Matemática Discreta

Exercícios

12 de fevereiro de 2023

Sumário

Os exercícios estão classificados de acordo com a seguinte legenda.

-: exercícios de interesse marginal: complementam o assunto de alguma forma mas podem ser ignorados sem comprometer o entendimento.

@: exercícios programados para discussão em aula: procure fazê-los antes de serem discutidos em aula.

$\star$**:** exercícios prioritários: na impossibilidade de fazer todos, dê prioridade a estes.

#: exercícios mais difíceis e/ou trabalhosos: não comece por estes.

1 Elementos de Lógica

$1^{@}$. Das proposições abaixo, indique as verdadeiras e as falsas.

(a) "$2 \leq 3$".
(b) "$10 > 20$".
(c) "$x^2 \leq x$".

$2^{@}$. Das proposições abaixo, indique as verdadeiras e as falsas.

(a) $(1 < 2)$ e $(2 < 3) \implies (1 < 3)$,
(b) $(1 < 2) \implies (10 < 30)$,
(c) $1 > 2 \implies 2 < 3$,
(d) $1 > 2 \implies 2 > 3$.

$3^{@}$. Sejam P e Q os seguintes predicados.

$$\begin{aligned} P(x) &: x \leq x^2, \\ Q(x,y) &: x \leq y^2. \end{aligned}$$

Das proposições abaixo, indique as verdadeiras e as falsas.

(a) $P(2)$.
(b) $P(1/2)$.
(c) $Q(1,1)$.
(d) $R(t) = Q(1,t)$.

$4^{@}$. Seja $P(x)$ o predicado "$x \leq x^2$".

Das proposições abaixo, indique as verdadeiras e as falsas.

(a) $P(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$.
(b) $P(x)$, para algum $x \in \mathbb{R}$.
(c) $P(x)$, para todo $x \geq 1$.
(d) $P(x)$, para algum $0 < x < 1$.

$5^{\star}$. Prove que se A, B e C são proposições, então

(a) $F \implies A$, ou seja, a partir de uma proposição falsa pode-se concluir qualquer coisa.

(b) $A \implies B \equiv (\text{ não } A) \text{ ou } B$.

(c) $(A \implies B) \equiv ((\text{ não } B) \implies (\text{ não } A))$, também conhecida como *contrapositiva* da implicação. Uma "prova de $A \implies B$ por contrapositiva" é uma prova de que $((\text{ não } B) \implies (\text{ não } A))$.

(d) $(A \implies F) \equiv \text{ não } A$, ou seja, uma implicação cujo consequente é falso só pode ser verdadeira se o antecedente é falso. Este é o princípio por baixo das "provas por contradição".

(e) $((A \implies B) \text{ ou } (A \implies C)) \equiv (A \implies (B \text{ ou } C))$ (distributividade da disjunção pela implicação).

(f) $((A \implies B) \text{ e } (A \implies C)) \equiv (A \implies (B \text{ e } C))$ (distributividade da conjunção pela implicação).

(g) $((B \implies A) \text{ ou } (C \implies A)) \equiv ((B \text{ e } C) \implies A)$ (outra distributividade).

(h) $((B \implies A) \text{ e } (C \implies A)) \equiv ((B \text{ ou } C) \implies A)$ (outra distributividade).

(i) $((A \implies B) \text{ e } (A \implies (\text{ não } B))) \implies (\text{ não } A)$ (outra maneira de expressar o princípio por baixo de uma prova por contradição).

6*. Considere os seguintes predicados.

$$\begin{aligned} I(x) &\equiv x \in \mathbb{Z}, \\ P(f,x) &\equiv I(x) \implies I(f(x)), \\ Q(f,x) &\equiv I(f(x)) \implies I(x). \end{aligned}$$

Dê um exemplo de função $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que

(a) não satisfaz o predicado $P(g,x), \text{ para todo } x \in \mathbb{R}$.

(b) satisfaz o predicado $\text{ não } (P(g,x), \text{ para todo } x \in \mathbb{R})$.

(c) satisfaz o predicado $Q(g,x), \text{ para todo } x \in \mathbb{R}$.

(d) não satisfaz o predicado $Q(g,x), \text{ para todo } x \in \mathbb{R}$.

7*. Considere os seguintes predicados.

$$\begin{aligned}
L(f) &\equiv \lim f(n) = 0,\\
P(n,f,g,h) &\equiv f(n) = g(n)(1+h(n)),\\
B(f,g,h) &\equiv L(h) \text{ e } (P(n,f,g,h), \text{ para todo } n \in \mathbb{N}),\\
A(f,g) &\equiv B(f,g,h), \text{ para algum } h\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Dê um exemplo de funções $f, g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ que

(a) satisfazem $A(f,g)$.

(b) não satisfazem $A(f,g)$.

8$^\#$. Seja $O(f)$ o seguinte predicado (onde $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$).

$$(((n \geq k \implies |f(n)| \leq c), \text{ para algum } k > 0), \text{ para algum } c > 0), \text{ para todo } n \geq k.$$

Avalie as seguintes proposições justificando cada uma, isto é, apresentando uma prova de se são verdadeiras ou falsas.

(a) $O(n/(n-1))$,

(b) $O(n)$,

(c) $O(10 + 1/n)$,

(d) $O(\log n)$,

(e) $O(42)$.

9$^\#$. Considere os seguintes predicados.

$$\begin{aligned}
P_1(f,g,c,n) &\equiv |f(n)| \leq c|g(n)|,\\
P_2(f,g,c,k) &\equiv P_1(f,g,c,n), \text{ para todo } n \geq k,\\
P_3(f,g,c) &\equiv P_2(f,g,c,k), \text{ para algum } k \in \mathbb{N},\\
O(f,g) &\equiv P_3(f,g,c), \text{ para algum } c \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Para cada par de funções $f, g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, classifique as proposições abaixo como verdadeiras ou falsas.

(a) $O(f,g)$, para $f(n) = n$ e $g(n) = n^2$.

(b) $O(g, f)$, para $f(n) = n$ e $g(n) = n^2$.

(c) $O(f, g)$, para $f(n) = n/2$ e $g(n) = n$.

(d) $O(g, f)$, para $f(n) = n/2$ e $g(n) = n$.

$10^{\#}$. Sejam $D(x, y, d)$ e $M(x, y)$ os seguintes predicados, respectivamente.

$D(x, y, d)$**:** $|x - y| < d$,

$M(x, y)$**:** $x > y$.

Use os predicados $D(x, y, d)$ e $M(x, y)$ para expressar os seguintes predicados.

$L_1(f, a, l)$**:** $\lim_{x \to a} f(x) = l$.

$L_2(f, l)$**:** $\lim_{x \to \infty} f(x) = l$.

$L_3(f, a)$**:** $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$.

$L_4(f)$**:** $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$

2 Conjuntos e Inteiros

$11^{@}$. Seja A um conjunto finito e seja $B \subseteq A$. Prove que

$$A = (A - B) \cup B,$$

$12^{\star}$. Sejam A, B e C conjuntos finitos. Prove que

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C),$$

$13^{\star}$. Dados $f, g \colon A \to \mathbb{C}$ e $X \subseteq A$ e $c \in \mathbb{C}$, é verdade que

(a)
$$\prod_{x \in X} c = c|X|?$$

(b)
$$\prod_{x \in X} (f(x) + g(x)) = \prod_{x \in X} f(x) + \prod_{x \in X} g(x)?$$

(c)

$$\sum_{x \in X} f(x)g(x) = \left(\sum_{x \in X} f(x) \right) \left(\sum_{x \in X} g(x) \right)?$$

Justifique.

14$^{\#}$. Seja A um conjunto e seja $k \in \mathbb{N}$. Vamos denotar por $\binom{A}{k}$ o conjunto dos subconjuntos de k elementos de A, isto é,

$$\binom{A}{k} = \{S \subseteq A \mid |S| = k\}.$$

Dado $a \in A$, sejam

$$\begin{aligned} A^- &= \binom{A - \{a\}}{k}, \\ A^+ &= \binom{A - \{a\}}{k-1}, \\ \overline{A} &= \left\{ S \cup \{a\} \mid S \in A^+ \right\}. \end{aligned}$$

Prove que

$$\binom{A}{k} = A^- \cup \overline{A},$$

3 Aproximação Assintótica

15$^{@}$. A *Série Harmônica* é a série dada por

$$H(n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}.$$

A diferença $H(n) - \ln n$ converge e seu limite é conhecido como *constante de Euler–Mascheroni*, isto é,

$$\lim H(n) - \ln n = \gamma := 0.57721566490153286060651209008240243104215933593992 \ldots$$

Prove que

$$H(n) \approx \ln n.$$

16[@]. Prove que

$$\binom{n}{2} \approx \frac{n^2}{2}$$

17[@].

$$\sum_{i=1}^{n} i \approx \frac{n^2}{2}$$

18[@]. A partir da aproximação de Stirling,

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n,$$

prove que

$$\log_b n! \approx n \log_b n, \text{ para todo } b > 1.$$

19[@]. Use o resultado do Exercício 18 para provar que

$$\sum_{i=1}^{n} \log_b i \approx n \log_b n, \text{ para todo } b > 1$$

20*. É verdade que

$$\lg n \approx \log n?$$

Justifique.

21*. A partir da aproximação de Taylor

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i!} \approx e^x, \text{ para todo } x \in \mathbb{C},$$

conclua que

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \frac{1}{i!} \approx \frac{1}{e}.$$

22*. Seja $P \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ dado por

$$P(n) = a_0 n^0 + a_1 n^1 + a_2 n^2 + \ldots + a_k n^k,$$

com $a_k \neq 0$, um polinômio de grau k.

Prove que

$$P(n) \approx a_k n^k.$$

23*. Prove que

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \approx \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

24*. Prove que

$$\frac{5-3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{5+3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - 1 \approx \frac{5+3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

25*. Seja $c \in \mathbb{C} - \{0,1\}$ e seja

$$s(n) = \sum_{i=0}^{n} c^i.$$

Prove que

(a) se $0 < c < 1$, então $s(n) \approx \frac{1}{1-c}$.

(b) se $c = 1$, então $s(n) = n + 1$.

(c) se $c > 1$, então $s(n) \approx \frac{c^{n+1}}{c-1}$,

26*. Sejam $F, f, g, h \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ e $n_0 \in \mathbb{N}$ tais que $F(n) \approx f(n)$, $F(n) \approx h(n)$, e

$$f(n) \leq g(n) \leq h(n), \text{ para todo } n \geq n_0,$$

Prove que, neste caso,

$$F \approx f \approx g \approx h.$$

27*. Sejam $f, g \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Prove que $f(n) \approx g(n)$ se e somente se existe $\varepsilon \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(n) = g(n)(1 + \varepsilon(n)),$$

e

$$\lim \varepsilon(n) = 0.$$

28*. Prove que, se $f, g, h\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, então

(a) $f(n) \approx f(n)$.

(b) Se $f(n) \approx g(n)$, então $g(n) \approx f(n)$.

(c) Se $f(n) \approx g(n)$ e $g(n) \approx h(n)$ então $f(n) \approx h(n)$.

29*. Sejam $f, g\colon \ : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. É possível que $f(n) \approx g(n)$ e $\lim f(n) - g(n) = \infty$? Justifique.

30*. Dê um exemplo de uma função $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ tal que $f(n)$ não é inteiro para uma quantidade infinita de valores de $n \in \mathbb{N}$ e $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lfloor f(i) \rfloor \approx \sum_{i=1}^{n} f(i)$.

31*. É verdade que $\sum_{i=1}^{n} \lfloor f(i) \rfloor \approx \sum_{i=1}^{n} f(i)$ para toda $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$? Justifique.

4 Piso e Teto

$32^\star$. É verdade que $\lfloor f(n) \rfloor \approx f(n)$ para toda $f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$? Justifique.

$33^\star$. É verdade que $\sum_{i=1}^{n} \lfloor f(i) \rfloor \approx \sum_{i=1}^{n} f(i)$ para toda $f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$? Justifique.

$34^\star$. Prove que $\lceil x \rceil$ é o único inteiro que satisfaz

$$x \leq \lceil x \rceil < x + 1,$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

$35^\star$. Prove que

$$\lceil x \rceil + z = \lceil x + z \rceil .$$

para todo $x \in \mathbb{R}$ e todo $z \in \mathbb{Z}$.

$36^\star$. Prove que, para todo $n \in \mathbb{N}$,

- $\left\lfloor \dfrac{n+1}{2} \right\rfloor = \left\lceil \dfrac{n}{2} \right\rceil$
- $\left\lceil \dfrac{n-1}{2} \right\rceil = \left\lfloor \dfrac{n}{2} \right\rfloor$

$37^\star$. Sejam $n, m \colon \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ dadas por

$$\begin{aligned} n(a,b) &= b - a + 1, \\ m(a,b) &= \left\lfloor \frac{a+b}{2} \right\rfloor, \end{aligned}$$

Prove que, para todo $a, b \in \mathbb{Z}$,

(a) $a + b$ é par se e somente se $n(a,b)$ é ímpar.

(b) $n(a, m(a,b)) = \left\lceil \dfrac{n(a,b)}{2} \right\rceil$.

(c) $n(m(a,b)+1, b) = \left\lfloor \dfrac{n(a,b)}{2} \right\rfloor$.

(d) $n(a, m(a,b) - 1) = \left\lfloor \dfrac{n(a,b) - 1}{2} \right\rfloor$.

[1]

38*. Prove que, para todo $x \in \mathbb{R}$,

(a) $x - \lfloor x \rfloor < 1$.

(b) $\lceil x \rceil - x < 1$.

(c) $\lfloor x \rfloor = \lceil x \rceil$ se e somente se $x \in \mathbb{Z}$

(d) $\lceil x \rceil - \lfloor x \rfloor \in \{0, 1\}$.

39*. Prove que, para todo $x \in \mathbb{R}$, temos que $\min \{k \in \mathbb{Z} \mid k > x\}$ é o único inteiro m satisfazendo $x < m \leq x + 1$ e conclua daí que

$$\min \{k \in \mathbb{Z} \mid k > x\} = \lfloor x \rfloor + 1.$$

40*. Prove que

$$\max \{k \in \mathbb{Z} \mid k < x\} = \lceil x - 1 \rceil,$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

41@. Prove que

$$\frac{n}{2} < 2^{\lfloor \lg n \rfloor} \leq n \leq 2^{\lceil \lg n \rceil} < 2n,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$

42*. Prove que, para todo $n > 0$,

(a)

$$\frac{1}{2} < \frac{n}{2^{\lceil \lg n \rceil}} \leq 1 \leq \frac{n}{2^{\lfloor \lg n \rfloor}} < 2.$$

(b)

$$\left\lfloor \frac{n}{2^{\lfloor \lg n \rfloor}} \right\rfloor = 1.$$

(c)

$$\left\lfloor \frac{n}{2^x} \right\rfloor = 0 \text{ se e somente se } x > \lg n.$$

[1] **Sugestão:** Use o Exercício 36

(d)
$$\lfloor \lg n \rfloor > \lfloor \lg(n-1) \rfloor \text{ se e somente se } n \text{ é potência de 2.}$$

(e)
$$\lceil \lg n \rceil < \lceil \lg(n+1) \rceil \text{ se e somente se } n \text{ é potência de 2.}$$

(f)
$$\lceil \lg(n+1) \rceil = \lfloor \lg n \rfloor + 1.$$

43*. Seja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função crescente e contínua satisfazendo

$$f(x) \in \mathbb{Z} \implies x \in \mathbb{Z}, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Prove que
$$\lceil f(\lceil x \rceil) \rceil = \lceil f(x) \rceil\,, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

44*. Seja k um inteiro positivo e seja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função dada por

$$f(x) = \frac{x}{k}.$$

Prove que

(a) f uma função contínua.
(b) f uma função crescente.
(c) $f(x) \in \mathbb{Z} \implies x \in \mathbb{Z}$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

45$^-$. Prove que se $f\colon A \to B$ e $g\colon B \to C$ são funções contínuas, então $f \circ g\colon A \to C$ é uma função contínua.

46$^-$. Sejam $A, B, C \subseteq \mathbb{R}$ e $f\colon A \to B$ e $g\colon B \to C$ funções crescentes. Prove que $f \circ g\colon A \to C$ é uma função crescente.

47$^-$. Sejam $A, B, C \subseteq \mathbb{R}$ e sejam $f\colon A \to B$ e $g\colon B \to C$ funções contínuas e crescentes satisfazendo

$$f(x) \in \mathbb{Z} \implies x \in \mathbb{Z}, \text{ para todo } x \in A, \text{ e}$$
$$g(x) \in \mathbb{Z} \implies x \in \mathbb{Z}, \text{ para todo } x \in B.$$

Prove que

$$\begin{aligned} \lfloor f \circ g(\lfloor x \rfloor) \rfloor &= \lfloor f \circ g(x) \rfloor, \text{ e} \\ \lceil f \circ g(\lceil x \rceil) \rceil &= \lceil f \circ g(x) \rceil, \end{aligned}$$

para todo $x \in A$.

48$^-$. Dizemos que uma função $f\colon A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é integralizada se

$$f(x) \in \mathbb{Z} \implies x \in \mathbb{Z}, \text{ para todo } x \in A,$$

Sejam $A, B, C \subseteq \mathbb{R}$. Prove que se $f\colon A \to B$ e $g\colon B \to C$ são funções integralizadas, então $f \circ g\colon A \to C$ é uma função integralizada.

49$^\#$. A soma

$$\sum_{i=1}^{n} \lfloor \lg i \rfloor \tag{1}$$

aparece com certa frequência em aplicações ligadas à computação. [2].

(a) Prove que, dado $k \in \mathbb{N}$, temos

$$\lfloor \lg i \rfloor = k \text{ para todo } i \in [2^k..2^{k+1} - 1].$$

(b) Use esta observação para agrupar convenientemente os termos em (1).

(c) Prove que[3]

$$\sum_{i=1}^{n} \lfloor \lg i \rfloor = n \lfloor \lg n \rfloor - \left(2^{\lfloor \lg n \rfloor + 1} - \lfloor \lg n \rfloor - 2\right).$$

(d) Prove que

$$\sum_{i=1}^{n} \lfloor \lg i \rfloor \approx \sum_{i=1}^{n} \lg i.$$

(e) Prove que[4]

$$\sum_{i=1}^{n} \lfloor \lg i \rfloor \approx n \lg n.$$

[2]Veja o Exercício 89 para um exemplo.

[3]**Sugestão:** use o resultado do Exercício 42 e o fato de que $\sum_{i=0}^{n} i2^i = 2^{n+1}(n-1) + 2$.

[4]**Sugestão:** use o resultado do Exercício 42

(f) Prove que

$$\lg n! \approx n \lg n.$$

(g) As proposições acima podem ser generalizadas para logaritmos em outras bases além de 2? Como?

50#. Prove que

(a)

$$\sum_{i=0}^{\lfloor \lg n \rfloor - 1} 2^i \left\lfloor \frac{n}{2^i} \right\rfloor - 2^{\lfloor \lg n \rfloor} + 1 \approx n \lg n$$

(b)

$$\sum_{i=0}^{\lfloor \lg n \rfloor} 2^i \left\lceil \frac{n}{2^i} \right\rceil - 2^{\lfloor \lg n \rfloor + 1} + 1 \approx n \lg n$$

51@.

$$\lg n \approx \lfloor \lg n \rfloor \approx \lceil \lg n \rceil$$

5 Indução

52[@]. Prove que

$$\sum_{i=0}^{n} c^i = \frac{c^{n+1}-1}{c-1},$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $c \in \mathbb{C} - \{0, 1\}$.

53*. Prove por indução que

$$\sum_{i=0}^{n} i2^i = 2^{n+1}(n-1) + 2,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

54*. Dados $n, k \in \mathbb{N}$, o *coeficiente binomial* $\binom{n}{k}$ é definido da seguinte maneira

$$\binom{n}{k} := \begin{cases} 1, & \text{se } k = 0, \\ \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}, & \text{se } 1 \leq k \leq n, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Prove, por indução em n que, se $0 \leq k \leq n$, então

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

55*. Prove que (cfr. Exercício 54

$$\sum_{i=k}^{n} \binom{i}{k} = \binom{n+1}{k+1}, \text{ para todo } n, k \in \mathbb{N}.$$

56*. Prove por indução em n que, dados $x, y \in \mathbb{C}$,

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i y^{n-i} = (x+y)^n,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ e $n > 0$ [5].

[5] **Sugestão:** Use a definição de $\binom{n}{k}$ dada no Exercício 54

Conclua a partir daí que

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ e $n > 0$.

57[@]. Prove por indução em n que

$$2^n < n!, \text{ para todo } n \geq 4.$$

58[@]. A *sequência de Fibonacci* é a função $F\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dada por

$$F(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n \leq 1 \\ F(n-1) + F(n-2), & \text{se } n > 1. \end{cases}$$

(a) Prove por indução em n que

$$F(n) = \frac{\sqrt{5}}{5} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right), \text{ para todo } n \in \mathbb{N}$$

(b) Conclua que

$$F(n) \approx \frac{\sqrt{5}}{5} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n$$

59*. Prove que

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} F(n+1) & F(n) \\ F(n) & F(n-1) \end{pmatrix}, \text{ para todo } n > 0,$$

onde F é a sequência de Fibonacci (cfr Exercício 58)[6].

60*. Prove por indução em n que

$$(\sqrt{2})^{n-1} \leq F(n) \leq 2^{n-1} \text{ para todo } n \geq 3,$$

onde $F(n)$ denota a sequência de Fibonacci (cfr Exercício 58).

[6] Este é um dos algoritmos mais eficientes para o cálculo da sequência de Fibonacci.

61*. O número de comparações no pior caso de uma execução do algoritmo MergeSort para um vetor de n elementos é dado pela função

$$T(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n < 2, \\ T\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + T\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right) + n - 1, & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

Prove que $T^-(n) \leq T(n) \leq T^+(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, onde T^+ e T^- são as seguintes funções.

$$T^-(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n < 2, \\ 2T^-\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + n - 1, & \text{se } n \geq 2, \end{cases}$$

$$T^+(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n < 2, \\ 2T^+\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right) + n - 1, & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

62*. Dados $n_1, \ldots, n_k$, o *coeficiente multinomial* é definido por

$$\binom{n_1 + \ldots + n_k}{n_1, \ldots, n_k} := \frac{(n_1 + \ldots + n_k)!}{n_1! n_2! \ldots n_k!}.$$

Observe que o coeficiente multinomial é uma generalização do coeficiente binomial, pois

$$\binom{n}{n_1} = \binom{n}{n_1, n - n_1}.$$

Prove por indução em k que

$$\binom{n_1 + \ldots + n_k}{n_1, \ldots, n_k} = \binom{n_1 + \ldots + n_{k-1}}{n_1, \ldots, n_{k-1}} \binom{n_1 + \ldots + n_k}{n_k}, \text{ para todo } k \geq 2.$$

63*. Considere o seguinte algoritmo.

```
Busca(x, v, a, b)
----------------------------
Se a > b
    Devolva a − 1

m ← ⌊(a+b)/2⌋
Se x < v[m]
    Devolva Busca(x, v, a, m − 1)
Devolva Busca(x, v, m + 1, b)
```

Prove que Busca(x, v, a, b) é o único inteiro em $[a - 1..b]$ satisfazendo

$$x < v[i] \text{ para todo } i \in [\text{Busca}(x, v, a, b) + 1..b]$$

64⋆. Use o fato de que se A e B são conjuntos finitos e disjuntos entre si então

$$|A \cup B| = |A| + |B|,$$

para provar, por indução em n que, se $A_1, \ldots, A_n$ são conjuntos finitos dois a dois disjuntos entre si, então,

$$\left| \bigcup_{i=1}^{n} A_i \right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i|$$

65@. Prove por indução em n que se $A_1, \ldots, A_n$ e B são conjuntos, então

$$\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i \right) \cap B = \bigcup_{i=1}^{n} (A_i \cap B),$$

66⋆. Prove, por indução em $|X|$ que, se X é um conjunto finito e $c \in \mathbb{C}$, então

$$\prod_{x \in X} c = c^{|X|}.$$

67⋆. Prove, por indução em $|X|$ que, se X é um conjunto finito e $c \in \mathbb{C}$, então

$$\sum_{x \in X} c = c|X|.$$

68⋆. Prove, por indução em $|X|$ que, que se $f, g \colon A \to \mathbb{C}$ e $X \subseteq A$ é um conjunto finito, então

$$\sum_{x \in X} (f(x) + g(x)) = \sum_{x \in X} f(x) + \sum_{x \in X} g(x).$$

69⋆. Prove, por indução em $|X|$ que, que se $f \colon A \to \mathbb{C}$ e $X \subseteq A$ é um conjunto finito, e $c \in \mathbb{C}$, então

$$\sum_{x \in X} cf(x) = c \sum_{x \in X} f(x).$$

70*. Considere o seguinte algoritmo, conhecido pelo nome de "busca binária".

```
Busca(x, v, a, b)
---------------------------------
  Se a > b
      Devolva a − 1

  m ← ⌊(a+b)/2⌋
  Se x = v[m]
      Devolva m
  Se x < v[m]
      Devolva Busca(x, v, a, m − 1)
  Devolva Busca(x, v, m + 1, b)
```

Prove que o número de comparações entre elementos de v na execução de $\mathsf{Busca}(x, v, a, a+n-1)$ é no máximo $2(\lfloor \lg n \rfloor + 1)$ para todo $n \geq 1$.

71*. Sejam $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $s, m \in \mathbb{R}$ tais que

$$f(x) = s + mx, \text{ para todo } x \in \mathbb{R},$$

Prove que

$$f^n(x) = \begin{cases} x + sn, & \text{se } m = 1, \\ m^n x + s\frac{m^n - 1}{m-1}, & \text{se } m \neq 1, \end{cases}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$ e todo $n \in \mathbb{N}$.

72*. Seja $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ satisfazendo

$$f(n) = f(n-1) + 1, \text{ para todo } n \geq 1.$$

Prove, por indução em n, que

$$f(n) = f(0) + n, \text{ para todo } n \geq 0.$$

73*. Seja $a \in \mathbb{C}$ e seja $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ satisfazendo

$$f(n) = f(n-1) + a, \text{ para todo } n \geq 1.$$

Prove[7], por indução em n, que

$$f(n) = f(0) + na, \text{ para todo } n \geq 0.$$

[7] Observe que este exercício generaliza o Exercício 72.

74*. Sejam $f, s\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ satisfazendo

$$f(n) = f(n-1) + s(n), \text{ para todo } n \geq 1.$$

Prove[8], por indução em n que

$$f(n) = f(0) + \sum_{i=1}^{n} s(i), \text{ para todo } n \geq 0.$$

75*. Sejam $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ e $a \in \mathbb{C}$ tais que

$$f(n) = af(n-1), \text{ para todo } n \geq 1.$$

Prove por indução em n que

$$f(n) = a^n f(0), \text{ para todo } n \geq 0.$$

76*. Sejam $f, m\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ tais que

$$f(n) = m(n)f(n-1), \text{ para todo } n \geq 1.$$

Prove[9], por indução em n, que

$$f(n) = f(0) \prod_{i=1}^{n} m(i), \text{ para todo } n \geq 0.$$

77*. Sejam $f, s, m\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ tais que

$$f(n) = m(n)f(n-1) + s(n), \text{ para todo } n \geq 1.$$

Prove (por indução em n) que[10]

$$f(n) = f(0) \prod_{i=1}^{n} m(i) + \sum_{j=1}^{n} \left(s(j) \prod_{i=j+1}^{n} m(i) \right), \text{ para todo } n \geq 0.$$

[8] Observe que este exercício generaliza o Exercício 73.

[9] Observe que este exercício generaliza o Exercício 75.

[10] Observe que este exercício generaliza o Exercício 76.

5.1 Descrições Recursivas

78[@]. Sejam $l, L\colon \mathbb{N} - \{0\} \to \mathbb{N}$ dadas por

$l(n)$: tamanho (número de dígitos) na representação binária de n,

e

$$L(n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 1, \\ L\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + 1, & \text{se } n > 1. \end{cases}$$

Prove que

$$l(n) = L(n), \text{ para todo } n > 0.$$

79[@]. Seja $l\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dada por

$$l(n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 1, \\ l\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + 1, & \text{se } n > 1. \end{cases}$$

Prove por indução em n que

$$l(n) = \lfloor \lg n \rfloor + 1, \text{ para todo } n > 0.$$

80[@]. Sejam

$b(n)$: o número de dígitos 1 na representação binária de n.

e $B\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ a função dada por

$$B(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n = 0, \\ B\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + (n \bmod 2), & \text{se } n > 0. \end{cases}$$

(a) Prove que $b(n) = B(n)$, para todo $n \geq 0$.

(b) Prove que

$$B(n) \leq \lfloor \lg n \rfloor + 1, \text{ para todo } n > 0.$$

81[⋆]. Seja $M(n)\colon \mathbb{N} - \{0\} \to \mathbb{N}$ dada por

$M(n) :=$ a posição do bit mais significativo na representação binária de n,

sendo que os bits são contados da direita para a esquerda a partir de 0. Por exemplo, $M(1) = 0$ e $M(10) = 3$.

(a) Proponha uma expressão recursiva para $M(n)$.

(b) Prove que a expressão proposta está correta.

82*. Considere o Algoritmo $\mathsf{Exp}(x, n)$ dado por

```
Exp(x,n)
---------------------------------
  Se n = 0
      Devolva 1
  e ← Exp(x, ⌊n/2⌋)
  e ← e × e
  Se n é par
      Devolva e
  Devolva x × e
```

(a) Execute $\mathsf{Exp}(2, n)$ para $n \in \{0, 1, 2, 5, 11, 15, 16, 20\}$ e, para cada execução, mostre o resultado do algoritmo e o número de multiplicações efetuadas.

(b) Prove por indução em n que $\mathsf{Exp}(x, n) = x^n$ para todo $x \neq 0$ e todo $n \in \mathbb{N}$.

(c) Prove que a execução de $\mathsf{Exp}(x, n)$ efetua $\lfloor \lg(n) \rfloor + b(n) + 1$ multiplicações para todo $x \neq 0$ e todo $n \in \mathbb{N}$ e $n > 0$, onde b é a função definida no Exercício 80.

(d) Prove que a execução de $\mathsf{Exp}(x, n)$ efetua no máximo $2(\lfloor \lg n \rfloor + 1)$ multiplicações para todo $x > 0$ e todo $n > 0$.

83@. Considere o Algoritmo Mínimo(v, a, b) dado por

```
Minimo(v,a,b)
---------------------------------
  Se a = b
      Devolva a
  m ← ⌊(a+b)/2⌋
  m1 ← Mínimo(v, a, m)
  m2 ← Mínimo(v, m + 1, b)
  Se v[m1] ≤ v[m2]
      Devolva m1
  Devolva m2
```

Prove por indução em n que, dado $a \in \mathbb{Z}$, a execução de $\mathsf{Mínimo}(v, a, a + n - 1)$ faz $n - 1$ comparações entre elementos de v, para todo $n \geq 1$.

84*. Prove, por indução em n, que o seguinte algoritmo devolve $\prod_{i=1}^{n} i$, para todo $n \in \mathbb{N}$

```
Fatorial(n)
---
Se n = 0
    Devolva 1
Devolva n × Fatorial(n − 1)
```

85*. Prove que se $f(0) \leq 0$ e

$$f(n) \leq f\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + 2, \text{ para todo } n > 0,$$

então

$$f(n) \leq 2\lfloor \lg n \rfloor + 2, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

86*. Considere o seguinte algoritmo

```
Multiplica(x,n)
---
Se n = 0
    Devolva 0
Se n é par
    Devolva Multiplica(x + x, n/2)
Devolva Multiplica(x + x, (n−1)/2) + x
```

(a) Prove, por indução em n, que Multiplica(x, n) devolve o valor de nx para todo $x \in \mathbb{C}$ e todo $n \in \mathbb{N}$.

(b) Enuncie e prove um teorema estabelecendo um limite superior (em função de n) para o número de somas efetuadas por Multiplica(x, n)[11].

87$^@$. O seguinte algoritmo devolve o n-ésimo termo da sequência de Fibonacci.

```
F(n)
---
Se n ≤ 1
    Devolva n
Devolva F(n − 1) + F(n − 2)
```

Prove que o número de somas na execução de $F(n)$ é pelo menos $F(n)$, para todo $n \geq 2$.

[11]**Sugestão:** Use o resultado do Ex. 85.

88*. (a) Combine as informações dos Exercícios 59, 80 e 82 para propor um algoritmo para o cálculo de $F(n)$.

(b) Dê uma expressão para o número $s(n)$ de somas efetuadas pelo seu algoritmo para calcular $F(n)$.

(c) Compare o resultado obtido com o número de somas efetuadas pelo algoritmo do Exercício 87.

89*. Considere o seguinte algoritmo de ordenação, conhecido como "ordenação por inserção".

```
Ordena(v, a, b)
---------------
Se a ≥ b
    Devolva v
Ordena(v, a, b − 1)
Insere(v, a, b)
Devolva v
```

onde Busca(x, v, a, b) é o algoritmo do Exercício 63, e

```
Insere(v, a, b)
---------------
p ← Busca(v[b], v, a, b − 1)
i ← b
Enquanto i ≥ p + 1
    Troca(v, i, i − 1)
    i ← i − 1
Devolva v
```

e Troca(v, a, b) troca os valores de $v[a]$ e $v[b]$ entre si.

Use o resultado dos Exercícios 49 e 70 para estabelecer um limitante superior para o número de comparações na execução de Ordena$(v, a, a+n-1)$ em função do valor de n.

90*. Proponha uma expressão recursiva para a função $B\colon \mathbb{N} - \{0\} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dada por

$$B(n, k) := k\text{-ésimo bit na representação binária de } n.$$

Prove que a expressão proposta está correta.

91*. Prove por indução em n que, se $0 \leq k \leq n$, então o seguinte algoritmo devolve $\frac{n!}{k!(n-k)!}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

```
B(n, k)
  Se k = 0
     Devolva 1
  Devolva (n/k) B(n − 1, k − 1)
```

92*. Uma certa aplicação financeira rende j por cento do capital aplicado por mês. O rendimento é creditado no próprio saldo da aplicação.

Proponha uma expressão recursiva para a função $C(n) \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ de tal forma que $C(n)$ represente o saldo da aplicação após ao final de n meses, a partir de uma aplicação inicial de valor s.

93*. Sejam $f^-, f, f^+ \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ funções não-decrescentes satisfazendo, para todo $n \geq 2$,

$$\begin{aligned} f^-(n) &= f^-(n-2) + f^-(n-2), \\ f(n) &= f(n-1) + f(n-2), \\ f^+(n) &= f^+(n-1) + f^+(n-1), \end{aligned}$$

e ainda

$$\begin{aligned} f^-(0) \leq f(0) \leq f^+(0), \text{ e} \\ f^-(1) \leq f(1) \leq f^+(1). \end{aligned}$$

Prove por indução em n que

$$f^-(n) \leq f(n) \leq f^+(n), \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

6 Recorrências

6.1 Funções Iteradas

94[@]. Para cada uma das funções $f(x)$ abaixo, dê uma expressão para $f^n(x)$. Em cada caso, prove por indução em n que sua resposta está correta.

(a) $f(x) = x + 1$.

(b) $f(x) = x + 2$.

(c) $f(x) = x + 3$.

(d) $f(x) = x + s$.

(e) $f(x) = 2x$.

(f) $f(x) = 3x$.

(g) $f(x) = mx$.

(h) $f(x) = s + mx$.

95⋆. Para cada função $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ abaixo, dê uma expressão para a função h^n, onde $n \in \mathbb{N}$.

(a) $h(x) = x - 2$,

(b) $h(x) = x - s$, com $s \in \mathbb{R}$,

(c) $h(x) = 3x$

(d) $h(x) = mx$, com $m \in \mathbb{R}$,

(e) $h(x) = x/2$,

(f) $h(x) = \lceil x/k \rceil$, com $k \in \mathbb{Z}^+$,

(g) $h(x) = \lfloor \sqrt[k]{x} \rfloor$, com $k \in \mathbb{N}$,

96⁻. Considere a seguinte função.

$$C(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{se } n \text{ é par} \\ 3n + 1 & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

A Conjectura de Collatz é a seguinte proposição.

Para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $C^k(n) = 1$.

Desde que foi formulada em 1937, esta conjectura permanece em aberto.

Prove que se for verdade que para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $C^k(n) < n$, então a Conjectura de Collatz é verdadeira.

6.2 Recorrências Iteradas

97[@]. Resolva a seguinte recorrência.

$$f(n) = f(n-2) + 1, \text{ para todo } n \geq 2.$$

98[@]. Resolva a seguinte recorrência.

$$f(n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 1, \\ f\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + 1, & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

99[@]. Resolva a seguinte recorrência.

$$f(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n = 0, \\ f\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + (n \bmod 2) & \text{se } n \geq 1. \end{cases}$$

100[*]. Seja $f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ satisfazendo

$$f(n) = f(n-2) + 1, \text{ para todo } n > 1.$$

Prove, por indução em n, que

(a) $f(n) = f(n \bmod 2) + \left\lfloor \dfrac{n}{2} \right\rfloor$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

(b) $f(n) = (-1)^n a + b + cn$, para todo $n \in \mathbb{N}$, onde

$$\begin{aligned} a &= \frac{f(0) - f(1)}{2} + \frac{1}{4}, \\ b &= \frac{f(0) + f(1)}{2} - \frac{1}{4}, \\ c &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

(c) $f(n) = f(4 + n \bmod 2) + \left\lceil \dfrac{k-5}{2} \right\rceil$, para $n \geq 5$.

101*. Resolva as seguintes recorrências.

(a) $f(n) = 2f\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + 6n - 1, \text{ para todo } n > 1,$

(b) $f(n) = 6f\left(\left\lfloor \frac{n}{6} \right\rfloor\right) + 2n + 3, \text{ para todo } n > 1,$

(c) $f(n) = 4f\left(\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor\right) + 2n - 1, \text{ para todo } n > 1,$

(d) $f(n) = 3f\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + n^2 - 2n + 1, \text{ para todo } n > 1,$

(e) $f(n) = 4f\left(\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor\right) + n^2 - 7n + 5, \text{ para todo } n > 1,$

(f) $f(n) = 4f\left(\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor\right) + \left\lfloor \sqrt{n} \right\rfloor + 1, \text{ para todo } n > 3,$

(g) $f(n) = 2f\left(\left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor\right) + n - 1, \text{ para todo } n > 1,$

(h) $f(n) = 2f\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right) + 1, \text{ para todo } n > 1,$

(i) $f(n) = f\left(\left\lceil \frac{2n}{3} \right\rceil\right) + k, \text{ para todo } n > 1 \text{ e } \text{ para todo } k \in \mathbb{N},$

102*. Resolva as seguintes recorrências.

(a) $f(n) = f(n-1) + n, \text{ para todo } n > 0.$

(b) $f(n) = 2f(n-1) + n^2, \text{ para todo } n \geq 1$

(c) $f(n) = f(n-1) + 2n - 3, \text{ para todo } n > 1,$

(d) $f(n) = 2f(n-1) + 3n + 1, \text{ para todo } n > 1,$

(e) $f(n) = 2f(n-1) + n^2, \text{ para todo } n > 1,$

(f) $f(n) = f(n-2) + 3n + 4, \text{ para todo } n > 1,$

(g) $f(n) = f(n-3) + 5n - 9, \text{ para todo } n > 3,$

(h) $f(n) = 2f(n-1) + n^2 - 2n + 1, \text{ para todo } n > 1,$

103*. Seja $f(n)$ o número de sequências binárias de comprimento n.

(a) Descreva $f(n)$ como uma recorrência.

(b) Resolva esta recorrência.

104*. Uma função $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ é uma *progressão aritmética* se existe $r \in \mathbb{C}$ tal que

$$f(n+1) - f(n) = r \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

(a) Expresse a função f como acima por meio de uma recorrência.

(b) Resolva esta recorrência, obtendo assim uma expressão para o termo geral da progressão aritmética.

105*. Seja $m(n,k)$ o número de multiplicações/divisões efetuadas na execução de $B(n,k)$, o algoritmo do Exercício 91.

(a) Formule uma recorrência para $m(n,k)$ $(0 \leq k \leq n)$.

(b) Resolva esta recorrência.

106*. Resolva a recorrência do Exercício 90.

107*. O Algoritmo de Strassen é um algoritmo recursivo para multiplicação de matrizes quadradas que, para matrizes suficientemente grandes, faz menos operações aritméticas do que o algoritmo usual.

A função $M(n)$, abaixo, estabelece um limitante superior para o número $S(n)$ de operações aritméticas na execução do Algoritmo de Strassen com duas matrizes quadradas de ordem n como entrada, isto é, $S(n) \leq M(n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

$$M(n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 1, \\ 7M\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right) + 18\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil^2, & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

Resolva esta recorrência.

108*. O Algoritmo de Karatsuba é um algoritmo recursivo para multiplicação de inteiros que, para números suficientemente grandes, faz menos operações aritméticas do que o algoritmo usual.

A função $A(n)$, abaixo, descreve o número de operações aritméticas na execução do Algoritmo de Karatsuba com dois inteiros de n dígitos em sua representação binária.

Resolva esta recorrência.

$$A(n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 1, \\ 5, & \text{se } n = 2, \\ 3A\left(\left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil\right) + 20\left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil, & \text{se } n > 2. \end{cases}$$

$109^{\#-}$. Sejam $n_0 \in \mathbb{N}$, $h \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ e $f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ tais que

$$\begin{aligned} h(n) &< n, \\ f(n) &= f(h(n)) + 1, \end{aligned}$$

para todo $n \geq n_0$,

Prove (por indução) que

$$f(n) = f(h^u(n)) + u, \text{ para todo } n \geq n_0,$$

onde

$$u = \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid h^k(n) < n_0\right\}.$$

$110^{\#-}$. Sejam $n_0 \in \mathbb{N}$, $h \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ e $f, s \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ tais que

$$\begin{aligned} h(n) &< n, \\ f(n) &= f(h(n)) + s(n), \end{aligned}$$

para todo $n \geq n_0$.

Prove (por indução) que

$$f(n) = f(h^u(n)) + \sum_{i=0}^{u-1} s(h^i(n)), \text{ para todo } n \geq n_0.$$

onde

$$u = \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid h^k(n) < n_0\right\}.$$

$111^{\#-}$. Sejam $n_0 \in \mathbb{N}$, $h \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ e $f, m \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ tais que

$$\begin{aligned} h(n) &< n, \\ f(n) &= m(n) f(h(n)), \end{aligned}$$

para todo $n \geq n_0$.

Prove (por indução em n) que, para todo $n \geq n_0$

$$f(n) = f(h^u(n)) \prod_{i=0}^{u-1} m(h^i(n)),$$

onde

$$u = \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid h^k(n) < n_0\right\}.$$

$112^{\#-}$. Sejam $n_0 \in \mathbb{N}$, $h\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ e $f, m, s\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ tais que

$$\begin{aligned} h(n) &< n, \\ f(n) &= m(n)f(h(n)) + s(n), \end{aligned}$$

para todo $n \geq n_0$.

Prove (por indução) que

$$f(n) = f(h^u(n)) \prod_{i=0}^{u-1} m(h^i(n)) + \sum_{i=0}^{u-1} s(h^i(n)) \prod_{j=0}^{i-1} m(h^j(n)), \text{ para todo } n \geq n_0,$$

onde

$$u = \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid h^k(n) < n_0\right\}.$$

$113^{@}$. Dado $q \in \mathbb{C}$, uma *progressão geométrica* de razão q é uma função $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ satisfazendo

$$\frac{f(n+1)}{f(n)} = q, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

(a) Expresse a função f acima por meio de uma recorrência.

(b) Resolva esta recorrência.

$114^{@}$. Resolva as seguintes recorrências

(a)

$$f(n) = \begin{cases} n-1, & \text{se } 2 \leq n \leq 3, \\ 2f(n-1), & \text{se } n \geq 4. \end{cases}$$

(b)

$$f(n) = \begin{cases} n-1, & \text{se } 2 \leq n \leq 3, \\ 2f(n-2), & \text{se } n \geq 4. \end{cases}$$

115*. O seguinte algoritmo resolve o conhecido quebra-cabeça das Torres de Hanói. A execução de Hanoi(n, a, b, c) move n discos da torre a para a torre b usando a torre c como torre auxiliar, de acordo com as regras do jogo.

```
Hanoi(n, a, b, c)
---------------------------------------------
  Se n = 0
      Termine
  Hanoi(n − 1, a, c, b)
  mova o disco no topo da torre a para o topo da torre b
  Hanoi(n − 1, c, b, a)
```

Seja $M(n)$ o número de movimentos (passagem de um disco de uma torre para outra) na execução de Hanoi(n, a, b, c).

(a) Descreva $M(n)$ por meio de uma recorrência.

(b) Resolva esta recorrência.

116*. Resolva as seguintes recorrências.

(a) $f(n) = nf(n-1) + n, \text{ para todo } n > 1,$

(b) $f(n) = f\left(\left\lfloor\sqrt{n}\right\rfloor\right) + n^2, \text{ para todo } n > 1,$

(c) $f(n) = 2f\left(\left\lfloor\sqrt[3]{n}\right\rfloor\right) + n, \text{ para todo } n > 1.$

117$^@$. O número de comparações no pior caso de uma execução do algoritmo MergeSort para um vetor de n elementos é dado pela recorrência

$$T(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n < 2, \\ T\left(\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\right) + T\left(\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil\right) + n - 1, & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

Do Exercício 61 temos que $T^-(n) \leq T(n) \leq T^+(n)$, onde

$$T^-(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n < 2, \\ 2T^-\left(\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\right) + n - 1, & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

e

$$T^+(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n < 2, \\ 2T^+\left(\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil\right) + n - 1, & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

(a) Resolva as recorrências de $T^-(n)$ e $T^+(n)$.

(b) Use as soluções obtidas e o Exercício 50 para concluir que $T(n) \approx n \lg n$.

118$^{@}$. O "Master Method" ou "Master Theorem"[12] é um método para obtenção de soluções assintóticas para recorrências que surgem naturalmente na análise de "algoritmos de divisão e conquista".

Tais recorrências tem a forma geral

$$T(n) = aT(n/b) + f(n),$$

onde $a \geq 1$ e $b \geq 1$, a expressão n/b pode significar tanto $\lfloor n/b \rfloor$ como $\lceil n/b \rceil$ e $f()$ é uma função genérica. A recorrência do Exercício 117 é um exemplo de caso particular desta recorrência.

Sejam a, b e $f()$ como acima e sejam $n_0 \in \mathbb{N}$ e $T^+, T^- \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ tais que

$$\begin{aligned} T^-(n) &= aT^-\left(\lfloor n/b \rfloor\right) + f(n), \\ T^+(n) &= aT^+\left(\lceil n/b \rceil\right) + f(n), \end{aligned}$$

para todo $n \geq n_0$.

Resolva estas recorrências.

119*. Considere o algoritmo Exp do exercício 82.

(a) Expresse o número de multiplicações efetuadas na execução de $\mathsf{Exp}(x, n))$ por meio de uma recorrência.

(b) Resolva essa recorrência.

6.3 Recorrências Lineares Homogêneas

120*. Resolva as seguintes recorrências.

(a)
$$f(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n \leq 1, \\ 5f(n-1) - 6f(n-2), & \text{se } n > 1. \end{cases}$$

ex:rlh+4+3

[12] Popularizado com este nome por Cormen, Leiserson, Rivest, and Stein (2009).

(b)

$$f(n) = \begin{cases} 0, & \textsf{se } n = 0 \\ 2^n, & \textsf{se } n = 1 \textsf{ ou } n = 2 \\ 6f(n-1) - 11f(n-2) + 6f(n-3), & \textsf{se } n \geq 3. \end{cases}$$

ex:rlh+2-1

(c)

$$f(n) = \begin{cases} n, & \textsf{se } n < 1, \\ 1, & \textsf{se } 1 \leq n \leq 2, \\ 8f(n-1) - 19f(n-2) + 12f(n-3), & \textsf{se } n \geq 3. \end{cases}$$

ex:rlh+72-72+1

121$^-$. Seja $\mathbb{C}^\mathbb{N}$ o conjunto das funções $\mathbb{N} \to \mathbb{C}$. Dados $f, g \in \mathbb{C}^\mathbb{N}$ e $z \in \mathbb{C}$, definimos $f + g \in \mathbb{C}^\mathbb{N}$ e $zf \in \mathbb{C}^\mathbb{N}$ como as funções dadas por

$$\begin{aligned} (f+g)(n) &= f(n) + g(n), \\ (zf)(n) &= zf(n). \end{aligned}$$

(a) Prove que $(\mathbb{C}^\mathbb{N}, +)$ é um grupo comutativo.

(b) Prove que $(\mathbb{C}^\mathbb{N}, +)$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$.

122$^-$. Sejam $r_1, r_2 \in \mathbb{C} - \{0\}$. Prove que as funções $f_1, f_2 \colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ dadas por

$$\begin{aligned} f_1(n) &= r_1^n, \\ f_2(n) &= r_2^n, \end{aligned}$$

são linearmente independentes em $(\mathbb{C}^\mathbb{N}, +)$ se e somente se $r_1 \neq r_2$.

123$^-$. Sejam[13] $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{C}$.

(a) Prove que se $g, h \colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ satisfazem a recorrência

$$f(n) = a_1 f(n-1) + a_2 f(n-2) + \ldots + a_k f(n-k), \ \textsf{para todo } n \geq k,$$

então a função $g + h$ também satisfaz a mesma recorrência para todo $n \geq k$.

[13] Este exercício usa a notação do Exercício 121

(b) Prove que se $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ satisfaz a recorrência

$$f(n) = a_1 f(n-1) + a_2 f(n-2) + \ldots + a_k f(n-k), \text{ para todo } n \geq k,$$

então para todo $z \in \mathbb{C}$, a função zf também satisfaz a mesma recorrência para todo $n \geq k$.

(c) Prove que o conjunto das funções $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ que satisfazem a recorrência

$$f(n) = a_1 f(n-1) + a_2 f(n-2) + \ldots + a_k f(n-k), \text{ para todo } n \geq k,$$

é um subespaço vetorial de $(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}, +)$.

124[@]. Resolva a seguinte recorrência.

$$f(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n < 2, \\ 2f(n-1) - f(n-2), & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

125[@]. Resolva as seguintes recorrências.

(a)

$$f(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n \leq 2 \\ 5f(n-1) - 7f(n-2) + 3f(n-3), & \text{se } n \geq 3. \end{cases}$$

(b)

$$f(n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 0 \\ 9, & \text{se } n = 1 \text{ ou } n = 2 \\ 9f(n-1) - 27f(n-2) + 27f(n-3), & \text{se } n \geq 3. \end{cases}$$

(c)

$$f(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n \leq 1 \\ 3, & \text{se } n = 2 \\ 7f(n-1) - 16f(n-2) + 12f(n-3), & \text{se } n \geq 3. \end{cases}$$

126*. Resolva as seguintes recorrências.

(a)

$$f(n) = \begin{cases} 3, & \text{se } n \leq 1, \\ 7, & \text{se } n = 2, \\ 3f(n-1) - f(n-2) + 3f(n-3), & \text{se } n \geq 3. \end{cases}$$

(b)

$$2f(n) = 3f(n-1) - 3f(n-2) + f(n-3), \text{ para todo } n \geq 3,$$

com

$$f(n) = n, \text{ para todo } n < 3.$$

(c)

$$f(n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 0 \\ 4, & \text{se } n = 1 \text{ ou } n = 2, \\ 6f(n-1) - 12f(n-2) + 8f(n-3), & \text{se } n \geq 3. \end{cases}$$

(d)

$$f(n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 0 \\ \sqrt{5} + 2^n, & \text{se } n = 1 \text{ ou } n = 2 \\ 3f(n-1) - f(n-2) - 2f(n-3), & \text{se } n \geq 3. \end{cases}$$

(e)

$$f(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n = 0 \\ 3^n, & \text{se } n = 1 \text{ ou } n = 2 \\ 10f(n-1) - 31f(n-2) + 30f(n-3), & \text{se } n \geq 3. \end{cases}$$

(f)

$$f(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n \leq 2 \\ 8f(n-1) - 21f(n-2) + 18f(n-3), & \text{se } n \geq 3. \end{cases}$$

(g)

$$f(n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 0, \\ 2, & \text{se } n = 1, \\ 2f(n-1) + 4f(n-2), & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

(h)

$$f(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n \leq 1, \\ f(n-1) - f(n-2), & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

(i)

$$f(n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n \leq 1 \\ 4f(n-1) - 4f(n-2), & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

(j)

$$f(n) = \begin{cases} 4n, & \text{se } n < 2, \\ 4f(n-2), & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

(k)

$$f(n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 0 \\ 6, & \text{se } n = 1 \\ 6f(n-1) - 9f(n-2), & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

(l)

$$f(n) = \begin{cases} 2n, & \text{se } n < 2, \\ f(n-2), & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

127*. Resolva as seguintes recorrências.

(a) [14]

$$f(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n \leq 1, \\ nf(n-1) + n(n-1)f(n-2), & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

(b) [15]

$$f(n) = \begin{cases} n+1, & \text{se } n \leq 1, \\ \sqrt{f(n-1)f(n-2)}, & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

[14]**Sugestão:** Considere a função

$$g(n) = \frac{f(n)}{n!}.$$

[15]**Sugestão:** Considere a função

$$g(n) = \lg f(n).$$

(c) [16]

$$f(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n = 0, \\ \sqrt{1 + f(n-1)^2}, & \text{se } n \geq 1. \end{cases}$$

(d) [17]

$$f(n) = \begin{cases} n + 1, & \text{se } n \leq 1, \\ f(n-1)f(n-2), & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

128*. Resolva a recorrência

$$f(n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n \leq 4, \\ 7f(n-1) - 19f(n-2) + 25f(n-3) - 16f(n-4) + 4f(n-5), & \text{se } n > 4. \end{cases}$$

6.4 Recorrências Lineares não Homogêneas

129@. Resolva as seguintes recorrências.

(a)

$$f(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n = 0, \\ f(n-1) + 1, & \text{se } n > 0. \end{cases}$$

(b)

$$f(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n = 0, \\ 2f(n-1) + 1, & \text{se } n > 0. \end{cases}$$

(c)

$$f(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n = 0, \\ f(n-1) + n, & \text{se } n > 0 \end{cases}$$

[16]**Sugestão:** Considere a função

$$g(n) = f(n)^2.$$

[17]**Sugestão:** Considere a função

$$g(n) = \lg f(n).$$

(d)

$$f(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n < 1, \\ 2f(n-1) + n, & \text{se } n \geq 1. \end{cases}$$

(e)

$$f(n) = 2f(n-1) + n^2, \text{ para todo } n \geq 1$$

(f)

$$f(n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n \leq 1, \\ 2f(n-2) + \frac{1}{2^n}, & \text{se } n > 1. \end{cases}$$

(g)

$$f(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n < 1 \\ 2f(n-1) + 2n - 1, & \text{se } n \geq 1 \end{cases}$$

(h)

$$f(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n < 1 \\ 2f(n-1) + n^2 + n, & \text{se } n \geq 1 \end{cases}$$

(i)

$$f(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n < 2, \\ f(n-1) + f(n-2) + 1, & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

(j)

$$f(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n < 2, \\ 7f(n-1) - 12f(n-2) + 2n, & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

(k)

$$f(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n < 2, \\ 5f(n-1) - 6f(n-2) + n.3^n, & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

(l)

$$f(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n < 2, \\ 5f(n-1) - 4f(n-2) + 2n.5^n + 2, & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

130*. O **"Triângulo de Cantor"**, (batizado em homenagem ao Georg Cantor), é uma "tabela infinita" triangular em que cada par $(i, j) \in \mathbb{N}^2$ ocupa uma posição de maneira que, para todo $n \in \mathbb{N}$, a n-ésima linha do triângulo é formada por todos os pares $(i, j) \in \mathbb{N}^2$ satisfazendo $i + j = n$.

As linhas, colunas e posições começam a contar a partir de 0, de cima para baixo e da esquerda para direita. Assim, por exemplo, $(0, 0)$ ocupa a posição 0 (linha 0, coluna 0); $(0, 1)$ ocupa a posição 1 (linha 1, coluna 0); $(1, 0)$ ocupa a posição 2 (linha 1, coluna 1); $(0, 2)$ ocupa a posição 3 (linha 2, coluna 0) e assim por diante. As 7 primeiras linhas do Triângulo de Cantor são

$$\begin{array}{lllllll}
(0,0) & & & & & & \\
(0,1) & (1,0) & & & & & \\
(0,2) & (1,1) & (2,0) & & & & \\
(0,3) & (1,2) & (2,1) & (3,0) & & & \\
(0,4) & (1,3) & (2,2) & (3,1) & (4,0) & & \\
(0,5) & (1,4) & (2,3) & (3,2) & (4,1) & (5,0) & \\
(0,6) & (1,5) & (2,4) & (3,3) & (4,2) & (5,1) & (6,0)
\end{array}$$

(a) Seja $l(n)$ o número de pares na n-ésima linha do Triângulo de Cantor

   i. Descreva $l(n)$ como uma recorrência.

   ii. Resolva essa recorrência.

(b) Seja $t(n)$ o número de pares no Triângulo de Cantor até a n-ésima

   i. Descreva $t(n)$ como uma recorrência.

   ii. Resolva essa recorrência.

(c) Seja $p(i, j)$ a posição ocupada pelo par (i, j) no Triângulo de Cantor. Dê uma expressão não recorrente para $p(i, j)$.

131*. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $S(n)$ o número de somas efetuado na execução de $\mathsf{F}(n)$, o algoritmo do Exercício 87.

(a) Expresse $S(n)$ por uma recorrência.

(b) Resolva essa recorrência.

132*. Para todo $n \geq 0$, um n-cubo é um diagrama composto por pontos e linhas que ligam pares de pontos entre si (ou seja, um *grafo*). O 0-cubo tem um ponto e nenhuma linha. Para todo $n > 0$, o n-cubo é o diagrama obtido desenhando-se lado a lado duas cópias do $(n-1)$-cubo e ligando cada ponto de uma das cópias ao seu correspondente na outra cópia por uma linha.

(a) Descreva o número de pontos de um n-cubo através de uma recorrência.

(b) Resolva esta recorrência.

(c) Descreva o número de linhas de um n-cubo através de uma recorrência.

(d) Resolva esta recorrência.

6.5 Somatórios

133$^@$. Dado $q \in \mathbb{C} - \{0\}$, uma *progressão geométrica*[18] de razão q é uma função $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ satisfazendo

$$\frac{f(n+1)}{f(n)} = q, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Assim, a soma dos n termos iniciais de uma progressão geométrica é dada por

$$s(n) = \sum_{i=0}^{n-1} f(i).$$

(a) Expresse a função f acima por meio de uma recorrência linear homogênea.

(b) Resolva esta recorrência, obtendo assim uma expressão para o termo geral da progressão geométrica.

(c) Dê uma expressão livre de somatórios para $s(n)$.

134$^@$. Uma função $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ é uma *progressão aritmética*[19] se existe $r \in \mathbb{C}$ tal que

$$f(i+1) - f(i) = r \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Assim, a soma dos n termos iniciais de uma progressão aritmética é dada por

$$s(n) = \sum_{i=0}^{n-1} f(i).$$

[18] cfr. Exercício 113

[19] cfr. Exercício 104

(a) Expresse a função f acima por meio de uma recorrência linear não homogênea.

(b) Resolva esta recorrência, obtendo assim uma expressão para o termo geral da progressão aritmética.

(c) Dê uma expressão livre de somatórios para $s(n)$.

135$^@$. Dê uma expressão livre de somatórios para $\sum_{i=0}^{n} i$.

136$^@$. Dê uma expressão[20] livre de somatórios para $\sum_{i=0}^{n} i2^i$.

137*. Calcule o valor dos seguintes somatórios.

(a)

$$\sum_{i=0}^{n} i^2.$$

ex:somatorios:i3

(b)

$$\sum_{i=0}^{n} i(i-1).$$

ex:somatorios:2i

(c)

$$\sum_{i=0}^{n} i^2 3^i.$$

ex:somatorios:i256i

(d)

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{i^2}{5^i}.$$

ex:somatorios:i2i-1

(e)

$$\sum_{i=0}^{n} i^2(i-1).$$

ex:somatorios:i(2i-i)

[20] cfr. Exercício 53

138*. A *média*[21] do número de comparações efetuadas na execução do algoritmo de busca binária em um vetor de n posições é dada por[22]

$$\begin{aligned}\mu(n) = 1 \times \frac{1}{n} + 2 \times \frac{2}{n} + 3 \times \frac{4}{n} + 4 \times \frac{8}{n} + \dots \\ + \lfloor \lg n \rfloor \times \frac{2^{\lfloor \lg n \rfloor - 1}}{n} \\ + (\lfloor \lg n \rfloor + 1) \times \frac{(n - \sum_{i=1}^{\lfloor \lg n \rfloor} 2^{i-1})}{n}\end{aligned}$$

(a) Dê uma expressão livre de somatórios[23] para $\mu(n)$.

(b) Conclua do item anterior que $\mu(n) \approx \lfloor \lg n \rfloor$.

139*. Dê uma expressão livre de somatórios para

$$s(n) = \sum_{i=0}^{n} F(i),$$

onde $F(n)$ é a sequência de Fibonacci[24].

140@. Em muitas situações de cálculo numérico trabalha-se com matrizes triangulares inferiores, isto é, matrizes quadradas cujos elementos acima da diagonal principal são todos nulos. Nesses casos é comum representar uma matriz triangular inferior de n linhas por um vetor contendo somente as posições não-nulas da matriz, o que resulta numa economia de espaço de quase 50%.

Suponha que a matriz triangular inferior M, de n linhas indexadas de 1 a n, será representada por um vetor $v[0..N(n) - 1]$, onde $N(n)$ é o tamanho do vetor necessário para representar uma matriz triangular inferior de n linhas.

(a) Descreva $N(n)$ através de uma recorrência.

(b) Resolva esta recorrência.

(c) Qual o índice de v que corresponde à posição $M[i, j]$?

[21] Também chamada *número esperado* ou *esperança*.

[22] Assume-se aqui que a busca por qualquer dos n elementos do vetor é equiprovável e bem-sucedida.

[23] **Sugestão:** use os resultados dos Exercícios 52 e 53

[24] Veja o Exercício 58.

141[@]. Resolva a seguinte recorrência que expressa o número médio de comparações na execução do algoritmo QuickSort.

$$C(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n < 2, \\ \frac{(n+1)}{n}C(n-1) + \frac{2(n-1)}{n}, & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

142[@]. Uma *árvore binária* T é uma *árvore vazia*, denotada por λ ou é um par $(E(T), D(T))$ onde $E(T)$ e $D(T)$ são árvores binárias, chamadas respectivamente de *subárvore esquerda* e *subárvore direita* de T. Vamos denotar por $\mathcal{B}$ o conjunto das árvores binárias.

O *tamanho* de uma árvore T é dado por

$$|T| = \begin{cases} 0, & \text{se } T = \lambda, \\ |E(T)| + |D(T)| + 1, & \text{caso contrário .} \end{cases}$$

A árvore de tamanho um é chamada de *árvore trivial*.

A *altura* de uma árvore T é dada por

$$h(T) = \begin{cases} 0, & \text{se } T = \lambda, \\ \max\{h(E(T)), h(D(T))\} + 1, & \text{se } T \neq \lambda. \end{cases}$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $h^+(n)$ a maior altura possível de uma árvore binária de tamanho n.

(a) Expresse $h^+(n)$ como uma recorrência.

(b) Resolva esta recorrência.

143[@]. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $t^+(n)$ o maior tamanho possível de uma árvore binária[25] de altura n.

(a) Expresse $t^+(n)$ como uma recorrência.

(b) Resolva esta recorrência.

144[@]. Seja AVL o conjunto das árvores binárias[26] T satisfazendo

$$\lambda \in \mathsf{AVL} \text{ e } E(T) \in \mathsf{AVL} \text{ e } D(T) \in \mathsf{AVL}.$$

[25] Veja o Exercício 142.

[26] Veja o Exercício 142.

e

$$|h(E(T)) - h(D(T))| \leq 1.$$

Seja $t^{-}(n)$ o menor tamanho possível de uma árvore AVL de altura n.

(a) Expresse $t^{-}(n)$ como uma recorrência.

(b) Resolva esta recorrência.

7 Fundamentos de Contagem

145. Em se tratando de contagem, é interessante ter uma noção intuitiva de grandezas e das relações entre elas. No contexto das ciências exatas em geral, é usual expressar grandezas como potências de 10. No contexto da Ciência da Computação, entretanto, é mais natural expressar grandezas como potências de 2. Nas questões abaixo, n representa uma quantidade e o exercício consiste em determinar os valores de k e d para os quais

$$10^d \leq n < 10^{d+1},$$
$$2^k \leq n < 2^{k+1}.$$

(a) Tempo, em segundos[27]:

i. $n =$ uma hora.
ii. $n =$ um dia.
iii. $n =$ uma semana.
iv. $n =$ um mês.
v. $n =$ um ano.
vi. $n =$ sua idade.
vii. $n =$ tempo decorrido desde as 00h00:00 de 1 de janeiro de 1970[28].
viii. $n =$ um século.
ix. $n =$ um milênio.
x. $n =$ um milhão de anos.
xi. $n =$ idade estimada da Terra[29].
xii. $n =$ idade estimada da Via Láctea[30].
xiii. $n =$ idade estimada do universo observável[31].

(b) Distância, em metros[32]:

i. $n =$ maior distância possível entre dois pontos na superfície da Terra[33].

[27] veja http://en.wikipedia.org/wiki/Second
[28] veja http://en.wikipedia.org/wiki/Date_(Unix)
[29] veja http://en.wikipedia.org/wiki/Earth_Age
[30] veja http://en.wikipedia.org/wiki/Milky_Way
[31] veja http://en.wikipedia.org/wiki/Age_of_the_Universe
[32] veja http://en.wikipedia.org/wiki/Metre
[33] veja http://en.wikipedia.org/wiki/Earth

ii. $n =$ distância da Terra ao Sol[34].

iii. $n =$ um ano-luz.

iv. $n =$ diâmetro estimado da Via Láctea[35].

(c) Velocidade, em metros por segundo:

i. $n =$ de um homem.

ii. $n =$ de um animal.

iii. $n =$ de um veículo terrestre.

iv. $n =$ de um veículo aquático.

v. $n =$ de um veículo aéreo.

vi. $n =$ da Terra em relação ao Sol[36].

vii. $n =$ da luz[37].

(d) Massa, em gramas:

i. $n =$ de um homem.

ii. $n =$ de um carro.

iii. $n =$ de um elefante adulto[38].

iv. $n =$ de um Boeing-737.

v. $n =$ água na Terra[39].

vi. $n =$ da Terra[40].

vii. $n =$ do Sol[41].

viii. $n =$ da Via Láctea[42].

ix. $n =$ da Lua[43].

x. $n =$ do universo observável[44].

(e) Volume, em litros:

i. $n =$ de um homem.

ii. $n =$ de um carro.

---

[34] veja http://en.wikipedia.org/wiki/Earth
[35] veja http://en.wikipedia.org/wiki/Milky_Way
[36] veja http://en.wikipedia.org/wiki/Earth
[37] veja http://en.wikipedia.org/wiki/Earth
[38] veja http://en.wikipedia.org/wiki/Elephant
[39] veja http://en.wikipedia.org/wiki/Hydrosphere
[40] veja http://en.wikipedia.org/wiki/Earth
[41] veja http://en.wikipedia.org/wiki/Sun
[42] veja http://en.wikipedia.org/wiki/Milky_Way
[43] veja http://en.wikipedia.org/wiki/Moon
[44] veja http://en.wikipedia.org/wiki/Mass_of_the_observable_universe

iii. $n =$ da água oceânica na Terra[45].
iv. $n =$ da Terra[46].
v. $n =$ da Lua[47].
vi. $n =$ do Sol[48].
vii. $n =$ do universo observável[49].

(f) Outras quantidades:

i. $n =$ população de Curitiba.
ii. $n =$ população do Paraná.
iii. $n =$ população do Brasil.
iv. $n =$ população da Terra.
v. $n =$ número de estrelas no universo observável[50].
vi. $n =$ número estimado de átomos no universo observável[51].
vii. $n =$ produto interno bruto brasileiro em reais.
viii. $n =$ dívida interna brasileira em reais.
ix. $n =$ número de células nervosas no corpo humano.

146^-. Prove que a composição de funções bijetoras é uma bijeção.

$147^\star$. Qual o número de

(a) múltiplos positivos de 3 menores ou iguais a 100?
(b) múltiplos positivos de 4 menores ou iguais a 500?
(c) múltiplos positivos de n menores ou iguais a k?

[45] veja http://en.wikipedia.org/wiki/Ocean
[46] veja http://en.wikipedia.org/wiki/Earth
[47] veja http://en.wikipedia.org/wiki/Moon
[48] veja http://en.wikipedia.org/wiki/Sun
[49] veja http://en.wikipedia.org/wiki/Observable_universe
[50] veja http://en.wikipedia.org/wiki/Observable_universe
[51] veja http://en.wikipedia.org/wiki/Observable_universe

8 União e Produto Cartesiano

$148^{@}$. Quantos divisores naturais tem o número 72?

$149^{\star}$. Quantos divisores naturais tem o número 360?

$150^{\star}$. (a) Dê uma expressão para o número de divisores ímpares de um número dado n.

(b) Dê uma expressão para o número de divisores pares de um número dado n.

(c) Generalize a resposta dos itens anteriores dando uma expressão para o número de divisores pares de um número dado n que são e que não são múltiplos de um primo p, também dado.

$151^{\star}$. Qual o número de inteiros positivos menores ou iguais a 1000 que são ímpares ou quadrados de inteiros?

Generalize a resposta dando uma expressão para o número de inteiros positivos menores ou iguais a n que são ímpares ou quadrados de inteiros. Explique o raciocínio que leva à resposta.

$152^{\star}$. Uma técnica de cálculo de números em ponto flutuante que permite um maior controle da propagação de erros de precisão é a chamada *aritmética intervalar*. Em vez de fazer os cálculos com números, usa-se intervalos fechados para os cálculos.

Por exemplo, em vez de computar $\pi + e$ e obter um valor aproximado do resultado, computa-se a soma $[3.141 \times 10^0, 3.142 \times 10^0] + [2.718 \times 10^0, 2.719 \times 10^0]$ de intervalos que contém os somandos e obtem-se como resultado o intervalo $[5.859 \times 10^0, 5.861 \times 10^0]$ que seguramente contém $\pi + e$. Com isso sabe-se que qualquer número neste intervalo difere de no máximo $5.861 \times 10^0 - 5.859 \times 10^0 = 2 \times 10^{-2}$ de $\pi + e$, ou seja, o erro de aproximação é controlado.

Se a quantidade de números distintos representáveis em ponto flutuante é n, quantos intervalos diferentes é possível representar?

153$^{\#}$. Sabendo que se A e B são conjuntos finitos, então

$$|A \times B| = |A||B|,$$

prove por indução em n que se $A_1, \dots, A_n$ são conjuntos finitos então,

$$\left| \prod_{i=1}^{n} A_i \right| = \prod_{i=1}^{n} |A_i|$$

154$^{\#}$. Prove que o número de divisores naturais de um inteiro $n \in \mathbb{N}$ é

$$\prod_{i=1}^{k} (m_i + 1),$$

onde

$$\prod_{i=1}^{k} p_i^{m_i},$$

é a decomposição de n em fatores primos.

9 Sequências

155$^@$. Um "bit" é um elemento de $\{0, 1\}$.

Se um "byte" é uma sequência de 8 "bits", quantos valores diferentes pode assumir um "byte"?

156$^@$. Um teclado convencional tem 47 "teclas que geram caracteres". Cada tecla pode gerar dois caracteres, conforme combinada ou não com a tecla "shift". Chamaremos de *caracteres convencionais* os caracteres que podem ser gerados desta maneira.

Uma *senha convencional* é uma sequência de caracteres convencionais.

Considere um sistema de quebra de senhas à base de "força bruta", isto é, que tenta todas as senhas possíveis, e suponha que o sistema é capaz de testar 1 (uma) senha por segundo.

(a) Qual o menor tamanho n que deve ter uma senha convencional para garantir que tal sistema não seja capaz de testar todas as senhas possíveis em um dia?

(b) Se o sistema atacante for um milhão de vezes mais rápido, para quanto mudará este valor?

157$^@$. Qual o maior valor de n tal que é possível gravar em um dvd (4 700 372 992 bytes) todos os possíveis arquivos de tamanho até n?

158*. Quantos resultados possíveis existem para uma sequência de

(a) n lançamentos consecutivos de uma moeda?

(b) até n lançamentos consecutivos de uma moeda?

159*. Quantos resultados possíveis existem para uma sequência de

(a) n lançamentos consecutivos de um dado?

(b) até n lançamentos consecutivos de um dado?

160*. O Dicionário Houaiss da Língua Portuguesa registra 228 500 verbetes utilizando o alfabeto de 26 letras. O mais longo deles tem 46 letras.

Supondo que todas as palavras de até 46 letras sejam equiprováveis, qual a probabilidade de uma palavra de até 46 letras escolhida uniformemente ao acaso estar registrada no Houaiss?

161⋆. Um *palíndromo* sobre um conjunto A é uma sequência $(a_1, \dots, a_k)$ de elementos de A que "permanece a mesma quando lida na ordem reversa", isto é, que satisfaz

$$a_i = a_{k-i+1}, \text{ para todo } 1 \leq i \leq k.$$

(a) Enumere todos os palíndromos de tamanho 4 sobre $\{a, b, c\}$.

(b) Enumere todos os palíndromos de tamanho 5 sobre $\{a, b, c\}$.

(c) Qual o número de palíndromos de tamanho k sobre um conjunto de n elementos?

162⋆. Um protocolo de comunicação usa três tipos de pacotes de dados, T_1, T_2 e T_3, diferenciados por um campo inicial. Os pacotes do tipo T_1 tem 4 bits de dados após o campo inicial (identificação do tipo); os pacotes do tipo T_2 tem 8 bits de dados; e os pacotes do tipo T_3 tem 10 bits de dados. Qual o número de pacotes distintos que existem neste protocolo?

163⋆. O endereço de um dispositivo na InterNet (endereço IP) é um número de 4 *bytes*.

(a) Qual o número de endereços IP possíveis?

(b) Dos endereços possíveis, as seguintes faixas de endereços são reservadas para redes locais:

- 10.0.0.0 a 10.255.255.255
- 172.16.0.0 a 172.31.255.255
- 192.168.0.0 a 192.168.255.255
- 169.254.0.0 a 169.254.255.255

Qual o número de endereços IP não-reservados na rede?

164⋆. Interfaces de rede recebem uma identificação do fabricante conhecida como *endereço MAC* que é um número de 48 bits[52]. Se a inclusão

[52] Atualmente é um número de 64 bits, o que já é usado por tecnologias como *FireWire*, *IPv6*, *802.15.4*).

digital for um sucesso absoluto, quantas intefaces de rede poderiam ser dadas a cada habitante do planeta?

165*. Em um jantar foram servidos 2 tipos de entrada (pães com patês e salada), 3 tipos de massa (espaguete, talharim e nhoque), 4 tipos de molho (bolonhesa, pesto, branco e funghi), e 2 tipos de sobremesa (sorvete e salada de frutas). Sabendo que nenhum convidado escolheu a mesma combinação, e que todos que escolheram a salada não escolheram nhoque, qual o número máximo de convidados?

166*. Uma *data* é uma sequência de 8 dígitos da forma $d_1d_2m_1m_2a_1a_2a_3a_4$, onde d_1d_2, m_1m_2 e $a_1a_2a_3a_4$ são dígitos representando o dia, mês e ano, respectivamente. Por exemplo, 25122012 e 14071889 são datas e 31022013 e 48151623 não são.

(a) Desconsiderando os anos bissextos, quantas das sequências de 8 dígitos são datas válidas?

(b) Qual a probabilidade de uma sequência de 8 dígitos escolhida uniformemente ao acaso ser uma data?

(c) Se um gerador aleatório gera uma sequência de 8 dígitos a cada segundo (independente e uniformemente), qual é a probabilidade de não ter gerado nenhuma data ao final de um minuto?

167*. A licença de um veículo no Brasil é uma cadeia composta por 3 letras seguida de 4 dígitos. Quantos veículos licenciados pode haver simultaneamente no Brasil? Compare com a resposta do exercício 145(f)iii.

168*. Os números de telefone no Brasil podem ser números de 8 dígitos, sendo que o primeiro não pode ser 0 ou de 9 dígitos, sendo o primeiro necessariamente um 9.

(a) Quantos números de telefone são possíveis no Brasil?

(b) Existem mais números de telefone ou licenças de veículo[53] possíveis?

169*. Um certo monitor de computador tem resolução de 640 por 480 *pixels* com resolução de cor de 32 bits (também conhecido como "truecolor",

[53]Veja o Exercício 167

isto é, cada *pixel* pode assumir 2^{32} cores diferentes). Sua frequência de varredura (isto é, a frequência com que a imagem exibida pode ser modificada) é de 60 Hz. Quanto tempo, no mínimo, levaria o monitor[54] para exibir todas as imagens possíveis?

170*. O Secure Hash Algorithm 1 (SHA-1) é uma função de hashing que associa sequências de bytes de qualquer tamanho a sequências 160 bits.

Por exemplo, a imagem da sequência de bytes correspondente à cadeia "The quick brown fox jumps over the lazy dog" é a sequência de bits `2fd4e1c67a2d28fced849ee1bb76e7391b93eb12` em notação hexadecimal.

Um dos usos do SHA-1 é o de servir como uma espécie de "assinatura" de arquivos. Desde sua adoção em 1993 até 2017 não se conhecia nenhum exemplo de dois arquivos com o mesmo valor de SHA-1.

(a) Quanto espaço no mínimo seria necessário para armazenar um conjunto de arquivos que garantisse que ao menos dois deles tivessem o mesmo valor de SHA-1?

(b) Supondo que estes arquivos estivessem disponíveis e que o tempo necessário para computar o valor de SHA-1 de um arquivo de n bytes seja $c_1 n$ e que o tempo necessário para comparar dois valores de SHA-1 seja c_2 (c_1 e c_2 são constantes medidas em "ciclos de processador"), qual o tempo necessário para garantidamente identificar dois arquivos deste conjunto com o mesmo valor de SHA-1?

(c) Se a frequência do processador é de f Hz, quanto tempo seria necessário para garantidamente identificar dois arquivos deste conjunto com o mesmo valor de SHA-1?

(d) Quanto tempo representa esse valor para $c_2 = 1$ (o menor valor possível) e $f = 8.79433$ GHz (o maior valor já realizado)?

[54]Estes parâmetros são mais ou menos os mesmos em se tratando de um televisor convencional.

10 Funções

171[@]. Quantos circuitos combinacionais funcionalmente distintos com e entradas e s saídas são possíveis?

172[@]. De quantas maneiras distintas podem acontecer os aniversários de um grupo de n pessoas?

173⋆. As letras do código MORSE são formadas por uma sequência de traços (_) e pontos (.), sendo permitidas repetições. Observe alguns exemplos utilizando quantidades distintas de símbolos:

- 3 símbolos: (_ , . , _)
- 4 símbolos: (. , . , _ , .)
- 5 símbolos: (_ , _ , . , _ , .)

Nessas condições, determine quantas letras poderiam ser representadas utilizando-se, no máximo, 8 símbolos?

174⋆. (VUNESP-04) Um certo tipo de código usa apenas dois símbolos, o número zero (0) e o número (1) e, considerando esses símbolos como letras, podem-se formar palavras. Por exemplo: 0, 01, 00, 001 e 110 são algumas palavras de uma, duas e três letras desse código. O número máximo de palavras com cinco letras ou menos, que podem ser formadas com esse código é:

175[@]. Muitos problemas de importantes otimização podem ser formulados como segue.

São dados um conjunto finito A e uma função $v\colon 2^A \to \mathbb{Q}$ que associa a cada subconjunto S de A um *valor* numérico $v(S)$. O objetivo é determinar um subconjunto A de valor mínimo, isto é, um conjunto $S \subseteq A$ tal que

$$v(S) \leq v(S'), \text{ para todo } S' \subseteq A.$$

Um algoritmo de busca exaustiva (também chamado de algoritmo de força bruta) para um problema assim é um algoritmo que computa

$v(S)$ para cada subconjunto $S \subseteq A$ e devolve um subconjunto de valor mínimo.

Nesse contexto, considere um algoritmo de busca exaustiva que consegue computar um novo conjunto $S \subseteq A$ e o valor de $v(S)$ por segundo.

(a) Qual o maior tamanho de A para o qual o programa consegue resolver o problema em 1 dia?

(b) Se em vez de 1 conjunto por segundo o algoritmo fosse capaz de analizar 1 conjunto por ciclo de máquina, num processador de $4GHz$?

(c) E se, nas condi/ões do item anterior, estivéssemos dispostos a esperar um ano?

176$^{\#}$. Deduza que existem n^k funções $[k] \to [n]$ através dos seguintes passos.

(a) Defina $f(k, n) :=$ número de funções $[k] \to [n]$.

(b) Observe que cada função $f\colon [k] \to [n]$ corresponde a um par (x, g) onde $x \in [n]$ corresponde à imagem de k por f e $g\colon [k-1] \to [n]$ corresponde às imagens de $1, \ldots k-1$ por f.

(c) Use esta observação para descrever $f(k, n)$ por meio de uma recorrência.

(d) Resolva esta recorrência.

10.1 Funções Injetoras (Arranjos)

177*. (VITA-SP) Considere os números de dois a seis algarismos distintos formados utilizando-se apenas 1, 2, 4, 5, 7 e 8. Quantos desses números são ímpares e começam com um dígito par?

178*. (VUDESC) O número de anagramas de quatro letras, começando com a letra **G** que pode ser formado com a palavra PORTUGAL é:

179*. (VUFPR) Dentre todos os números de quatro algarismos distintos formados com algarismo pertencentes ao conjunto $\{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, quantos são divisíveis por 2?

180*. (UFCE) Qual é a quantidade de números inteiros formados por três algarismos distintos, escolhidos dentre 1, 3, 5, 7 e 9 e que são maiores que 200 e menores que 800.

181*. Considere o problema de distribuir k bolas distintas por n urnas distintas e seja $0 \leq p \leq 1$. Dê uma estimativa[55] para o valor de k em função de n e p para que a chance de haver ao menos uma urna com mais de uma bola seja pelo menos p.

10.2 Funções Bijetoras (Permutações)

182$^@$. Colocando todos os números obtidos pelas permutações dos dígitos de $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ em ordem crescente, qual o lugar ocupado pelo número 43 521?

183*. Um clube resolve fazer uma Semana de Cinema. Para isso, os organizadores escolhem sete filmes, que serão exibidos um por dia. Porém, ao elaborar a programação, eles decidem que três desses filmes, que são de ficção científica, devem ser exibidos em dias consecutivos. Qual o número de maneiras diferentes que se pode fazer a programação.

184*. Sobre uma mesa estão dispostos livros distintos, sendo 4 de algoritmos, 2 de arquitetura e 5 de cálculo. De quantas maneiras os livros podem ser empilhados sobre a mesa de tal forma que aqueles que tratam do mesmo assunto estejam juntos?

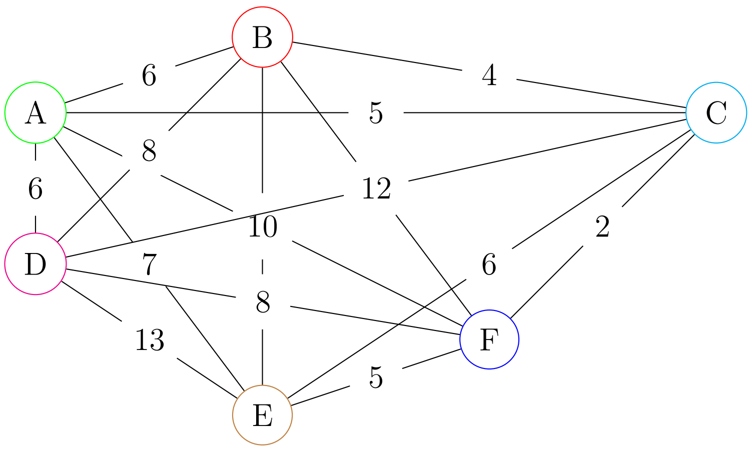
185*. A seguinte afirmação é verdadeira? Justifique.

> Supondo que toda permutação das cartas tem a mesma probabilidade de acontecer a cada vez que alguém embaralha um baralho, a probabilidade de obter uma permutação das cartas que nunca aconteceu ao embaralhar um baralho comum é maior que 50%.

[55] Se necessário, use a desigualdade $(1 - x) \leq e^{-x}$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

186@. Dois meninos e três meninas formarão uma roda dando-se as mãos. De quantos modos diferentes poderão formar a roda de modo que os dois meninos não fiquem juntos?

187⋆. (ENEM) João mora na cidade **A** e precisa visitar cinco clientes, localizados em cidades diferentes da sua, conforme ilustra a figura abaixo. Cada trajeto possível pode ser representado por uma sequência de 7 letras. Por exemplo, o trajeto **ABCDEFA**, informa que ele sairá da cidade **A**, visitante as cidades **B**, **C**, **D**, **E** e **F** nesta ordem, voltando para a cidade **A**. Além disso, o número indicado entre as letras informa o custo do deslocamente entre as cidades.



Como João quer economizar, ele precisa determinar qual o trajeto de menor custo para visitar os cinco clientes. Examinando a figura, percebe que precisa considerar somente parte das sequências, pois os trajetos **ABCDEFA** e **AFEDCBA** tem o mesmo custo. Ele gasta 1mim20s para examinar uma sequência e descartar sua simétrica, conforme apresentado. O tempo mínimo necessário para João verificar todas as sequências possíveis no problema é de

188⋆. Uma família é composta por seis pessoas: o pai, a mãe e quatro filhos. Num restaurante, essa família vai ocupar uma mesa redonda. Em quantas disposições diferentres essas pessoas podem se sentar em torno da mesa de modo que o pai e a mãe fiquem juntos?

189*. (VUFU-MG (1996)) Quer-se colocar as bandeiras de oito países em uma praça de forma octagonal, de modo que as bandeiras fiquem nos vértices do octógono e que as bandeiras de Brasil e Portugal ocupem vértices consecutivos. Pode-se fazer isso de quantas maneiras?

11 Subconjuntos

190$^{@}$. A mega–sena é uma loteria onde são sorteados 6 dentre os números de 1 a 60, sendo todos os resultados possíveis equiprováveis.

Para cada $k \geq 6$, uma *k-aposta* é uma escolha de k dentre os números de 1 a 60. Ganha-se a loteria com uma k–aposta se 6 dentre os k números que compõem esta k–aposta são os sorteados. Uma *aposta simples* é uma 6-aposta.

(a) Quantos são os resultados possíveis de um sorteio da mega-sena?

(b) Qual a chance de ganhar a mega-sena com uma aposta simples?

(c) Quantas vezes maior a chance de ganhar a mega-sena com uma 7–aposta, comparada com a chance de ganhar com uma aposta simples?

(d) Em geral, quantas vezes maior a chance de ganhar a mega-sena com uma k–aposta, comparada com a chance de ganhar com uma aposta simples?

191*. O sorteio 2052 da mega-sena (23 de junho de 2018) ficou famoso porque pela primeira vez na história da loteria, todos os seis números sorteados (50, 51, 56, 57, 58 e 59) pertenciam à mesma dezena.

Considerando todos os sorteios equiprováveis, qual a probabilidade de um sorteio da mega-sena (seis números entre 1 e 60) pertencerem à mesma dezena?

192*. Numa formatura de 55 alunos de Ciência da Computação, cada aluno cumprimentou cada um de seus colegas exatamente uma vez, parabenizando-o por ter se formado. Quantos cumprimentos foram trocados?

193*. Quantas são as sequências binárias de n dígitos com

(a) exatamente k dígitos 1s?

(b) pelo menos k dígitos 1s?

(c) no máximo k dígitos 1s?

194*. Numa sala há 5 lugares e 7 pessoas. De quantas modos diferentes essas pessoas podem ocupar a sala, sendo que até 5 podem ficar sentadas e o resto em pé se

(a) as cadeiras são idênticas?

(b) as cadeiras são distintas?

195*. De quantas maneiras[56] podem ser escolhidos 3 números naturais distintos de 1 a 30 de modo que sua soma seja par?

196*. Ao final de um campeonato de futebol[57], somaram-se as pontuações das equipes, obtendo-se um total de 35 pontos. Cada equipe jogou com todos os adversários apenas uma vez. Determine quantos empates houve no campeonato, sabendo que cada vitória valia 3 pontos, cada empate valia 1 ponto e que derrotas não pontuavam.

197*. Considere um baralho de 52 cartas divididas igualmente entre os 4 naipes (ouros, espadas, copas e paus).

(a) Qual é a probabilidade de, numa mão de 10 cartas, exatamente 2 delas serem de espadas?

(b) Dentre todas as $\binom{52}{8}$ mãos possíveis de 8 cartas, quantas delas têm exatamente 2 cartas de cada naipe?

198*. Uma urna contém a bolas azuis e v bolas vermelhas todas distintas entre si. De quantas maneiras é possível retirar desta urna uma amostra de n bolas com exatamente k bolas azuis?

199*. Dado $n \in \mathbb{N}$, um *grafo de n vértices* é um conjunto $G \subseteq \binom{[n]}{2}$. Cada elemento de $[n]$ é chamado de *vértice* de G e cada $\{u, v\} \in G$ é chamado de *aresta* de G. Em cada item, explique o raciocínio que leva à resposta.

(a) Quantos diferentes grafos de n vértices existem?

(b) Quantos diferentes grafos de n vértices com m arestas existem?

[56] Questão de vestibular da UNICAMP; contribuição de Gabriel Gugik

[57] Questão de vestibular da IME (2004); contribuição de Gabriel Gugik

(c) Uma *descrição* de um grafo G é uma sequência de $2|G|+1$ inteiros. O primeiro inteiro é o número de vértices de G. Cada um dos $|G|$ pares de inteiros seguintes representa uma aresta de G. Por exemplo as sequências $(3,1,2,2,3)$, $(3,2,1,2,3)$ e $(3,2,3,1,2)$ são três descrições diferentes do grafo $G = \{\{1,2\},\{2,3\}\}$ de 3 vértices. Quantas descrições diferentes tem um mesmo grafo G de n vértices e m arestas?

200$^{\#}$. Seja A um conjunto finito e seja $k \in \mathbb{N}$. Prove que

$$\binom{A}{k} \sim \binom{A}{|A|-k}.$$

201$^{\#}$. Prove[58] que

$$\binom{[n]}{k} \sim \binom{[n]}{n-k},$$

para todo $n, k \in \mathbb{N}$.

202$^{\#}$. Prove que

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n,$$

usando resultados de contagem.

203*. Quantas composições admite um inteiro n?

204*. De quantas maneiras é possível distribuir k bolas idênticas por n urnas distintas, de maneira que cada urna tenha pelo menos m bolas?

205*. De quantas maneiras é possível distribuir k bolas idênticas por n urnas distintas, de maneira que cada urna u tenha pelo menos $m(u)$ bolas?

206*. Quantas composições fracas com até n parcelas admite um inteiro n?

[58] **Sugestão:** use o Exercício 200

207*. No jogo Defense of the Ancients (DotA) o *herói* tem três diferentes tipos de *orbs*. Cada combinação de três *orbs*, quaisquer que sejam seus tipos, resulta numa *arma*.

(a) De quantas diferentes *armas* dispõe o *herói*?

(b) Responda à mesma pergunta para a versão generalizada onde existem k diferentes tipos de *orbs* e cada combinação de n *orbs* resulta numa *arma*.

208#. Em função dos valores de k e n, quantas soluções inteiras não negativas (ou seja, $x_i \geq 0$, para todo $i \in [k]$) distintas admitem as seguintes equações.

(a) $\sum_{i=1}^{k} x_i = n$.

(b) $\sum_{i=1}^{k} x_i \leq n$.

12 Inclusão/Exclusão

$209^{@}$. Quantos são os inteiros positivos menores ou iguais a 1000 que são divisíveis por 3 ou por 5 ou por 7?

Generalize o raciocínio dando uma expressão para o número de inteiros positivos menores ou iguais a n que são divisíveis por pelo menos um dentre $d_1, d_2, \ldots, d_k$.

$210^{\star}$. Quantos são os inteiros positivos menores ou iguais a 2001 que são múltiplos de 3 ou 4 mas não são de 5?

$211^{\star}$. Quantos são os inteiros positivos menores ou iguais a 10 000 que são múltiplos de 4 ou 6 ou 10?

$212^{\#}$. Usando o princípio da Inclusão/Exclusão e o fato de que os números compostos (i.e., $a = b.c$, com $a, b, c \in \mathbb{N} - 1$ não é composto nem primo) menores ou iguais a n são divisíveis por algum número primo menor ou igual a k tal que $k = \lfloor \sqrt{n} \rfloor$, determine:

(a) O número de primos que são menores ou iguais a 111

(b) O número de primos menores ou iguais a n

$213^{\#}$. Em um jogo, um dado de 6 faces numeradas é jogado 5 vezes e o jogador ganha se o resultado da última jogada for igual ao de pelo menos uma das jogadas anteriores. Qual é a probabilidade de ganhar neste jogo?

$214^{\#}$. Uma classe tem $2n$ estudantes agrupados em n duplas.

(a) Mostre que existem $(2n)!/(2^n n!)$ maneiras de agrupar os $2n$ estudantes em n duplas.

(b) Considere um agrupamento inicial dos $2n$ estudantes em n duplas. De quantas maneiras pode-se reagrupar os estudantes de forma que cada dupla esteja quebrada (ou seja, de forma que cada dupla seja diferente)?

215#. A *função tociente de Euler* (ou *função ϕ de Euler*) é a função que, dado $n \in \mathbb{N}$ conta o número de inteiros positivos menores que n e sem divisores em comum com n, isto é

$$\phi(n) := |\{k \in [n] \mid \mathsf{mdc}(k,n) = 1\}|\,.$$

Por exemplo, $\phi(12) = 4$ pois há quatros inteiros positivos, 1, 5, 7 e 11 que são menores ou iguais a 12 e sem divisores em comum com 12. Convenciona-se que $\phi(1) = 1$.

Use o Princípio de Inclusão–Exclusão para verificar que

$$\phi(n) = n \prod_{i=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)$$

onde $p_1, \ldots, p_k$ são os primos distintos que dividem n.

[59]: Se p é primo, então nenhum inteiro menor que p tem divisor em comum com p e, portanto, $\phi(p) = p - 1$. Se p é primo e $e \geq 1$, então $\phi(p^e)$ é o número de termos da sequência $(1, 2, 3, \ldots, p, p+1, \ldots, 2p, \ldots, p^e)$ que não são divisíveis por p. Os números divisíveis por p nesta sequência são $p, 2p, 3p, \ldots, p^e$. Assim

$$\phi(p^e) = p^e - p^{e-1} = p^e \left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

[59]**Sugestão:** Extraído de (Andreescu and Feng, 2004, p. 124, exemplo 6.6)

Referências

Titu Andreescu and Zuming Feng. *A Path to Combinatorics for Undergraduates: Counting Strategies*. Springer, 2004. 66

Thomas H. Cormen, Charles E. Leiserson, Ronald L. Rivest, and Clifford Stein. *Introduction to Algorithms*. MIT Press, 3 edition, 2009. ISBN 978-0-262-03384-8. URL `http://mitpress.mit.edu/catalog/item/default.asp?ttype=2&tid=11866`. 34