

# Matemática Discreta

## Unidade 68: Permutações com Repetição

Renato Carmo  
David Menotti

Departamento de Informática da UFPR

Segundo Período Especial de 2020

# Anagramas

# Anagramas

# anagramas de fruta

# Anagramas

# anagramas de fruta = # permutações sobre  $\{f, r, u, t, a\}$

# Anagramas

# anagramas de fruta = # permutações sobre  $\{f, r, u, t, a\}$

$|\{f, r, u, t, a\}|!$

# Anagramas

# anagramas de fruta = # permutações sobre  $\{f, r, u, t, a\}$

$$|\{f, r, u, t, a\}|! \stackrel{C. 65}{=} |\{f, r, u, t, a\}|!$$

# Anagramas

# anagramas de fruta = # permutações sobre  $\{f, r, u, t, a\}$

$$|\{f, r, u, t, a\}|! \stackrel{C. 65}{=} |\{f, r, u, t, a\}|! = 5!$$

# Anagramas

# anagramas de fruta = # permutações sobre  $\{f, r, u, t, a\}$

$$|\{f, r, u, t, a\}|! \stackrel{C. 65}{=} |\{f, r, u, t, a\}|! = 5! = 120$$

# Anagramas

# anagramas de fruta = # permutações sobre  $\{f, r, u, t, a\}$

$$|\{f, r, u, t, a\}|! \stackrel{C. 65}{=} |\{f, r, u, t, a\}|! = 5! = 120$$

# anagramas de laranja

# Anagramas

# anagramas de fruta = # permutações sobre  $\{f, r, u, t, a\}$

$$|\{f, r, u, t, a\}|! \stackrel{\text{C. 65}}{=} |\{f, r, u, t, a\}|! = 5! = 120$$

# anagramas de laranja:  $7!$

# Anagramas

# anagramas de fruta = # permutações sobre  $\{f, r, u, t, a\}$

$$|\{f, r, u, t, a\}|! \stackrel{C. 65}{=} |\{f, r, u, t, a\}|! = 5! = 120$$

# anagramas de laranja:  $7! = 5040$

# Anagramas

# anagramas de fruta = # permutações sobre  $\{f, r, u, t, a\}$

$$|\{f, r, u, t, a\}|! \stackrel{C. 65}{=} |\{f, r, u, t, a\}|! = 5! = 120$$

# anagramas de laranja:  $7! = 5040$  ???

# Anagramas

# anagramas de fruta = # permutações sobre  $\{f, r, u, t, a\}$

$$|\{f, r, u, t, a\}|! \stackrel{C. 65}{=} |\{f, r, u, t, a\}|! = 5! = 120$$

# anagramas de laranja:  $7! = 5040$  ???

laranja

# Anagramas

# anagramas de fruta = # permutações sobre  $\{f, r, u, t, a\}$

$$|\{f, r, u, t, a\}|! \stackrel{C. 65}{=} |\{f, r, u, t, a\}|! = 5! = 120$$

# anagramas de laranja:  $7! = 5040$  ???

laranja

laranja

# Anagramas

# anagramas de fruta = # permutações sobre  $\{f, r, u, t, a\}$

$$|\{f, r, u, t, a\}|! \stackrel{C. 65}{=} |\{f, r, u, t, a\}|! = 5! = 120$$

# anagramas de laranja:  $7! = 5040$  ???

laranja

laranja

laranja

# Anagramas

# anagramas de fruta = # permutações sobre  $\{f, r, u, t, a\}$

$$|\{f, r, u, t, a\}|! \stackrel{C. 65}{=} |\{f, r, u, t, a\}|! = 5! = 120$$

# anagramas de laranja:  $7! = 5040$  ???

laranja

laranja

laranja

...

# Anagramas

# anagramas de fruta = # permutações sobre  $\{f, r, u, t, a\}$

$$|\{f, r, u, t, a\}|! \stackrel{C. 65}{=} |\{f, r, u, t, a\}|! = 5! = 120$$

# anagramas de laranja:  $7! = 5040$  ???

laranja

laranja

laranja

...

$$3! = 6$$

# Anagramas

# anagramas de fruta = # permutações sobre  $\{f, r, u, t, a\}$

$$|\{f, r, u, t, a\}|! \stackrel{C. 65}{=} |\{f, r, u, t, a\}|! = 5! = 120$$

# anagramas de laranja:  $7! = 5040$  ???

laranja

laranja

laranja

...

$$3! = 6$$

$$\frac{7!}{3!}$$

# Anagramas

# anagramas de fruta = # permutações sobre  $\{f, r, u, t, a\}$

$$|\{f, r, u, t, a\}|! \stackrel{C. 65}{=} |\{f, r, u, t, a\}|! = 5! = 120$$

# anagramas de laranja:  $7! = 5040$  ???

laranja

laranja

laranja

...

$$3! = 6$$

$$\frac{7!}{3!} = \frac{5040}{6} = 840$$

# Mais Anagramas

# Mais Anagramas

# anagramas de banana

# Mais Anagramas

# anagramas de banana:  $\frac{6!}{3!}$

## Mais Anagramas

# anagramas de banana:  $\frac{6!}{3!} = 120$

## Mais Anagramas

# anagramas de banana:  $\frac{6!}{3!} = 120$  ???

# Mais Anagramas

# anagramas de banana:  $\frac{6!}{3!} = 120$  ???

ba**na**na

# Mais Anagramas

# anagramas de banana:  $\frac{6!}{3!} = 120$  ???

bana

$$\frac{\frac{6!}{3!}}{2!}$$

# Mais Anagramas

# anagramas de banana:  $\frac{6!}{3!} = 120$  ???

bana

$$\frac{\frac{6!}{3!}}{2!} = \frac{6!}{3!2!}$$

# Mais Anagramas

# anagramas de banana:  $\frac{6!}{3!} = 120$  ???

bana

$$\frac{\frac{6!}{3!}}{2!} = \frac{6!}{3!2!} = 60$$

# Coeficientes Multinomiais

# Coeficientes Multinomiais

$$n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$$

# Coeficientes Multinomiais

$$n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$$

**coeficiente multinomial**

# Coeficientes Multinomiais

$$n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$$

**coeficiente multinomial:**  $\binom{n_1 + \dots + n_k}{n_1, \dots, n_k}$

# Coeficientes Multinomiais

$$n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$$

**coeficiente multinomial:** 
$$\binom{n_1 + \dots + n_k}{n_1, \dots, n_k} := \frac{(n_1 + \dots + n_k)!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$$

# Coeficientes Multinomiais

$$n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$$

**coeficiente multinomial:** 
$$\binom{n_1 + \dots + n_k}{n_1, \dots, n_k} := \frac{(n_1 + \dots + n_k)!}{n_1! n_2! \dots n_k!} = \frac{\left(\sum_{i=1}^k n_i\right)!}{\prod_{i=1}^k n_i!}$$

# Coeficientes Multinomiais

$$n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$$

**coeficiente multinomial:** 
$$\binom{n_1 + \dots + n_k}{n_1, \dots, n_k} := \frac{(n_1 + \dots + n_k)!}{n_1! n_2! \dots n_k!} = \frac{\left(\sum_{i=1}^k n_i\right)!}{\prod_{i=1}^k n_i!}$$

---

$$\binom{n}{k}$$

# Coeficientes Multinomiais

$$n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$$

**coeficiente multinomial:** 
$$\binom{n_1 + \dots + n_k}{n_1, \dots, n_k} := \frac{(n_1 + \dots + n_k)!}{n_1! n_2! \dots n_k!} = \frac{\left(\sum_{i=1}^k n_i\right)!}{\prod_{i=1}^k n_i!}$$

---

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

# Coeficientes Multinomiais

$$n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$$

**coeficiente multinomial:** 
$$\binom{n_1 + \dots + n_k}{n_1, \dots, n_k} := \frac{(n_1 + \dots + n_k)!}{n_1! n_2! \dots n_k!} = \frac{\left(\sum_{i=1}^k n_i\right)!}{\prod_{i=1}^k n_i!}$$

---

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{(k + (n-k))!}{k!(n-k)!}$$

# Coeficientes Multinomiais

$$n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$$

**coeficiente multinomial:** 
$$\binom{n_1 + \dots + n_k}{n_1, \dots, n_k} := \frac{(n_1 + \dots + n_k)!}{n_1! n_2! \dots n_k!} = \frac{\left(\sum_{i=1}^k n_i\right)!}{\prod_{i=1}^k n_i!}$$

---

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{(k + (n-k))!}{k!(n-k)!} = \frac{((n-k) + k)!}{(n-k)!k!}$$

# Coeficientes Multinomiais

$$n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$$

**coeficiente multinomial:** 
$$\binom{n_1 + \dots + n_k}{n_1, \dots, n_k} := \frac{(n_1 + \dots + n_k)!}{n_1! n_2! \dots n_k!} = \frac{\left(\sum_{i=1}^k n_i\right)!}{\prod_{i=1}^k n_i!}$$

---

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{(k + (n-k))!}{k!(n-k)!} = \frac{((n-k) + k)!}{(n-k)!k!} = \binom{k + (n-k)}{k, n-k}$$

# Coeficientes Multinomiais

$$n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$$

**coeficiente multinomial:** 
$$\binom{n_1 + \dots + n_k}{n_1, \dots, n_k} := \frac{(n_1 + \dots + n_k)!}{n_1! n_2! \dots n_k!} = \frac{\left(\sum_{i=1}^k n_i\right)!}{\prod_{i=1}^k n_i!}$$

---

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{(k + (n-k))!}{k!(n-k)!} = \frac{((n-k) + k)!}{(n-k)!k!} = \binom{k + (n-k)}{k, n-k} = \binom{n}{n-k}$$

## Teorema 73

## Teorema 73

$$\binom{n_1 + \dots + n_k}{n_1, \dots, n_k} = \binom{n_1 + \dots + n_{k-1}}{n_1, \dots, n_{k-1}} \binom{n_1 + \dots + n_k}{n_k}$$

## Teorema 73

$$\binom{n_1 + \dots + n_k}{n_1, \dots, n_k} = \binom{n_1 + \dots + n_{k-1}}{n_1, \dots, n_{k-1}} \binom{n_1 + \dots + n_k}{n_k}$$

Demonstração.

Exercício 56



## Teorema 74

## Teorema 74

$$A = \{a_1, \dots, a_k\}$$

## Teorema 74

$A = \{a_1, \dots, a_k\}$ ,  $n_1$  exemplares de  $a_1$

## Teorema 74

$A = \{a_1, \dots, a_k\}$ ,  $n_1$  exemplares de  $a_1$ ,  $n_2$  exemplares de  $a_2$

## Teorema 74

$A = \{a_1, \dots, a_k\}$ ,  $n_1$  exemplares de  $a_1$ ,  $n_2$  exemplares de  $a_2$ , ...

## Teorema 74

$A = \{a_1, \dots, a_k\}$ ,  $n_1$  exemplares de  $a_1$ ,  $n_2$  exemplares de  $a_2$ ,  $\dots$ ,  $n_k$  exemplares de  $a_k$

## Teorema 74

$A = \{a_1, \dots, a_k\}$ ,  $n_1$  exemplares de  $a_1$ ,  $n_2$  exemplares de  $a_2$ ,  $\dots$ ,  $n_k$  exemplares de  $a_k$

# permutações distintas de elementos de  $A$

## Teorema 74

$A = \{a_1, \dots, a_k\}$ ,  $n_1$  exemplares de  $a_1$ ,  $n_2$  exemplares de  $a_2$ ,  $\dots$ ,  $n_k$  exemplares de  $a_k$

# permutações distintas de elementos de  $A$

$$\binom{n_1 + \dots + n_k}{n_1, \dots, n_k}$$

## Teorema 74

$A = \{a_1, \dots, a_k\}$ ,  $n_1$  exemplares de  $a_1$ ,  $n_2$  exemplares de  $a_2$ ,  $\dots$ ,  $n_k$  exemplares de  $a_k$

# permutações distintas de elementos de  $A$

$$\binom{n_1 + \dots + n_k}{n_1, \dots, n_k}$$

Demonstração.

Indução em  $k$

