quad + |\{4\} \times \{1\} \times \{2, 3, 5\}| + |\{4\} \times \{2\} \times \{1, 3, 5\}| \\
 & \quad + |\{4\} \times \{3\} \times \{1\} \times \{2, 5\}| + |\{4\} \times \{3\} \times \{2\} \times \{1, 5\}| \\
 & \quad + |\{4\} \times \{3\} \times \{5\} \times \{1\} \times \{2\}|
 \end{aligned}$$

e daí,

$$\begin{aligned} |M| \stackrel{C. 44}{=} & |\{1\} \times \{2, 3, 4, 5\}| + |\{2\} \times \{1, 3, 4, 5\}| + |\{3\} \times \{1, 2, 4, 5\}| \\ & + |\{4\} \times \{1\} \times \{2, 3, 5\}| + |\{4\} \times \{2\} \times \{1, 3, 5\}| \\ & + |\{4\} \times \{3\} \times \{1\} \times \{2, 5\}| + |\{4\} \times \{3\} \times \{2\} \times \{1, 5\}| \\ & + |\{4\} \times \{3\} \times \{5\} \times \{1\} \times \{2\}| \end{aligned}$$

Exercícios 177

e daí,

$$\begin{aligned} |M| &\stackrel{C. 44}{=} |\{1\} \times \{2, 3, 4, 5\}| + |\{2\} \times \{1, 3, 4, 5\}| + |\{3\} \times \{1, 2, 4, 5\}| \\ &\quad + |\{4\} \times \{1\} \times \{2, 3, 5\}| + |\{4\} \times \{2\} \times \{1, 3, 5\}| \\ &\quad + |\{4\} \times \{3\} \times \{1\} \times \{2, 5\}| + |\{4\} \times \{3\} \times \{2\} \times \{1, 5\}| \\ &\quad + |\{4\} \times \{3\} \times \{5\} \times \{1\} \times \{2\}| \\ &\stackrel{C. 51}{=} |\{1\}| |\{2, 3, 4, 5\}| + |\{2\}| |\{1, 3, 4, 5\}| + |\{3\}| |\{1, 2, 4, 5\}| \\ &\quad + |\{4\}| |\{1\}| |\{2, 3, 5\}| + |\{4\}| |\{2\}| |\{1, 3, 5\}| \\ &\quad + |\{4\}| |\{3\}| |\{1\}| |\{2, 5\}| + |\{4\}| |\{3\}| |\{2\}| |\{1, 5\}| \\ &\quad + |\{4\}| |\{3\}| |\{5\}| |\{1\}| |\{2\}| \end{aligned}$$

e daí,

$$\begin{aligned}
 |M| \stackrel{C. 51}{=} & |\{1\}| |\{2, 3, 4, 5\}| + |\{2\}| |\{1, 3, 4, 5\}| + |\{3\}| |\{1, 2, 4, 5\}| \\
 & + |\{4\}| |\{1\}| |\{2, 3, 5\}| + |\{4\}| |\{2\}| |\{1, 3, 5\}| \\
 & + |\{4\}| |\{3\}| |\{1\}| |\{2, 5\}| + |\{4\}| |\{3\}| |\{2\}| |\{1, 5\}| \\
 & + |\{4\}| |\{3\}| |\{5\}| |\{1\}| |\{2\}|
 \end{aligned}$$

Exercícios 177

e daí,

$$\begin{aligned} |M| &\stackrel{C. 51}{=} |\{1\}| |\{2, 3, 4, 5\}|! + |\{2\}| |\{1, 3, 4, 5\}|! + |\{3\}| |\{1, 2, 4, 5\}|! \\ &\quad + |\{4\}| |\{1\}| |\{2, 3, 5\}|! + |\{4\}| |\{2\}| |\{1, 3, 5\}|! \\ &\quad + |\{4\}| |\{3\}| |\{1\}| |\{2, 5\}|! + |\{4\}| |\{3\}| |\{2\}| |\{1, 5\}|! \\ &\quad + |\{4\}| |\{3\}| |\{5\}| |\{1\}| |\{2\}|! \\ &\stackrel{C. 65}{=} 1 \times |\{2, 3, 4, 5\}|! + 1 \times |\{1, 3, 4, 5\}|! + 1 \times |\{1, 2, 4, 5\}|! \\ &\quad + 1 \times 1 \times |\{2, 3, 5\}|! + 1 \times 1 \times |\{1, 3, 5\}|! \\ &\quad + 1 \times 1 \times 1 \times |\{2, 5\}|! + 1 \times 1 \times 1 \times |\{1, 5\}|! \\ &\quad + 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times |\{2\}|! \end{aligned}$$

e daí,

$$\begin{aligned} |M| \stackrel{\text{C. 65}}{=} & 1 \times |\{2, 3, 4, 5\}|! + 1 \times |\{1, 3, 4, 5\}|! + 1 \times |\{1, 2, 4, 5\}|! \\ & + 1 \times 1 \times |\{2, 3, 5\}|! + 1 \times 1 \times |\{1, 3, 5\}|! \\ & + 1 \times 1 \times 1 \times |\{2, 5\}|! + 1 \times 1 \times 1 \times |\{1, 5\}|! \\ & + 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times |\{2\}|! \end{aligned}$$

Exercícios 177

e daí,

$$\begin{aligned} |M| &\stackrel{C. 65}{=} 1 \times |\{2, 3, 4, 5\}|! + 1 \times |\{1, 3, 4, 5\}|! + 1 \times |\{1, 2, 4, 5\}|! \\ &\quad + 1 \times 1 \times |\{2, 3, 5\}|! + 1 \times 1 \times |\{1, 3, 5\}|! \\ &\quad + 1 \times 1 \times 1 \times |\{2, 5\}|! + 1 \times 1 \times 1 \times |\{1, 5\}|! \\ &\quad + 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times |\{2\}|! \\ &= 4! + 4! + 4! + 3! + 3! + 2! + 2! + 1! \\ &= 3 \times 4! + 2 \times 3! + 2 \times 2! + 1! \\ &= 3 \times 24 + 2 \times 6 + 2 \times 2 + 1 \\ &= 89. \end{aligned}$$

Exercícios 177

e daí,

$$\begin{aligned}|M| &\stackrel{C. 65}{=} 1 \times |\{2, 3, 4, 5\}|! + 1 \times |\{1, 3, 4, 5\}|! + 1 \times |\{1, 2, 4, 5\}|! \\&\quad + 1 \times 1 \times |\{2, 3, 5\}|! + 1 \times 1 \times |\{1, 3, 5\}|! \\&\quad + 1 \times 1 \times 1 \times |\{2, 5\}|! + 1 \times 1 \times 1 \times |\{1, 5\}|! \\&\quad + 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times |\{2\}|! \\&= 4! + 4! + 4! + 3! + 3! + 2! + 2! + 1! \\&= 3 \times 4! + 2 \times 3! + 2 \times 2! + 1! \\&= 3 \times 24 + 2 \times 6 + 2 \times 2 + 1 \\&= 89.\end{aligned}$$

O lugar ocupado pelo número 43521 é, portanto, 90.