Matemática Discreta

Aula Extra: Exercícios e Exemplos Interessantes

Renato Carmo
David Menotti

Departamento de Informática da UFPR

Segundo Período Especial de 2020

Aula Extra: Exercícios e Exemplos Interessantes

- Exercício 79
- Exercício 83
- Exercício 84
- Exercício 87
- Exercício 85
- Exercício 49
- Exercício 61
- Exercício 63

1. Exercício 79

Considere o Algoritmo Mínimo(v, a, b) dado por

Minimo(v,a,b)

Se $a = b$
    Devolva a
$m \leftarrow \left\lfloor \frac{a+b}{2} \right\rfloor$
$m_1 \leftarrow$ Mínimo(v, a, m)
$m_2 \leftarrow$ Mínimo$(v, m+1, b)$
Se $v[m_1] \leq v[m_2]$
    Devolva m_1
Devolva m_2

Prove por indução em n que, dado $a \in \mathbb{Z}$, a execução de Mínimo$(v, a, a+n-1)$ faz $n-1$ comparações entre elementos de v, para todo $n \geq 1$.

1. Exercício 79

Seja $a \in \mathbb{Z}$ e seja $C\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ a função dada por

$$C(n) := \text{número de comparações na execução de Minimo}(v, a, a+n-1).$$

1. Exercício 79

Seja $a \in \mathbb{Z}$ e seja $C\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ a função dada por

$$C(n) := \text{número de comparações na execução de Minimo}(v, a, a+n-1).$$

Vamos provar que

$$C(n) = n - 1, \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \text{ e } n > 0,$$

por indução em n.

1. Exercício 79

Seja $a \in \mathbb{Z}$ e seja $C : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ a função dada por

$$C(n) := \text{número de comparações na execução de Minimo}(v, a, a+n-1).$$

Vamos provar que

$$C(n) = n - 1, \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \text{ e } n > 0,$$

por indução em n.

HI: Seja $p \in \mathbb{N}$ e $p > 0$ tal que

$$C(k) = k - 1, \text{ para todo } k \in [1..p].$$

1. Exercício 79

Passo: Vamos provar que

$$C(p+1) = (p+1) - 1 = p.$$

Passo: Vamos provar que

$$C(p+1) = (p+1) - 1 = p.$$

Do Algoritmo Minimo() temos que, se $p+1 > 1$, então

$$\begin{aligned} C(p+1) &= C(m-a+1) + C((a+((p+1)-1)) - (m+1)+1) + 1 \\ &= C(m-a+1) + C(a+p-m) + 1, \end{aligned}$$

onde

$$m = \left\lfloor \frac{a+(a+(p+1)-1)}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{2a+p}{2} \right\rfloor = \left\lfloor a + \frac{p}{2} \right\rfloor = a + \left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor$$

1. Exercício 79

Passo: ...

e, portanto,

$$m - a + 1 = a + \left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor - a + 1 = \left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor + 1,$$

1. Exercício 79

Passo: ...

e, portanto,

$$m - a + 1 = a + \left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor - a + 1 = \left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor + 1,$$

e

$$a + p - m = a + p - \left(a + \left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor\right) = a + p - a - \left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor = \left\lceil \frac{p}{2} \right\rceil$$

1. Exercício 79

Passo: ...

e, portanto,

$$m - a + 1 = a + \left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor - a + 1 = \left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor + 1,$$

e

$$a + p - m = a + p - \left(a + \left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor \right) = a + p - a - \left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor = \left\lceil \frac{p}{2} \right\rceil$$

e daí

$$C(p+1) = C\left(\left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor + 1 \right) + C\left(\left\lceil \frac{p}{2} \right\rceil \right) + 1.$$

1. Exercício 79

Passo: ...

Se $1 \leq \left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor + 1 \leq p$ e $1 \leq \left\lceil \frac{p}{2} \right\rceil \leq p$, então, pela HI temos

$$\begin{aligned} C\left(\left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor + 1\right) &= \left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor, \text{ e} \\ C\left(\left\lceil \frac{p}{2} \right\rceil\right) &= \left\lceil \frac{p}{2} \right\rceil - 1, \end{aligned}$$

1. Exercício 79

Passo: ...

Se $1 \leq \left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor + 1 \leq p$ e $1 \leq \left\lceil \frac{p}{2} \right\rceil \leq p$, então, pela HI temos

$$\begin{aligned} C\left(\left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor + 1\right) &= \left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor, \text{ e} \\ C\left(\left\lceil \frac{p}{2} \right\rceil\right) &= \left\lceil \frac{p}{2} \right\rceil - 1, \end{aligned}$$

e daí

$$C(p+1) = \left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor + \left\lceil \frac{p}{2} \right\rceil - 1 + 1 = p.$$

1. Exercício 79

Passo: ...

Se $1 \leq \left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor + 1 \leq p$ e $1 \leq \left\lceil \frac{p}{2} \right\rceil \leq p$, então, pela HI temos

$$\begin{aligned} C\left(\left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor + 1\right) &= \left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor, \text{ e} \\ C\left(\left\lceil \frac{p}{2} \right\rceil\right) &= \left\lceil \frac{p}{2} \right\rceil - 1, \end{aligned}$$

e daí

$$C(p+1) = \left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor + \left\lceil \frac{p}{2} \right\rceil - 1 + 1 = p.$$

Base: Vamos provar que $C(p) = p - 1$ para todo $p \in \{1\}$.

Do Algoritmo Minimo() temos que, se $p = 1$, então

$$C(1) = 0 = p - 1.$$

2. Exercício 83

O seguinte algoritmo devolve o n-ésimo termo da sequência de Fibonacci.

F(n)

Se $n \leq 1$
    Devolva n
Devolva $\mathbf{F}(n-1) + \mathbf{F}(n-2)$

Prove que o número de somas na execução de $F(n)$ é pelo menos $F(n)$, para todo $n \geq 2$.

2. Exercício 83

Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $S(n)$ o número de somas na execução de $F(n)$.

2. Exercício 83

Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $S(n)$ o número de somas na execução de $F(n)$.

Vamos provar por indução em n que $S(n) \geq F(n)$ para todo $n \geq 2$.

2. Exercício 83

Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $S(n)$ o número de somas na execução de $F(n)$.

Vamos provar por indução em n que $S(n) \geq F(n)$ para todo $n \geq 2$.

HI: Seja $a \in \mathbb{N}$ e $a \geq 2$ tal que

$$S(k) \geq F(k), \text{ para todo } k \in [2..a].$$

2. Exercício 83

Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $S(n)$ o número de somas na execução de $F(n)$.

Vamos provar por indução em n que $S(n) \geq F(n)$ para todo $n \geq 2$.

HI: Seja $a \in \mathbb{N}$ e $a \geq 2$ tal que

$$S(k) \geq F(k), \text{ para todo } k \in [2..a].$$

Passo: Vamos provar que $S(a+1) \geq F(a+1)$.

2. Exercício 83

Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $S(n)$ o número de somas na execução de $F(n)$.

Vamos provar por indução em n que $S(n) \geq F(n)$ para todo $n \geq 2$.

HI: Seja $a \in \mathbb{N}$ e $a \geq 2$ tal que

$$S(k) \geq F(k), \text{ para todo } k \in [2..a].$$

Passo: Vamos provar que $S(a+1) \geq F(a+1)$.
Do algoritmo temos que, se $a+1 \geq 2$, então

$$S(a+1) = S(a) + S(a-1) + 1,$$

2. Exercício 83

Passo: ...

Se $a - 1 \geq 2$, ou seja, $a + 1 \geq 4$, temos da HI

$$\begin{aligned} S(a) &\geq F(a), \text{ e} \\ S(a-1) &\geq F(a-1), \end{aligned}$$

2. Exercício 83

Passo: ...

Se $a - 1 \geq 2$, ou seja, $a + 1 \geq 4$, temos da HI

$$\begin{aligned} S(a) &\geq F(a), \text{ e} \\ S(a-1) &\geq F(a-1), \end{aligned}$$

e, portanto

$$S(a+1) \geq F(a) + F(a-1) + 1 \geq F(a+1) + 1 > F(a+1).$$

2. Exercício 83

Base: Vamos provar que

$$S(b) \geq F(b), \text{ para todo } b \in \{2, 3\}.$$

Base: Vamos provar que

$$S(b) \geq F(b), \text{ para todo } b \in \{2, 3\}.$$

Basta verificar que

$$\begin{aligned} S(2) &= 1 = & F(2), \\ S(3) &= 2 = & F(3). \end{aligned}$$

3. Exercício 84

a) Combine as informações dos Exercícios 53, 76 e 78 para propor um algoritmo para o cálculo de $F(n)$.

b) Dê uma expressão para o número $s(n)$ de somas efetuadas pelo seu algoritmo para calcular $F(n)$.

c) Compare o resultado obtido com o número de somas efetuadas pelo algoritmo do Exercício 83.

3. Exercício 84.a Combine as informações dos Exercícios 53, 76 e 78 para propor um algoritmo para o cálculo de $F(n)$.

a) Do Exercício 53 temos que

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} F(n+1) & F(n) \\ F(n) & F(n-1) \end{pmatrix}, \text{ para todo } n > 0.$$

3. Exercício 84.a Combine as informações dos Exercícios 53, 76 e 78 para propor um algoritmo para o cálculo de $F(n)$.

a) Do Exercício 53 temos que

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} F(n+1) & F(n) \\ F(n) & F(n-1) \end{pmatrix}, \text{ para todo } n > 0.$$

O Exercício 78 propõe o Algoritmo $\text{Exp}(x, n)$ que computa o valor de x^n.

3. Exercício 84.a Combine as informações dos Exercícios 53, 76 e 78 para propor um algoritmo para o cálculo de $F(n)$.

a) Do Exercício 53 temos que

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} F(n+1) & F(n) \\ F(n) & F(n-1) \end{pmatrix}, \text{ para todo } n > 0.$$

O Exercício 78 propõe o Algoritmo $\text{Exp}(x, n)$ que computa o valor de x^n. Combinando estas informações obtemos o seguinte algoritmo.

F(n)

Se $n \leq 1$

    Devolva n

$M \leftarrow \text{Exp}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, n\right)$

Devolva $M[1, 2]$

---

3. Exercício 84.b Dê uma expressão para o número $s(n)$ de somas efetuadas pelo seu algoritmo para calcular $F(n)$.

b) Segue imediatamente do Exercício 78 que a execução de $F(n)$ executa exatamente $\lfloor \lg(n) \rfloor + b(n) + 1$ multiplicações sobre a matriz M, onde b é a função do Exercício 76.

3. Exercício 84.b Dê uma expressão para o número $s(n)$ de somas efetuadas pelo seu algoritmo para calcular $F(n)$.

b) Segue imediatamente do Exercício 78 que a execução de $F(n)$ executa exatamente $\lfloor \lg(n) \rfloor + b(n) + 1$ multiplicações sobre a matriz M, onde b é a função do Exercício 76.
Cada multiplicação matricial efetuada, por sua vez, envolve 4 somas, de forma que

$$s(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n \leq 1, \\ 4(\lfloor \lg(n) \rfloor + b(n) + 1), & \text{se } n > 1. \end{cases}$$

3. Exercício 84.b Dê uma expressão para o número $s(n)$ de somas efetuadas pelo seu algoritmo para calcular $F(n)$.

b) Segue imediatamente do Exercício 78 que a execução de $F(n)$ executa exatamente $\lfloor \lg(n) \rfloor + b(n) + 1$ multiplicações sobre a matriz M, onde b é a função do Exercício 76.
Cada multiplicação matricial efetuada, por sua vez, envolve 4 somas, de forma que

$$s(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n \leq 1, \\ 4(\lfloor \lg(n) \rfloor + b(n) + 1), & \text{se } n > 1. \end{cases}$$

Do Exercício 76, temos que

$$b(n) \leq \lfloor \lg n \rfloor + 1, \text{ para todo } n > 0,$$

e, consequentemente,

$$s(n) = 4(\lfloor \lg(n) \rfloor + b(n) + 1) \leq 4(\lfloor \lg(n) \rfloor + \lfloor \lg n \rfloor + 1 + 1) = 8 \lfloor \lg(n) \rfloor + 8,$$

para todo $n > 0$.

3. Exercício 84.c Compare o resultado obtido com o número de somas efetuadas pelo algoritmo do Exercício 83.

c) Do Exercício 83 temos que $S(n) \geq F(n)$ para todo $n \geq 2$.

3. Exercício 84.c Compare o resultado obtido com o número de somas efetuadas pelo algoritmo do Exercício 83.

c) Do Exercício 83 temos que $S(n) \geq F(n)$ para todo $n \geq 2$.
Basta observar que $s(9) \leq 32 < F(9) = 34 \leq S(9)$.

3. Exercício 84.c Compare o resultado obtido com o número de somas efetuadas pelo algoritmo do Exercício 83.

c) Do Exercício 83 temos que $S(n) \geq F(n)$ para todo $n \geq 2$.
Basta observar que $s(9) \leq 32 < F(9) = 34 \leq S(9)$.
Na verdade, $s(8) \leq 32 < S(8) = 33$.

3. Exercício 84.c Compare o resultado obtido com o número de somas efetuadas pelo algoritmo do Exercício 83.

c) Do Exercício 83 temos que $S(n) \geq F(n)$ para todo $n \geq 2$.
Basta observar que $s(9) \leq 32 < F(9) = 34 \leq S(9)$.
Na verdade, $s(8) \leq 32 < S(8) = 33$.

Mais importante,

$$\lim \frac{s(n)}{S(n)} = 0,$$

ou seja, para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que

$$s(n) \leq \varepsilon S(n).$$

4. Exercício 87

Prove por indução em n que, se $0 \leq k \leq n$, então o seguinte algoritmo devolve $\frac{n!}{k!(n-k)!}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

B(n, k)

Se $k = 0$
    Devolva 1
Devolva $\frac{nB(n-1,k-1)}{k}$

---

4. Exercício 87

Vamos provar que se $0 \leq k \leq n$, então

$$B(n,k) = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

por indução em n.

4. Exercício 87

Vamos provar que se $0 \leq k \leq n$, então

$$B(n,k) = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

por indução em n.

HI: Seja $a \in \mathbb{N}$ tal que, se $k \in [0..m]$, então

$$B(m,k) = \frac{m!}{k!(m-k)!}, \text{ para todo } m \in [0..a].$$

4. Exercício 87

Passo: Vamos provar que se $k \in [0..a+1]$, então

$$B(a+1,k) = \frac{(a+1)!}{k!((a+1)-k)!}.$$

Passo: Vamos provar que se $k \in [0..a+1]$, então

$$B(a+1,k) = \frac{(a+1)!}{k!((a+1)-k)!}.$$

Seja $k \in [0..a+1]$.
Se $k = 0$, então

$$B(a+1,k) = 1.$$

e

$$\frac{(a+1)!}{k!((a+1)-k)!} = \frac{(a+1)!}{(a+1)!} = 1,$$

de modo que

$$B(a+1,k) = \frac{(a+1)!}{k!((a+1)-k)!}.$$

4. Exercício 87

Passo: ...

Se $k > 0$, então

$$B(a+1,k) = \frac{a+1}{k}B((a+1)-1,k-1) = \frac{a+1}{k}B(a,k-1),$$

e como $a \in [0..a]$, pela HI temos

$$B(a,k-1) = \frac{a!}{(k-1)!(a-(k-1))!},$$

e daí,

$$B(a+1,k) = \frac{a+1}{k}\frac{a!}{(k-1)!(a-(k-1))!} = \frac{(a+1)!}{k!((a+1)-k)!}.$$

4. Exercício 87

Base: Basta verificar que

$$B(0,0) = \frac{0!}{0!(0-0)!}$$

5. Exercício 85

Considere o seguinte algoritmo de ordenação, conhecido como “ordenação por inserção”.

Ordena(v, a, b)

Se $a \geq b$
    Devolva v
Ordena($v, a, b - 1$)
Insere(v, a, b)
Devolva v

---

onde ...

onde

Insere(v, a, b)

$p \leftarrow$ Busca($v[b], v, a, b-1$)
$i \leftarrow b$
Enquanto $i \geq p+1$
    Troca($v, i, i-1$)
    $i \leftarrow i-1$
Devolva v

Busca(x, v, a, b) é o algoritmo do Exercício 66, e
Troca(v, a, b) troca os valores de $v[a]$ e $v[b]$ entre si.

Use o resultado dos Exercícios 28 e 65 para estabelecer um limitante superior para o número de comparações na execução de Ordena($v, a, a+n-1$) em função do valor de n.

5. Exercício 85

Fazendo

B(n): número máximo de comparações na execução de Busca$(x, v, a, a+n-1)$,

I(n): número máximo de comparações na execução de Insere$(v, a, a+n-1)$,

O(n): número máximo de comparações na execução de Ordena$(v, a, a+n-1)$,

temos, para $n > 1$,

$$O(n) = O(n-1) + I(n),$$

e

$$I(n) = B(n).$$

5. Exercício 85

Então

$$\begin{aligned}
O(n) &= O(n-1) + I(n) \\
&= O(n-1) + B(n) = O(n-2) + B(n-1) + B(n) \\
&= \dots \\
&= O(n-(n-0)) + B(n-(n-1)) + B(n-(n-2)) + \dots + B(n-1) + B(n) \\
&= O(0) + B(1) + B(2) + \dots + B(n-1) + B(n) \\
&= O(0) + \sum_{i=1}^{n} B(i).
\end{aligned}$$

5. Exercício 85

Do *Algoritmo* Ordena(v, a, b) temos que $O(0) = 0$ e do item anterior temos que

$$B(n) \leq \lfloor \lg i \rfloor + 1, \text{ para todo } n \geq 1,$$

de forma que

$$\begin{aligned}
O(n) &\leq 0 + \sum_{i=1}^{n} (\lfloor \lg n \rfloor + 1) \\
&\overset{\text{T 5}}{=} \sum_{i=1}^{n} \lfloor \lg i \rfloor + \sum_{i=1}^{n} 1 \overset{\text{T 4}}{=} n + \sum_{i=1}^{n} \lfloor \lg i \rfloor \overset{\text{ex. 28}}{=} n + n \lfloor \lg n \rfloor - \left(2^{\lfloor \lg n \rfloor + 1} - \lfloor \lg n \rfloor - 2\right) \\
&= n \lfloor \lg n \rfloor + n + \lfloor \lg n \rfloor + 2 - 2^{\lfloor \lg n \rfloor + 1} \leq n \lfloor \lg n \rfloor + n + \lfloor \lg n \rfloor + 2 - n \\
&= n \lfloor \lg n \rfloor + \lfloor \lg n \rfloor + 2 \\
&= n \lfloor \lg n \rfloor \left(1 + \frac{\lfloor \lg n \rfloor + 2}{n \lfloor \lg n \rfloor}\right) \approx n \lfloor \lg n \rfloor
\end{aligned}$$

5. Exercício 85

Como

$$1 + \frac{\lfloor \lg n \rfloor + 2}{n \lfloor \lg n \rfloor} \leq \frac{5}{2},$$

para todo $n \geq 2$, então

$$O(n) \leq \frac{5}{2} n \lfloor \lg n \rfloor, \text{ para todo } n \geq 2.$$

6. Exercício 49

Prove por indução em n que, dados $x, y \in \mathbb{C}$,

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i y^{n-i} = (x+y)^n,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ e $n > 0$ [1].
Conclua a partir daí que

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ e $n > 0$.

[1] **Sugestão:** Use a definição de $\binom{n}{k}$ dada no Exercício 47

6. Exercício 49

Sejam $x, y \in \mathbb{C}$. Vamos provar que

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i y^{n-i} = (x+y)^n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

por indução em n.

6. Exercício 49

Sejam $x, y \in \mathbb{C}$. Vamos provar que

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i y^{n-i} = (x+y)^n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

por indução em n.

HI: Seja $a \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} x^i y^{k-i} = (x+y)^k, \text{ para todo } k \in [0..a].$$

6. Exercício 49

Passo: Vamos provar que

$$\sum_{i=0}^{a+1} \binom{a+1}{i} x^i y^{a+1-i} = (x+y)^{a+1}.$$

6. Exercício 49

Passo: Vamos provar que

$$\sum_{i=0}^{a+1} \binom{a+1}{i} x^i y^{a+1-i} = (x+y)^{a+1}.$$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{a+1} \binom{a+1}{i} x^i y^{a+1-i} &= \binom{a+1}{0} x^0 y^{a+1-0} + \sum_{i=1}^{a+1} \binom{a+1}{i} x^i y^{a+1-i} \\
&= x^0 y^{a+1} + \sum_{i=1}^{a+1} \left(\binom{a}{i} + \binom{a}{i-1} \right) x^i y^{a+1-i} \\
&= x^0 y^{a+1} + \sum_{i=1}^{a+1} \binom{a}{i} x^i y^{a+1-i} + \sum_{i=1}^{a+1} \binom{a}{i-1} x^i y^{a+1-i}
\end{aligned}$$

6. Exercício 49

Passo: ...

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{a+1}\binom{a+1}{i}x^i y^{a+1-i} &= x^0 y^{a+1} + \sum_{i=1}^{a+1}\binom{a}{i}x^i y^{a+1-i} + \sum_{i=1}^{a+1}\binom{a}{i-1}x^i y^{a+1-i} \\
&= \sum_{i=0}^{a+1}\binom{a}{i}x^i y^{a+1-i} + \sum_{i=0}^{a}\binom{a}{i}x^{i+1} y^{a+1-(i+1)} \\
&= \sum_{i=0}^{a}\binom{a}{i}x^i y^{a+1-i} + \binom{a}{a+1}x^{a+1} y^{a+1-(a+1)} \\
&\quad + x\sum_{i=0}^{a}\binom{a}{i}x^i y^{a-i} \\
&= y\sum_{i=0}^{a}\binom{a}{i}x^i y^{a-i} + x\sum_{i=0}^{a}\binom{a}{i}x^i y^{a-i}.
\end{aligned}
$$

6. Exercício 49

Passo: ...

Como $a \in [0..a]$, pela HI temos

$$\sum_{i=0}^{a} \binom{a}{i} x^i y^{a-i)} = (x+y)^a,$$

e daí

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{a+1} \binom{a+1}{i} x^i y^{a+1-i} &= y(x+y)^a + x(x+y)^a \\ &= (y+x)(x+y)^a = (x+y)^{a+1}.\end{aligned}$$

6. Exercício 49

Base: Basta provar que

$$(x+y)^1 = \sum_{i=0}^{1} \binom{1}{i} x^i y^{1-i}.$$

Por um lado, temos que

$$\sum_{i=0}^{1} \binom{1}{i} x^i y^{0-i} = \binom{1}{0} x^0 y^{1-0} + \binom{1}{1} x^1 y^{1-1} = y + x = (x+y),$$

por outro, temos que

$$(x+y)^1 = (x+y).$$

6. Exercício 49

Finalmente, para concluir que

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n,$$

basta tomar $x = y = 1$, e então

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} 1^i 1^{n-i} = (1+1)^n.$$

e portanto

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n.$$

7. Exercício 61

Prove, por indução em $|X|$ que, que se $f, g\colon A \to \mathbb{C}$ e $X \subseteq A$ é um conjunto finito, então

$$\sum_{x \in X} (f(x) + g(x)) = \sum_{x \in X} f(x) + \sum_{x \in X} g(x).$$

7. Exercício 61

Sejam $f, g \colon A \to \mathbb{C}$. Vamos provar que

$$\sum_{x \in X} (f(x) + g(x)) = \sum_{x \in X} f(x) + \sum_{x \in X} g(x), \text{ para todo } X \subseteq A,$$

por indução em $|X|$.

7. Exercício 61

Sejam $f, g\colon A \to \mathbb{C}$. Vamos provar que

$$\sum_{x \in X} (f(x) + g(x)) = \sum_{x \in X} f(x) + \sum_{x \in X} g(x), \text{ para todo } X \subseteq A,$$

por indução em $|X|$.

HI: Seja $a \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{x \in X} (f(x) + g(x)) = \sum_{x \in X} f(x) + \sum_{x \in X} g(x), \text{ para todo } X \subseteq A \mid |X| \in [0..a]$$

7. Exercício 61

Passo: Vamos provar que

$$\sum_{x\in X}(f(x)+g(x)) = \sum_{x\in X} f(x) + \sum_{x\in X} g(x), \text{ para todo } X \subseteq A \mid |X| = a+1.$$

7. Exercício 61

Passo: Vamos provar que

$$\sum_{x \in X} (f(x) + g(x)) = \sum_{x \in X} f(x) + \sum_{x \in X} g(x), \text{ para todo } X \subseteq A \mid |X| = a+1.$$

Seja $X \subseteq A$ tal que $|X| = a + 1$.
Como $a + 1 > 0$, então $X \neq \emptyset$ e existe $y \in X$ de forma que

$$\sum_{x \in X} (f(x) + g(x)) = \sum_{x \in X - \{y\}} (f(x) + g(x)) + (f(y) + g(y)).$$

7. Exercício 61

Passo: Vamos provar que

$$\sum_{x \in X} (f(x) + g(x)) = \sum_{x \in X} f(x) + \sum_{x \in X} g(x), \text{ para todo } X \subseteq A \mid |X| = a+1.$$

Seja $X \subseteq A$ tal que $|X| = a + 1$.
Como $a + 1 > 0$, então $X \neq \emptyset$ e existe $y \in X$ de forma que

$$\sum_{x \in X} (f(x) + g(x)) = \sum_{x \in X - \{y\}} (f(x) + g(x)) + (f(y) + g(y)).$$

Como $|X - \{y\}| = |X| - 1 = (a + 1) - 1 = a \in [0..a]$, temos da HI que

$$\sum_{x \in X - \{y\}} (f(x) + g(x)) = \sum_{x \in X - \{y\}} f(x) + \sum_{x \in X - \{y\}} g(x),$$

Passo: ...

e daí,

$$\begin{aligned}
\sum_{x\in X}(f(x)+g(x)) &= \sum_{x\in X-\{y\}} f(x) + \sum_{x\in X-\{y\}} g(x) + (f(y)+g(y)) \\
&= \sum_{x\in X-\{y\}} f(x) + f(y) + \sum_{x\in X-\{y\}} g(x) + g(y) \\
&= \sum_{x\in X} f(x) + \sum_{x\in X} g(x),
\end{aligned}$$

7. Exercício 61

Base: Vamos provar que

$$\sum_{x\in X}(f(x)+g(x))=\sum_{x\in X}f(x)+\sum_{x\in X}g(x),\text{ para todo } X\subseteq A \mid |X|=0.$$

Se $|X|=0$, então $X=\emptyset$ e

$$\sum_{x\in X}(f(x)+g(x))=0,$$

e

$$\sum_{x\in X}f(x)+\sum_{x\in X}g(x)=0+0=0.$$

8. Exercício 63

Prove por indução que qualquer valor maior ou igual a 4 reais pode ser obtido somente com cédulas de 2 e 5 reais.

8. Exercício 63

Um valor n pode ser obtido com cédulas de 2 e 5 reais se e somente se existem $d_n, c_n \in \mathbb{N}$ tais que

$$n = 2d_n + 5c_n.$$

8. Exercício 63

Um valor n pode ser obtido com cédulas de 2 e 5 reais se e somente se existem $d_n, c_n \in \mathbb{N}$ tais que

$$n = 2d_n + 5c_n.$$

Vamos provar que, para todo $n \geq 4$, existem $d_n, c_n \in \mathbb{N}$ tais que

$$n = 2d_n + 5c_n,$$

por indução em n.

8. Exercício 63

Um valor n pode ser obtido com cédulas de 2 e 5 reais se e somente se existem $d_n, c_n \in \mathbb{N}$ tais que

$$n = 2d_n + 5c_n.$$

Vamos provar que, para todo $n \geq 4$, existem $d_n, c_n \in \mathbb{N}$ tais que

$$n = 2d_n + 5c_n,$$

por indução em n.

HI: Seja $a \in \mathbb{N}$ e $a \geq 4$ tal que existem $d_k, c_k \in \mathbb{N}$ tais que

$$k = 2d_k + 5c_k, \text{ para todo } k \in [4..a].$$

8. Exercício 63

Passo: Vamos provar que existem $d_{a+1}, c_{a+1} \in \mathbb{N}$ tais que

$$a + 1 = 2d_{a+1} + 5c_{a+1}.$$

8. Exercício 63

Passo: Vamos provar que existem $d_{a+1}, c_{a+1} \in \mathbb{N}$ tais que

$$a + 1 = 2d_{a+1} + 5c_{a+1}.$$

Como $a \in [4..a]$, então, pela HI, existem $d_a, c_a \in \mathbb{N}$ tais que

$$a = 2d_a + 5c_a.$$

8. Exercício 63

Passo: ...

Se $c_a > 0$, então podemos fazer

$$\begin{aligned} d_{a+1} &:= d_a + 3, \text{ e} \\ c_{a+1} &:= c_a - 1, \end{aligned}$$

e daí

$$2d_{a+1} + 5c_{a+1} = 2(d_a + 3) + 5(c_a - 1) = 2d_a + 5c_a + 1 = a + 1.$$

8. Exercício 63

Passo: ...

Se, por outro lado, $c_a = 0$, então, como $a \geq 4$, temos $d_a \geq 2$ e podemos fazer

$$\begin{aligned} d_{a+1} &:= d_a - 2, \text{ e} \\ c_{a+1} &:= 1, \end{aligned}$$

e daí

$$2d_{a+1} + 5c_{a+1} = 2(d_a - 2) + 5(1) = 2d_a + 1 = a + 1.$$

8. Exercício 63

Base: Basta fazer

$$\begin{aligned} d_4 &:= 2, \text{ e} \\ c_4 &:= 0, \end{aligned}$$

e temos

$$4 = 2d_4 + 5c_4 = 2(2) + 5(0) = 4.$$