Matemática Discreta

Unidade 64: Subconjuntos com Número Fixo de Elementos (1)

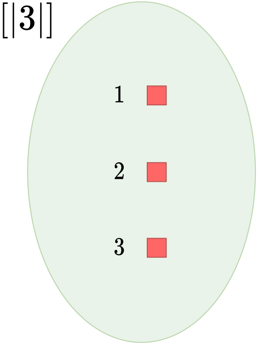
Renato Carmo
David Menotti

Departamento de Informática da UFPR

Segundo Período Especial de 2020

Subconjuntos com Número Fixo de Elementos

Quantos subconjuntos de k elementos tem um conjunto finito de n elementos?



$k = 0$ $\quad \emptyset$

$k = 1$ $\quad \{1\}, \{2\}, \{3\}$

$k = 2$ $\quad \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}$

$k = 3$ $\quad \{1, 2, 3\}$

$$\wp(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\} = 2^A$$

Subconjuntos com Número Fixo de Elementos

Notação

Se A é um conjunto finito e $k \in \mathbb{N}$, o conjunto dos subconjuntos de k elementos de A será denotado $\binom{A}{k}$, isto é,

$$\binom{A}{k} := \{S \subseteq A \mid |S| = k\},$$

A pergunta então é qual o valor de

$$\left|\binom{A}{k}\right|.$$

Teorema 68

Teorema

Se A é um conjunto finito e $k \in \mathbb{N}$, então

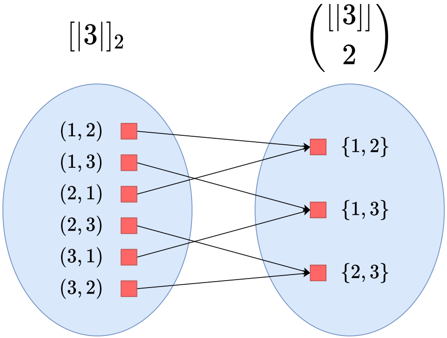
$$\left|\binom{A}{k}\right| = \binom{|A|}{k}.$$

Teorema 68

Demonstração.

Seja A um conjunto finito e seja $k \in \mathbb{N}$ e seja $F\colon A_k \to \binom{A}{k}$ a função dada por

$$F((a_1, \dots, a_k)) = \{a_1, \dots, a_k\}.$$

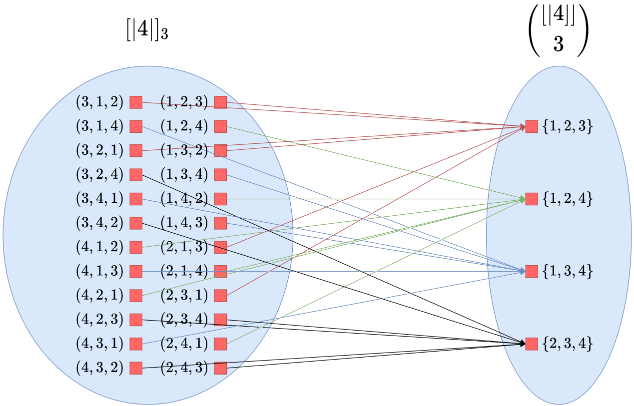


Teorema 68

Demonstração.

Seja A um conjunto finito e seja $k \in \mathbb{N}$ e seja $F\colon A_k \to \binom{A}{k}$ a função dada por

$$F((a_1, \ldots, a_k)) = \{a_1, \ldots, a_k\}.$$



Teorema 68

Demonstração.

Para cada $S \in \binom{A}{k}$ temos

$$F^{-1}(S) = S!,$$

Teorema 68

Demonstração.

Para cada $S \in \binom{A}{k}$ temos

$$F^{-1}(S) = S!,$$

e portanto

$$|F^{-1}(S)| = |S|! = k!,$$

Teorema 68

Demonstração.

e consequentemente (Corolário 46)

$$|A_k| = \sum_{S \in F(A_k)} |F^{-1}(S)| =$$

Teorema 68

Demonstração.

e consequentemente (Corolário 46)

$$|A_k| = \sum_{S \in F(A_k)} |F^{-1}(S)| = \sum_{S \in \binom{A}{k}} |S!| \overset{\text{C. 65}}{=}$$

Teorema 68

Demonstração.

e consequentemente (Corolário 46)

$$|A_k| = \sum_{S \in F(A_k)} |F^{-1}(S)| = \sum_{S \in \binom{A}{k}} |S!| \overset{\text{C. 65}}{=} \sum_{S \in \binom{A}{k}} |S|! =$$

Teorema 68

Demonstração.

e consequentemente (Corolário 46)

$$|A_k| = \sum_{S \in F(A_k)} |F^{-1}(S)| = \sum_{S \in \binom{A}{k}} |S!| \overset{\text{C. }65}{=} \sum_{S \in \binom{A}{k}} |S|! = \sum_{S \in \binom{A}{k}} k! \overset{\text{T. }4}{=}$$

Teorema 68

Demonstração.

e consequentemente (Corolário 46)

$$|A_k| = \sum_{S \in F(A_k)} |F^{-1}(S)| = \sum_{S \in \binom{A}{k}} |S!| \overset{\text{C. 65}}{=} \sum_{S \in \binom{A}{k}} |S|! = \sum_{S \in \binom{A}{k}} k! \overset{\text{T. 4}}{=} \left|\binom{A}{k}\right| k!$$

e portanto,

$$\left|\binom{A}{k}\right| =$$

Teorema 68

Demonstração.

e consequentemente (Corolário 46)

$$|A_k| = \sum_{S \in F(A_k)} |F^{-1}(S)| = \sum_{S \in \binom{A}{k}} |S!| \stackrel{\text{C. 65}}{=} \sum_{S \in \binom{A}{k}} |S|! = \sum_{S \in \binom{A}{k}} k! \stackrel{\text{T. 4}}{=} \left| \binom{A}{k} \right| k!$$

e portanto,

$$\left| \binom{A}{k} \right| = \frac{|A_k|}{k!} \stackrel{\text{C. 62}}{=}$$

Teorema 68

Demonstração.

e consequentemente (Corolário 46)

$$|A_k| = \sum_{S \in F(A_k)} |F^{-1}(S)| = \sum_{S \in \binom{A}{k}} |S!| \overset{\text{C. }65}{=} \sum_{S \in \binom{A}{k}} |S|! = \sum_{S \in \binom{A}{k}} k! \overset{\text{T. }4}{=} \left|\binom{A}{k}\right| k!$$

e portanto,

$$\left|\binom{A}{k}\right| = \frac{|A_k|}{k!} \overset{\text{C. }62}{=} \frac{|A|_k}{k!} =$$

Teorema 68

Demonstração.

e consequentemente (Corolário 46)

$$|A_k| = \sum_{S \in F(A_k)} |F^{-1}(S)| = \sum_{S \in \binom{A}{k}} |S!| \overset{\text{C. }65}{=} \sum_{S \in \binom{A}{k}} |S|! = \sum_{S \in \binom{A}{k}} k! \overset{\text{T. }4}{=} \left|\binom{A}{k}\right| k!$$

e portanto,

$$\left|\binom{A}{k}\right| = \frac{|A_k|}{k!} \overset{\text{C. }62}{=} \frac{|A|_k}{k!} = \frac{\frac{|A|!}{(|A|-k)!}}{k!} =$$

Teorema 68

Demonstração.

e consequentemente (Corolário 46)

$$|A_k| = \sum_{S \in F(A_k)} |F^{-1}(S)| = \sum_{S \in \binom{A}{k}} |S!| \overset{\text{C. }65}{=} \sum_{S \in \binom{A}{k}} |S|! = \sum_{S \in \binom{A}{k}} k! \overset{\text{T. }4}{=} \left| \binom{A}{k} \right| k!$$

e portanto,

$$\left| \binom{A}{k} \right| = \frac{|A_k|}{k!} \overset{\text{C. }62}{=} \frac{|A|_k}{k!} = \frac{\frac{|A|!}{(|A|-k)!}}{k!} = \frac{|A|!}{k!(|A|-k)!} =$$

Teorema 68

Demonstração.

e consequentemente (Corolário 46)

$$|A_k| = \sum_{S \in F(A_k)} |F^{-1}(S)| = \sum_{S \in \binom{A}{k}} |S!| \stackrel{\text{C. }65}{=} \sum_{S \in \binom{A}{k}} |S|! = \sum_{S \in \binom{A}{k}} k! \stackrel{\text{T. }4}{=} \left|\binom{A}{k}\right| k!$$

e portanto,

$$\left|\binom{A}{k}\right| = \frac{|A_k|}{k!} \stackrel{\text{C. }62}{=} \frac{|A|_k}{k!} = \frac{\frac{|A|!}{(|A|-k)!}}{k!} = \frac{|A|!}{k!(|A|-k)!} = \binom{|A|}{k}.$$

$\square$