

# Matemática Discreta

## Unidade 63: Permutações Circulares

Renato Carmo  
David Menotti

Departamento de Informática da UFPR

Segundo Período Especial de 2020

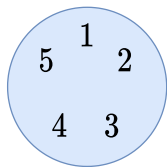
# Permutações Circulares

Dizemos que duas permutações sobre  $A$  são **circularmente equivalentes** se “preservam as vizinhanças”.

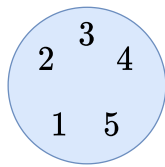
# Permutações Circulares

Dizemos que duas permutações sobre  $A$  são **circularmente equivalentes** se “preservam as vizinhanças”.

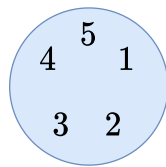
Por exemplo,  $(1, 2, 3, 4, 5)$ ,  $(3, 4, 5, 1, 2)$  e  $(5, 1, 2, 3, 4)$  são permutações circularmente equivalentes sobre  $[5]$ .



$(1, 2, 3, 4, 5)$



$(3, 4, 5, 1, 2)$

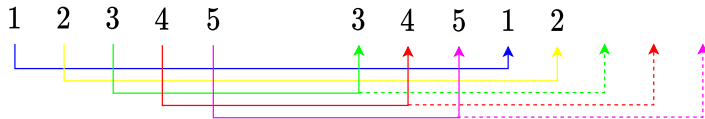
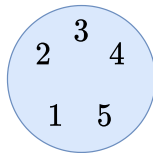
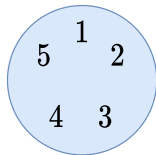


$(5, 1, 2, 3, 4)$

# Permutações Circulares

Dizemos que duas permutações sobre  $A$  são **circularmente equivalentes** se “preservam as vizinhanças”.

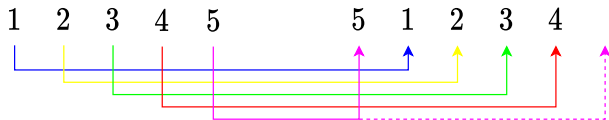
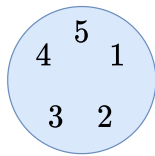
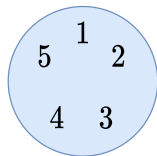
Por exemplo,  $(1, 2, 3, 4, 5)$ ,  $(3, 4, 5, 1, 2)$  e  $(5, 1, 2, 3, 4)$  são permutações circularmente equivalentes sobre  $[5]$ .



# Permutações Circulares

Dizemos que duas permutações sobre  $A$  são **circularmente equivalentes** se “preservam as vizinhanças”.

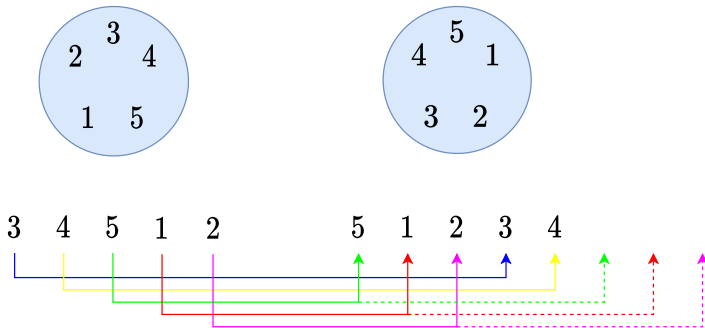
Por exemplo,  $(1, 2, 3, 4, 5)$ ,  $(3, 4, 5, 1, 2)$  e  $(5, 1, 2, 3, 4)$  são permutações circularmente equivalentes sobre  $[5]$ .



# Permutações Circulares

Dizemos que duas permutações sobre  $A$  são **circularmente equivalentes** se “preservam as vizinhanças”.

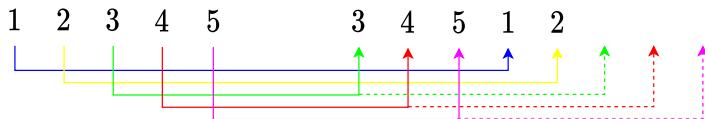
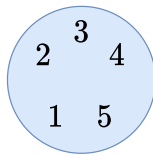
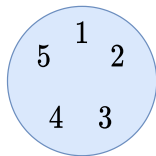
Por exemplo,  $(1, 2, 3, 4, 5)$ ,  $(3, 4, 5, 1, 2)$  e  $(5, 1, 2, 3, 4)$  são permutações circularmente equivalentes sobre  $[5]$ .



# Permutações Circulares

Mais formalmente, dizemos que duas sequências  $u = (u_1, \dots, u_n)$  e  $v = (v_1, \dots, v_n)$  são circularmente equivalentes se existe  $k \in [0..n-1]$  tal que

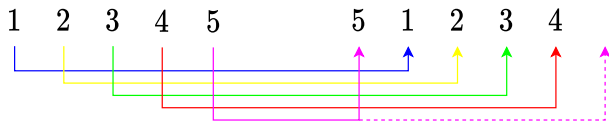
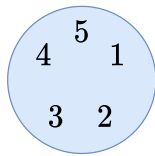
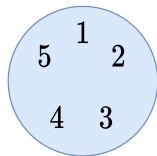
$$u_i = v_{i+k \bmod n}, \text{ para todo } i \in [n].$$



# Permutações Circulares

Mais formalmente, dizemos que duas sequências  $u = (u_1, \dots, u_n)$  e  $v = (v_1, \dots, v_n)$  são circularmente equivalentes se existe  $k \in [0..n-1]$  tal que

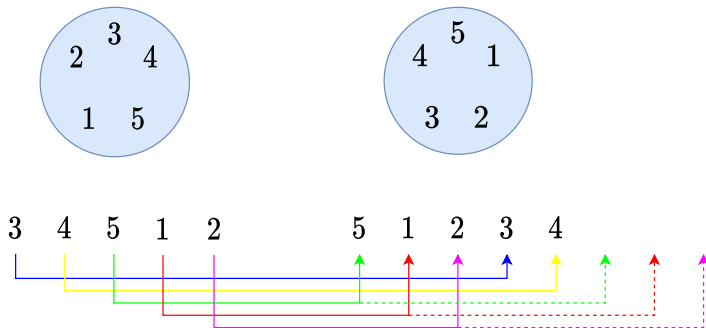
$$u_i = v_{i+k \bmod n}, \text{ para todo } i \in [n].$$



# Permutações Circulares

Mais formalmente, dizemos que duas sequências  $u = (u_1, \dots, u_n)$  e  $v = (v_1, \dots, v_n)$  são circularmente equivalentes se existe  $k \in [0..n-1]$  tal que

$$u_i = v_{i+k \bmod n}, \text{ para todo } i \in [n].$$



# Permutações Circulares

O conjunto das permutações sobre um conjunto finito  $A$  que **não** são circularmente equivalentes é conhecido pelo nome de conjunto das **permutações circulares** sobre  $A$ .

# Permutações Circulares

O conjunto das permutações sobre um conjunto finito  $A$  que **não** são circularmente equivalentes é conhecido pelo nome de conjunto das **permutações circulares** sobre  $A$ .

Qual o número de permutações sobre  $[n]$  que não são circularmente equivalentes?

$$[3]!$$

(1, 2, 3)    (1, 3, 2)

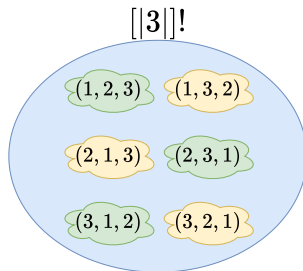
(2, 1, 3)    (2, 3, 1)

(3, 1, 2)    (3, 2, 1)

# Permutações Circulares

O conjunto das permutações sobre um conjunto finito  $A$  que **não** são circularmente equivalentes é conhecido pelo nome de conjunto das **permutações circulares** sobre  $A$ .

Qual o número de permutações sobre  $[n]$  que não são circularmente equivalentes?



# Permutações Circulares

O conjunto das permutações sobre um conjunto finito  $A$  que **não** são circularmente equivalentes é conhecido pelo nome de conjunto das **permutações circulares** sobre  $A$ . Qual o número de permutações sobre  $[n]$  que não são circularmente equivalentes?

$$[4]!$$

(1, 2, 3, 4) (1, 2, 4, 3) (2, 1, 3, 4) (2, 1, 4, 3)

(1, 3, 2, 4) (1, 3, 4, 2) (2, 3, 1, 4) (2, 3, 4, 1)

(1, 4, 2, 3) (1, 4, 3, 2) (2, 4, 1, 3) (2, 4, 3, 1)

(3, 1, 2, 4) (3, 1, 4, 2) (4, 1, 2, 3) (4, 1, 3, 2)

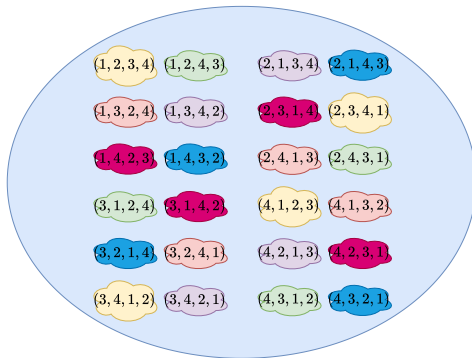
(3, 2, 1, 4) (3, 2, 4, 1) (4, 2, 1, 3) (4, 2, 3, 1)

(3, 4, 1, 2) (3, 4, 2, 1) (4, 3, 1, 2) (4, 3, 2, 1)

# Permutações Circulares

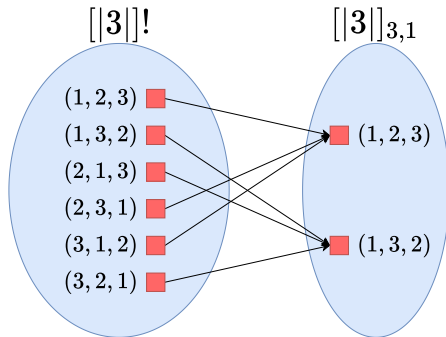
O conjunto das permutações sobre um conjunto finito  $A$  que **não** são circularmente equivalentes é conhecido pelo nome de conjunto das **permutações circulares** sobre  $A$ . Qual o número de permutações sobre  $[n]$  que não são circularmente equivalentes?

$$[4]!$$



# Permutações Circulares

Seja  $F: [n]! \rightarrow [n]_{n,1}$  a função que associa a cada permutação de  $f \in [n]!$  a permutação circularmente equivalente a  $f$  que começa por 1, isto é, se

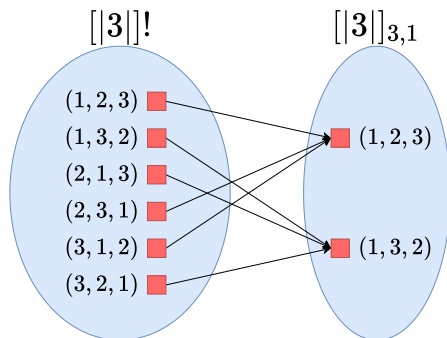


# Permutações Circulares

Seja  $F: [n]! \rightarrow [n]_{n,1}$  a função que associa a cada permutação de  $f \in [n]!$  a permutação circularmente equivalente a  $f$  que começa por 1, isto é, se

$$f = (a_1, \dots, a_{k-1}, a_k = 1, a_{k+1}, \dots, a_n),$$

então



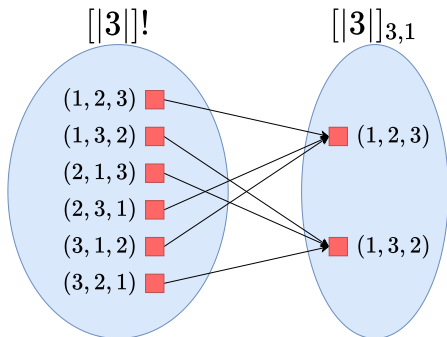
# Permutações Circulares

Seja  $F: [n]! \rightarrow [n]_{n,1}$  a função que associa a cada permutação de  $f \in [n]!$  a permutação circularmente equivalente a  $f$  que começa por 1, isto é, se

$$f = (a_1, \dots, a_{k-1}, a_k = 1, a_{k+1}, \dots, a_n),$$

então

$$F(f) = (1, a_{k+1}, \dots, a_1, \dots, a_{k-1}).$$



## Permutações Circulares

Então, para cada permutação  $f \in [n]!$ , o conjunto  $F^{-1}((1, a_{k+1}, \dots, a_1, \dots, a_{k-1}))$  é o conjunto das permutações circularmente equivalentes a  $f$ .

## Permutações Circulares

Então, para cada permutação  $f \in [n]!$ , o conjunto  $F^{-1}((1, a_{k+1}, \dots, a_1, \dots, a_{k-1}))$  é o conjunto das permutações circularmente equivalentes a  $f$ .

E a quantidade de tais conjuntos é o número de permutações sobre  $[n]$  **não** circularmente equivalentes.

# Permutações Circulares

Então, para cada permutação  $f \in [n]!$ , o conjunto  $F^{-1}((1, a_{k+1}, \dots, a_1, \dots, a_{k-1}))$  é o conjunto das permutações circularmente equivalentes a  $f$ .

E a quantidade de tais conjuntos é o número de permutações sobre  $[n]$  **não** circularmente equivalentes.

Noutras palavras, o número de permutações não circularmente equivalentes sobre  $[n]$  é  $|[n]_{n,1}|$ .

# Permutações Circulares

Do Corolário 46 temos

$$|[n]| = \sum_{f \in F([n])} |F^{-1}(f)| =$$

# Permutações Circulares

Do Corolário 46 temos

$$|[n]| = \sum_{f \in F([n])} |F^{-1}(f)| = \sum_{f \in [n]_{n,1}} |F^{-1}(f)| =$$

# Permutações Circulares

Do Corolário 46 temos

$$|[n]| = \sum_{f \in F([n])} |F^{-1}(f)| = \sum_{f \in [n]_{n,1}} |F^{-1}(f)| = \sum_{f \in [n]_{n,1}} n =$$

# Permutações Circulares

Do Corolário 46 temos

$$|[n]| = \sum_{f \in F([n])} |F^{-1}(f)| = \sum_{f \in [n]_{n,1}} |F^{-1}(f)| = \sum_{f \in [n]_{n,1}} n = n|[n]_{n,1}|,$$

ou seja,

# Permutações Circulares

Do Corolário 46 temos

$$|[n]!| = \sum_{f \in F([n]!)} |F^{-1}(f)| = \sum_{f \in [n]_{n,1}} |F^{-1}(f)| = \sum_{f \in [n]_{n,1}} n = n|[n]_{n,1}|,$$

ou seja,

$$|[n]_{n,1}| = \frac{|[n]!|}{n} =$$

# Permutações Circulares

Do Corolário 46 temos

$$|[n]!| = \sum_{f \in F([n]!)} |F^{-1}(f)| = \sum_{f \in [n]_{n,1}} |F^{-1}(f)| = \sum_{f \in [n]_{n,1}} n = n|[n]_{n,1}|,$$

ou seja,

$$|[n]_{n,1}| = \frac{|[n]!|}{n} = \frac{n!}{n} =$$

# Permutações Circulares

Do Corolário 46 temos

$$|[n]!| = \sum_{f \in F([n]!)} |F^{-1}(f)| = \sum_{f \in [n]_{n,1}} |F^{-1}(f)| = \sum_{f \in [n]_{n,1}} n = n|[n]_{n,1}|,$$

ou seja,

$$|[n]_{n,1}| = \frac{|[n]!|}{n} = \frac{n!}{n} = \frac{n(n-1)!}{n} =$$

# Permutações Circulares

Do Corolário 46 temos

$$|[n]!| = \sum_{f \in F([n]!)} |F^{-1}(f)| = \sum_{f \in [n]_{n,1}} |F^{-1}(f)| = \sum_{f \in [n]_{n,1}} n = n|[n]_{n,1}|,$$

ou seja,

$$|[n]_{n,1}| = \frac{|[n]!|}{n} = \frac{n!}{n} = \frac{n(n-1)!}{n} = (n-1)! .$$

# Permutações Circulares

Do Corolário 46 temos

$$|[n]| = \sum_{f \in F([n])} |F^{-1}(f)| = \sum_{f \in [n]_{n,1}} |F^{-1}(f)| = \sum_{f \in [n]_{n,1}} n = n|[n]_{n,1}|,$$

ou seja,

$$|[n]_{n,1}| = \frac{|[n]|}{n} = \frac{n!}{n} = \frac{n(n-1)!}{n} = (n-1)!.$$

## Teorema

*O número de permutações circulares sobre um conjunto de  $n$  elementos é  $(n-1)!$*

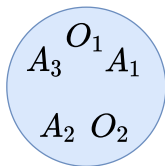
## Exercícios 181

Dois meninos e três meninas formarão uma roda dando-se as mãos.

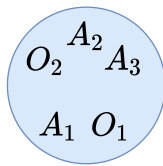
## Exercícios 181

Dois meninos e três meninas formarão uma roda dando-se as mãos.

De quantos modos diferentes poderão formar a roda de modo que os dois meninos não fiquem juntos?



$(O_1, A_1, O_2, A_2, A_3)$

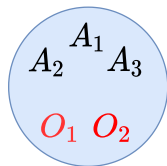


$(A_2, A_3, O_1, A_1, O_2)$

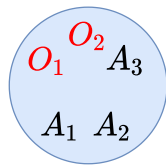
## Exercícios 181

Dois meninos e três meninas formarão uma roda dando-se as mãos.

De quantos modos diferentes poderão formar a roda de modo que os dois meninos não fiquem juntos?



$(A_1, A_3, O_2, O_1, A_2)$

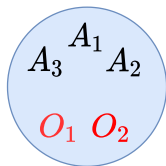


$(O_2, A_3, A_2, A_1, O_1)$

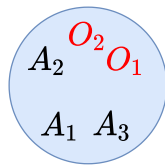
## Exercícios 181

Dois meninos e três meninas formarão uma roda dando-se as mãos.

De quantos modos diferentes poderão formar a roda de modo que os dois meninos não fiquem juntos?



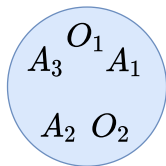
$(A_1, A_2, O_2, O_1, A_3)$



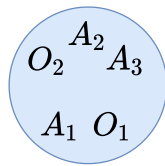
$(O_2, O_1, A_3, A_1, A_2)$

## Exercícios 181

Cada modo diferente de as crianças formarem a roda corresponde a uma permutação circular das crianças.



$(O_1, A_1, O_2, A_2, A_3)$



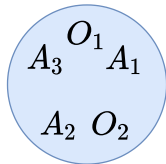
$(A_2, A_3, O_1, A_1, O_2)$

## Exercícios 181

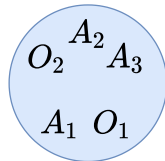
Cada modo diferente de as crianças formarem a roda corresponde a uma permutação circular das crianças.

O número de tais permutações é

$$(5 - 1)! = 4! = 24.$$



$(O_1, A_1, O_2, A_2, A_3)$



$(A_2, A_3, O_1, A_1, O_2)$

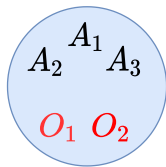
## Exercícios 181

O número de modos em que os meninos ficam **juntos** corresponde a tratar os dois meninos como se fossem um só.

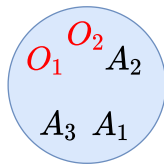
## Exercícios 181

O número de modos em que os meninos ficam **juntos** corresponde a tratar os dois meninos como se fossem um só.

Observe abaixo que as permutações não são circularmente equivalentes, mas representam a mesma configuração não desejada em que os meninos estão juntos.



$(A_1, A_3, O_2, O_1, A_2)$



$(O_2, A_2, A_1, A_3, O_1)$

## Exercícios 181

Se houvesse um só menino (e três meninas) teríamos

$$(4 - 1)! = 3! = 6$$

modos diferentes de formar a roda.

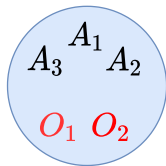
## Exercícios 181

Se houvesse um só menino (e três meninas) teríamos

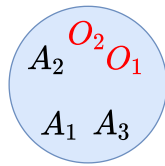
$$(4 - 1)! = 3! = 6$$

modos diferentes de formar a roda.

Para cada um destes modos, temos duas configurações possíveis, a saber, um deles à esquerda do outro e vice-versa, como ilustrado abaixo.



$$(A_1, A_2, O_2, O_1, A_3)$$



$$(O_2, O_1, A_3, A_1, A_2)$$

## Exercícios 181

Assim, o número de modos diferentes de formar a roda em que os meninos ficam juntos é  $2 \times 6 = 12$ .

## Exercícios 181

Assim, o número de modos diferentes de formar a roda em que os meninos ficam juntos é  $2 \times 6 = 12$ .

E o número de modos diferentes de formar a roda de modo que os dois meninos não fiquem juntos é

$$PC_5 - 2PC_4 =$$

## Exercícios 181

Assim, o número de modos diferentes de formar a roda em que os meninos ficam juntos é  $2 \times 6 = 12$ .

E o número de modos diferentes de formar a roda de modo que os dois meninos não fiquem juntos é

$$PC_5 - 2PC_4 = (5 - 1)! - 2(4 - 1)! =$$

## Exercícios 181

Assim, o número de modos diferentes de formar a roda em que os meninos ficam juntos é  $2 \times 6 = 12$ .

E o número de modos diferentes de formar a roda de modo que os dois meninos não fiquem juntos é

$$PC_5 - 2PC_4 = (5 - 1)! - 2(4 - 1)! = 4! - 2 \cdot 3! =$$

## Exercícios 181

Assim, o número de modos diferentes de formar a roda em que os meninos ficam juntos é  $2 \times 6 = 12$ .

E o número de modos diferentes de formar a roda de modo que os dois meninos não fiquem juntos é

$$PC_5 - 2PC_4 = (5 - 1)! - 2(4 - 1)! = 4! - 2 \cdot 3! = 24 - 12 =$$

## Exercícios 181

Assim, o número de modos diferentes de formar a roda em que os meninos ficam juntos é  $2 \times 6 = 12$ .

E o número de modos diferentes de formar a roda de modo que os dois meninos não fiquem juntos é

$$PC_5 - 2PC_4 = (5 - 1)! - 2(4 - 1)! = 4! - 2 \cdot 3! = 24 - 12 = 12,$$

onde  $PC_n$  indica a permutação circular de  $n$  elementos que é  $(n - 1)!$ .