

Matemática Discreta

Unidade 72: Permutações com Ponto Fixo

Renato Carmo
David Menotti

Departamento de Informática da UFPR

Segundo Período Especial de 2020

Ponto Fixo de uma Permutação

Ponto Fixo de uma Permutação

f

Ponto Fixo de uma Permutação

f : permutação sobre A

Ponto Fixo de uma Permutação

f : permutação sobre A

a é **ponto fixo** de f

Ponto Fixo de uma Permutação

f : permutação sobre A

a é **ponto fixo** de f : $f(a) = a$

Ponto Fixo de uma Permutação

f : permutação sobre A

a é **ponto fixo** de f : $f(a) = a$

quantas permutações sobre A tem ponto fixo?

Pontos Fixos de uma Permutação

Pontos Fixos de uma Permutação

$$n \in \mathbb{N}$$

Pontos Fixos de uma Permutação

$$n \in \mathbb{N}$$

$$I \subseteq [n]$$

Pontos Fixos de uma Permutação

$$n \in \mathbb{N}$$

$$I \subseteq [n]$$

$$F(n, I)$$

Pontos Fixos de uma Permutação

$$n \in \mathbb{N}$$

$$I \subseteq [n]$$

$F(n, I) :=$ permutações sobre $[n]$ nas quais todo elemento de I é ponto fixo

Teorema 81

Teorema 81

$$|F(n, I)|$$

Teorema 81

$$|F(n, I)| = (n - |I|)!$$

Teorema 81

$$|F(n, I)| = (n - |I|)!$$

Demonstração.

$$G: F(n, I) \rightarrow ([n] - I)!$$

Teorema 81

$$|F(n, I)| = (n - |I|)!$$

Demonstração.

$$G: F(n, I) \rightarrow ([n] - I)!$$

$$(G(f))$$

Teorema 81

$$|F(n, I)| = (n - |I|)!$$

Demonstração.

$$G: F(n, I) \rightarrow ([n] - I)!$$

$$(G(f))(a)$$

Teorema 81

$$|F(n, I)| = (n - |I|)!$$

Demonstração.

$$G: F(n, I) \rightarrow ([n] - I)!$$

$$(G(f))(a) = f(a), \text{ para todo } a \in [n] - I$$

Teorema 81

$$|F(n, I)| = (n - |I|)!$$

Demonstração.

$$G: F(n, I) \rightarrow ([n] - I)!$$

$$(G(f))(a) = f(a), \text{ para todo } a \in [n] - I$$

$$n = 10$$

Teorema 81

$$|F(n, I)| = (n - |I|)!$$

Demonstração.

$$G: F(n, I) \rightarrow ([n] - I)!$$

$$(G(f))(a) = f(a), \text{ para todo } a \in [n] - I$$

$$n = 10$$

$$I = \{2, 5, 7\}$$

Teorema 81

$$|F(n, I)| = (n - |I|)!$$

Demonstração.

$$G: F(n, I) \rightarrow ([n] - I)!$$

$$(G(f))(a) = f(a), \text{ para todo } a \in [n] - I$$

$$n = 10$$

$$I = \{2, 5, 7\}$$

$$f = (3, \textcolor{red}{2}, 4, 10, \textcolor{red}{5}, 6, \textcolor{red}{7}, 9, 8, 1)$$

Teorema 81

$$|F(n, I)| = (n - |I|)!$$

Demonstração.

$$G: F(n, I) \rightarrow ([n] - I)!$$

$$(G(f))(a) = f(a), \text{ para todo } a \in [n] - I$$

$$n = 10$$

$$I = \{2, 5, 7\}$$

$$f = (3, \textcolor{red}{2}, 4, 10, \textcolor{red}{5}, 6, \textcolor{red}{7}, 9, 8, 1) \in [10]!$$

Teorema 81

$$|F(n, I)| = (n - |I|)!$$

Demonstração.

$$G: F(n, I) \rightarrow ([n] - I)!$$

$$(G(f))(a) = f(a), \text{ para todo } a \in [n] - I$$

$$n = 10$$

$$I = \{2, 5, 7\}$$

$$f = (3, 2, 4, 10, 5, 6, 7, 9, 8, 1) \in [10]!$$

$$G(f)$$

Teorema 81

$$|F(n, I)| = (n - |I|)!$$

Demonstração.

$$G: F(n, I) \rightarrow ([n] - I)!$$

$$(G(f))(a) = f(a), \text{ para todo } a \in [n] - I$$

$$n = 10 \qquad I = \{2, 5, 7\}$$

$$G(f) = (3, 4, 10, 6, 9, 8, 1)$$

$$f = (3, \textcolor{red}{2}, 4, 10, \textcolor{red}{5}, 6, \textcolor{red}{7}, 9, 8, 1) \in [10]!$$

Teorema 81

$$|F(n, I)| = (n - |I|)!$$

Demonstração.

$$G: F(n, I) \rightarrow ([n] - I)!$$

$$(G(f))(a) = f(a), \text{ para todo } a \in [n] - I$$

$$n = 10 \qquad I = \{2, 5, 7\}$$

$$f = (3, \textcolor{red}{2}, 4, 10, \textcolor{red}{5}, 6, \textcolor{red}{7}, 9, 8, 1) \in [10]!$$

$$G(f) = (3, 4, 10, 6, 9, 8, 1) \in ([10] - \{2, 5, 7\})!$$

Teorema 81

$$|F(n, I)| = (n - |I|)!$$

Demonstração.

$$G: F(n, I) \rightarrow ([n] - I)!$$

$$(G(f))(a) = f(a), \text{ para todo } a \in [n] - I$$

$$\begin{array}{lll} n = 10 & I = \{2, 5, 7\} & f = (3, \textcolor{red}{2}, 4, 10, \textcolor{red}{5}, 6, \textcolor{red}{7}, 9, 8, 1) \in [10]! \\ G(f) = (3, 4, 10, 6, 9, 8, 1) \in ([10] - \{2, 5, 7\})! = \{1, 3, 4, 6, 8, 9, 10\}! \end{array}$$

Teorema 81

$$|F(n, I)| = (n - |I|)!$$

Demonstração.

$$G: F(n, I) \rightarrow ([n] - I)!$$

$$(G(f))(a) = f(a), \text{ para todo } a \in [n] - I$$

$$\begin{array}{lll} n = 10 & I = \{2, 5, 7\} & f = (3, \textcolor{red}{2}, 4, 10, \textcolor{red}{5}, 6, \textcolor{red}{7}, 9, 8, 1) \in [10]! \\ G(f) = (3, 4, 10, 6, 9, 8, 1) \in ([10] - \{2, 5, 7\})! = \{1, 3, 4, 6, 8, 9, 10\}! \end{array}$$

G é bijetora

Teorema 81

$$|F(n, I)| = (n - |I|)!$$

Demonstração.

$$G: F(n, I) \rightarrow ([n] - I)!$$

$$(G(f))(a) = f(a), \text{ para todo } a \in [n] - I$$

$$\begin{array}{lll} n = 10 & I = \{2, 5, 7\} & f = (3, \textcolor{red}{2}, 4, 10, \textcolor{red}{5}, 6, \textcolor{red}{7}, 9, 8, 1) \in [10]! \\ G(f) = (3, 4, 10, 6, 9, 8, 1) \in ([10] - \{2, 5, 7\})! = \{1, 3, 4, 6, 8, 9, 10\}! \end{array}$$

G é bijetora

$$|F(n, I)|$$

Teorema 81

$$|F(n, I)| = (n - |I|)!$$

Demonstração.

$$G: F(n, I) \rightarrow ([n] - I)!$$

$$(G(f))(a) = f(a), \text{ para todo } a \in [n] - I$$

$$\begin{array}{lll} n = 10 & I = \{2, 5, 7\} & f = (3, \textcolor{red}{2}, 4, 10, \textcolor{red}{5}, 6, \textcolor{red}{7}, 9, 8, 1) \in [10]! \\ G(f) = (3, 4, 10, 6, 9, 8, 1) \in ([10] - \{2, 5, 7\})! = \{1, 3, 4, 6, 8, 9, 10\}! \end{array}$$

G é bijetora

$$|F(n, I)| \stackrel{\text{C. 42}}{=} |([n] - I)|$$

Teorema 81

$$|F(n, I)| = (n - |I|)!$$

Demonstração.

$$G: F(n, I) \rightarrow ([n] - I)!$$

$$(G(f))(a) = f(a), \text{ para todo } a \in [n] - I$$

$$\begin{array}{lll} n = 10 & I = \{2, 5, 7\} & f = (3, \textcolor{red}{2}, 4, 10, \textcolor{red}{5}, 6, \textcolor{red}{7}, 9, 8, 1) \in [10]! \\ G(f) = (3, 4, 10, 6, 9, 8, 1) \in ([10] - \{2, 5, 7\})! = \{1, 3, 4, 6, 8, 9, 10\}! \end{array}$$

G é bijetora

$$|F(n, I)| \stackrel{\text{C. 42}}{=} |([n] - I)| \stackrel{\text{C. 47}}{=} (|[n]| - |I|)!$$

Teorema 81

$$|F(n, I)| = (n - |I|)!$$

Demonstração.

$$G: F(n, I) \rightarrow ([n] - I)!$$

$$(G(f))(a) = f(a), \text{ para todo } a \in [n] - I$$

$$\begin{array}{lll} n = 10 & I = \{2, 5, 7\} & f = (3, \textcolor{red}{2}, 4, 10, \textcolor{red}{5}, 6, \textcolor{red}{7}, 9, 8, 1) \in [10]! \\ G(f) = (3, 4, 10, 6, 9, 8, 1) \in ([10] - \{2, 5, 7\})! = \{1, 3, 4, 6, 8, 9, 10\}! \end{array}$$

G é bijetora

$$|F(n, I)| \stackrel{\text{C. 42}}{=} |([n] - I)| \stackrel{\text{C. 47}}{=} (|[n]| - |I|)! = (n - |I|)!$$



Corolário 82

permutações sobre A

permutações sobre A em que todo elemento de I é ponto fixo

permutações sobre A em que todo elemento de I é ponto fixo

$$(|A| - |I|)!$$

Teorema 83

Teorema 83

permutações sobre $[n]$ com algum ponto fixo

Teorema 83

permutações sobre $[n]$ com algum ponto fixo

$$\left(1 - \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}\right) n!$$

Teorema 83

permutações sobre $[n]$ com algum ponto fixo

$$\left(1 - \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}\right) n! \approx \left(1 - \frac{1}{e}\right) n!$$

permutações sobre $[n]$ com algum ponto fixo

$$\left(1 - \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}\right) n! \approx \left(1 - \frac{1}{e}\right) n!$$

$F(n) :=$ permutações sobre $[n]$ com algum ponto fixo

permutações sobre $[n]$ com algum ponto fixo

$$\left(1 - \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}\right) n! \approx \left(1 - \frac{1}{e}\right) n!$$

$F(n) :=$ permutações sobre $[n]$ com algum ponto fixo

$$F(n) = \bigcup_{k=1}^n F(n, \{k\})$$

permutações sobre $[n]$ com algum ponto fixo

$$\left(1 - \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}\right) n! \approx \left(1 - \frac{1}{e}\right) n!$$

$F(n) :=$ permutações sobre $[n]$ com algum ponto fixo

$$F(n) = \bigcup_{k=1}^n F(n, \{k\})$$

$$|F(n)|$$

permutações sobre $[n]$ com algum ponto fixo

$$\left(1 - \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}\right) n! \approx \left(1 - \frac{1}{e}\right) n!$$

$F(n) :=$ permutações sobre $[n]$ com algum ponto fixo

$$F(n) = \bigcup_{k=1}^n F(n, \{k\})$$

$$|F(n)| = \left| \bigcup_{k=1}^n F(n, \{k\}) \right|$$

Teorema 83

permutações sobre $[n]$ com algum ponto fixo

$$\left(1 - \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}\right) n! \approx \left(1 - \frac{1}{e}\right) n!$$

$F(n) :=$ permutações sobre $[n]$ com algum ponto fixo

$$F(n) = \bigcup_{k=1}^n F(n, \{k\})$$

$$|F(n)| = \left| \bigcup_{k=1}^n F(n, \{k\}) \right| \stackrel{T. 80}{=} \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{I \in \binom{[n]}{k}} \left| \bigcap_{i \in I} F(n, \{i\}) \right|$$

$$\bigcap_{i \in I} F(n, \{i\})$$

$$\bigcap_{i \in I} F(n, \{i\})$$

$$\bigcap_{i \in I} F(n, \{i\})$$

$$\bigcap_{i \in I} F(n, \{i\})$$

$\bigcap_{i \in I} F(n, \{i\}) =$ permutações sobre $[n]$ nas quais cada elemento de I é ponto fixo

$$\bigcap_{i \in I} F(n, \{i\})$$

$$\begin{aligned} \bigcap_{i \in I} F(n, \{i\}) &= \text{permutações sobre } [n] \text{ nas quais cada elemento de } I \text{ é ponto fixo} \\ &= \text{permutações sobre } [n] \text{ nas quais todo elemento de } I \text{ é ponto fixo} \end{aligned}$$

$$\bigcap_{i \in I} F(n, \{i\})$$

$$\begin{aligned}\bigcap_{i \in I} F(n, \{i\}) &= \text{permutações sobre } [n] \text{ nas quais cada elemento de } I \text{ é ponto fixo} \\ &= \text{permutações sobre } [n] \text{ nas quais todo elemento de } I \text{ é ponto fixo} \\ &= F(n, I)\end{aligned}$$

$$\bigcap_{i \in I} F(n, \{i\})$$

$$\begin{aligned} \bigcap_{i \in I} F(n, \{i\}) &= \text{permutações sobre } [n] \text{ nas quais cada elemento de } I \text{ é ponto fixo} \\ &= \text{permutações sobre } [n] \text{ nas quais todo elemento de } I \text{ é ponto fixo} \\ &= F(n, I) \end{aligned}$$

$$\left| \bigcap_{i \in I} F(n, \{i\}) \right|$$

$$\bigcap_{i \in I} F(n, \{i\})$$

$$\begin{aligned}\bigcap_{i \in I} F(n, \{i\}) &= \text{permutações sobre } [n] \text{ nas quais cada elemento de } I \text{ é ponto fixo} \\ &= \text{permutações sobre } [n] \text{ nas quais todo elemento de } I \text{ é ponto fixo} \\ &= F(n, I)\end{aligned}$$

$$\left| \bigcap_{i \in I} F(n, \{i\}) \right| = |F(n, I)|$$

$$\bigcap_{i \in I} F(n, \{i\})$$

$$\begin{aligned} \bigcap_{i \in I} F(n, \{i\}) &= \text{permutações sobre } [n] \text{ nas quais cada elemento de } I \text{ é ponto fixo} \\ &= \text{permutações sobre } [n] \text{ nas quais todo elemento de } I \text{ é ponto fixo} \\ &= F(n, I) \end{aligned}$$

$$\left| \bigcap_{i \in I} F(n, \{i\}) \right| = |F(n, I)| \stackrel{\text{T. 81}}{=} (n - |I|)!$$

Teorema 83 (prova)

Teorema 83 (prova)

$$|F(n)|$$

Teorema 83 (prova)

$$|F(n)| = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{I \in \binom{[n]}{k}} \left| \bigcap_{i \in I} F(n, \{i\}) \right|$$

Teorema 83 (prova)

$$|F(n)| = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{I \in \binom{[n]}{k}} \left| \bigcap_{i \in I} F(n, \{i\}) \right| = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{I \in \binom{[n]}{k}} (n - |I|)!$$

Teorema 83 (prova)

$$\begin{aligned}|F(n)| &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{I \in \binom{[n]}{k}} \left| \bigcap_{i \in I} F(n, \{i\}) \right| = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{I \in \binom{[n]}{k}} (n - |I|)! \\ &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{I \in \binom{[n]}{k}} (n - k)!\end{aligned}$$

Teorema 83 (prova)

$$\begin{aligned}|F(n)| &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{I \in \binom{[n]}{k}} \left| \bigcap_{i \in I} F(n, \{i\}) \right| = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{I \in \binom{[n]}{k}} (n - |I|)! \\ &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{I \in \binom{[n]}{k}} (n - k)! = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \left| \binom{[n]}{k} \right| (n - k)!\end{aligned}$$

Teorema 83 (prova)

$$\begin{aligned}|F(n)| &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{I \in \binom{[n]}{k}} \left| \bigcap_{i \in I} F(n, \{i\}) \right| = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{I \in \binom{[n]}{k}} (n - |I|)! \\&= \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{I \in \binom{[n]}{k}} (n - k)! = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \left| \binom{[n]}{k} \right| (n - k)! \\&= \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \binom{n}{k} (n - k)!\end{aligned}$$

Teorema 83 (prova)

$$\begin{aligned}|F(n)| &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{I \in \binom{[n]}{k}} \left| \bigcap_{i \in I} F(n, \{i\}) \right| = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{I \in \binom{[n]}{k}} (n - |I|)! \\&= \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{I \in \binom{[n]}{k}} (n - k)! = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \left| \binom{[n]}{k} \right| (n - k)! \\&= \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \binom{n}{k} (n - k)! = \dots\end{aligned}$$

Teorema 83 (prova)

$$\begin{aligned}|F(n)| &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{I \in \binom{[n]}{k}} \left| \bigcap_{i \in I} F(n, \{i\}) \right| = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{I \in \binom{[n]}{k}} (n - |I|)! \\&= \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{I \in \binom{[n]}{k}} (n - k)! = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \left| \binom{[n]}{k} \right| (n - k)! \\&= \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \binom{n}{k} (n - k)! = \dots \\&= \left(1 - \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} \right) n!\end{aligned}$$

Teorema 83 (prova)

Teorema 83 (prova)

$$e^x = \sum_{k \geq 0} \frac{x^k}{k!}$$

Teorema 83 (prova)

$$e^x = \sum_{k \geq 0} \frac{x^k}{k!}$$

(série de Taylor para e^x)

Teorema 83 (prova)

$$e^x = \sum_{k \geq 0} \frac{x^k}{k!}$$

(série de Taylor para e^x)

$$e^{-1} = \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{k!}$$

Teorema 83 (prova)

$$e^x = \sum_{k \geq 0} \frac{x^k}{k!}$$

(série de Taylor para e^x)

$$e^{-1} = \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{k!}$$

$$\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} \approx e^{-1}$$

Teorema 83 (prova)

$$e^x = \sum_{k \geq 0} \frac{x^k}{k!}$$

(série de Taylor para e^x)

$$e^{-1} = \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{k!}$$

$$\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} \approx e^{-1} = \frac{1}{e}$$

Teorema 83 (prova)

$$e^x = \sum_{k \geq 0} \frac{x^k}{k!}$$

(série de Taylor para e^x)

$$e^{-1} = \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{k!}$$

$$\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} \approx e^{-1} = \frac{1}{e}$$

$$|F(n)| = \left(1 - \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} \right) n!$$

Teorema 83 (prova)

$$e^x = \sum_{k \geq 0} \frac{x^k}{k!}$$

(série de Taylor para e^x)

$$e^{-1} = \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{k!}$$

$$\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} \approx e^{-1} = \frac{1}{e}$$

$$|F(n)| = \left(1 - \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}\right) n! \approx \left(1 - \frac{1}{e}\right) n!$$

$$1 - \frac{1}{e}$$

$$1 - \frac{1}{e}$$

$$63\% < 1 - \frac{1}{e} < 64\%$$

$$1 - \frac{1}{e}$$

$$63\% < 1 - \frac{1}{e} < 64\%$$

$$63\% < 1 - \sum_{k=0}^4 \frac{(-1)^k}{k!} < 64\%$$

permutações sobre A com algum ponto fixo

permutações sobre A com algum ponto fixo

$$\left(1 - \sum_{k=0}^{|A|} \frac{(-1)^k}{k!} \right) |A|!$$

permutações sobre A com algum ponto fixo

$$\left(1 - \sum_{k=0}^{|A|} \frac{(-1)^k}{k!}\right) |A|! \approx \left(1 - \frac{1}{e}\right) |A|!$$

Corolário 85

probabilidade de permutação sobre conjunto de n elementos ter ponto fixo

probabilidade de permutação sobre conjunto de n elementos ter ponto fixo

$$1 - \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$$

probabilidade de permutação sobre conjunto de n elementos ter ponto fixo

$$1 - \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} \approx 1 - \frac{1}{e}$$

maneiras de distribuir n bolas distintas por n urnas distintas

- # maneiras de distribuir n bolas distintas por n urnas distintas
- cada urna receba exatamente uma bola

Corolário 86

maneiras de distribuir n bolas distintas por n urnas distintas

- cada urna receba exatamente uma bola
- ao menos uma bola caia na “sua” urna

maneiras de distribuir n bolas distintas por n urnas distintas

- cada urna receba exatamente uma bola
- ao menos uma bola caia na “sua” urna

$$\left(1 - \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}\right) n!$$

maneiras de distribuir n bolas distintas por n urnas distintas

- cada urna receba exatamente uma bola
- ao menos uma bola caia na “sua” urna

$$\left(1 - \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}\right) n! \approx \left(1 - \frac{1}{e}\right) n!$$