Matemática Discreta

Exercícios

5 de maio de 2025

Sumário

Os exercícios estão classificados de acordo com a seguinte legenda.

-: exercícios de interesse marginal: complementam o assunto de alguma forma mas podem ser ignorados sem comprometer o entendimento.

@: exercícios programados para discussão em aula: procure fazê-los antes de serem discutidos em aula.

$\star$: exercícios prioritários: na impossibilidade de fazer todos, dê prioridade a estes.

#: exercícios mais difíceis e/ou trabalhosos: não comece por estes.

1 Elementos de Lógica

$1^{@}$. Das proposições abaixo, indique as verdadeiras e as falsas.

(a) "$2 \leq 3$".
(b) "$10 > 20$".
(c) "$x^2 \leq x$".

$2^{@}$. Das proposições abaixo, indique as verdadeiras e as falsas.

(a) $(1 < 2)$ e $(2 < 3) \implies (1 < 3)$,
(b) $(1 < 2) \implies (10 < 30)$,
(c) $1 > 2 \implies 2 < 3$,
(d) $1 > 2 \implies 2 > 3$.

$3^{@}$. Sejam P e Q os seguintes predicados.

$$\begin{aligned} P(x) &\ :\ x \leq x^2, \\ Q(x,y) &\ :\ x \leq y^2. \end{aligned}$$

Das proposições abaixo, indique as verdadeiras e as falsas.

(a) $P(2)$.
(b) $P(1/2)$.
(c) $Q(1,1)$.
(d) $R(t) = Q(1,t)$.

$4^{@}$. Seja $P(x)$ o predicado "$x \leq x^2$".

Das proposições abaixo, indique as verdadeiras e as falsas.

(a) $P(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$.
(b) $P(x)$, para algum $x \in \mathbb{R}$.
(c) $P(x)$, para todo $x \geq 1$.
(d) $P(x)$, para algum $0 < x < 1$.

$5^{\star}$. Prove que se A, B e C são proposições, então

(a) $F \implies A$, ou seja, a partir de uma proposição falsa pode-se concluir qualquer coisa.

(b) $A \implies B \equiv (\text{ não } A) \text{ ou } B$.

(c) $(A \implies B) \equiv ((\text{ não } B) \implies (\text{ não } A))$, também conhecida como *contrapositiva* da implicação. Uma "prova de $A \implies B$ por contrapositiva" é uma prova de que $((\text{ não } B) \implies (\text{ não } A))$.

(d) $(A \implies F) \equiv \text{ não } A$, ou seja, uma implicação cujo consequente é falso só pode ser verdadeira se o antecedente é falso. Este é o princípio por baixo das "provas por contradição".

(e) $((A \implies B) \text{ ou } (A \implies C)) \equiv (A \implies (B \text{ ou } C))$ (distributividade da disjunção pela implicação).

(f) $((A \implies B) \text{ e } (A \implies C)) \equiv (A \implies (B \text{ e } C))$ (distributividade da conjunção pela implicação).

(g) $((B \implies A) \text{ ou } (C \implies A)) \equiv ((B \text{ e } C) \implies A)$ (outra distributividade).

(h) $((B \implies A) \text{ e } (C \implies A)) \equiv ((B \text{ ou } C) \implies A)$ (outra distributividade).

(i) $((A \implies B) \text{ e } (A \implies (\text{ não } B))) \implies (\text{ não } A)$ (outra maneira de expressar o princípio por baixo de uma prova por contradição).

6*. Considere os seguintes predicados.

$$\begin{aligned} I(x) &\equiv x \in \mathbb{Z}, \\ P(f,x) &\equiv I(x) \implies I(f(x)), \\ Q(f,x) &\equiv I(f(x)) \implies I(x). \end{aligned}$$

Dê um exemplo de função $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que

(a) não satisfaz o predicado $P(g,x),$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

(b) satisfaz o predicado $Q(g,x),$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

7*. Considere os seguintes predicados.

$$\begin{aligned} L(f) &\equiv \lim f(n) = 0, \\ P(n,f,g,h) &\equiv f(n) = g(n)(1 + h(n)), \\ B(f,g,h) &\equiv L(h) \text{ e } (P(n,f,g,h), \text{ para todo } n \in \mathbb{N}), \\ A(f,g) &\equiv B(f,g,h), \text{ para algum } h\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Dê um exemplo de funções $f, g \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ que

(a) satisfazem $A(f, g)$.

(b) não satisfazem $A(f, g)$.

8$^{\#}$. Seja $O(f)$ o seguinte predicado (onde $f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$).

$$(((n \geq k \implies |f(n)| \leq c), \text{ para algum } k > 0), \text{ para algum } c > 0), \text{ para todo } n \geq k.$$

Avalie as seguintes proposições justificando cada uma, isto é, apresentando uma prova de se são verdadeiras ou falsas.

(a) $O(n/(n-1))$,

(b) $O(n)$,

(c) $O(10 + 1/n)$,

(d) $O(\log n)$,

(e) $O(42)$.

9$^{\#}$. Considere os seguintes predicados.

$$\begin{aligned}
P_1(f, g, c, n) &\equiv |f(n)| \leq c|g(n)|, \\
P_2(f, g, c, k) &\equiv P_1(f, g, c, n), \text{ para todo } n \geq k, \\
P_3(f, g, c) &\equiv P_2(f, g, c, k), \text{ para algum } k \in \mathbb{N}, \\
O(f, g) &\equiv P_3(f, g, c), \text{ para algum } c \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Para cada par de funções $f, g \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, classifique as proposições abaixo como verdadeiras ou falsas.

(a) $O(f, g)$, para $f(n) = n$ e $g(n) = n^2$.

(b) $O(g, f)$, para $f(n) = n$ e $g(n) = n^2$.

(c) $O(f, g)$, para $f(n) = n/2$ e $g(n) = n$.

(d) $O(g, f)$, para $f(n) = n/2$ e $g(n) = n$.

10$^{\#}$. Sejam $D(x, y, d)$ e $M(x, y)$ os seguintes predicados, respectivamente.

$D(x, y, d)$**:** $|x - y| < d$,

$M(x, y)$**:** $x > y$.

Use os predicados $D(x, y, d)$ e $M(x, y)$ para expressar os seguintes predicados.

$L_1(f, a, l)$**:** $\lim_{x \to a} f(x) = l$.

$L_2(f, l)$**:** $\lim_{x \to \infty} f(x) = l$.

$L_3(f, a)$**:** $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$.

$L_4(f)$**:** $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$

2 Conjuntos e Inteiros

11[@]. Seja A um conjunto finito e seja $B \subseteq A$. Prove que

$$A = (A - B) \cup B,$$

12*. Sejam A, B e C conjuntos finitos. Prove que

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C),$$

13*. Dados $f, g \colon A \to \mathbb{C}$ e $X \subseteq A$ e $c \in \mathbb{C}$, é verdade que

(a)
$$\prod_{x \in X} c = c|X|?$$

(b)
$$\prod_{x \in X} (f(x) + g(x)) = \prod_{x \in X} f(x) + \prod_{x \in X} g(x)?$$

(c)
$$\sum_{x \in X} f(x)g(x) = \left(\sum_{x \in X} f(x)\right)\left(\sum_{x \in X} g(x)\right)?$$

Justifique.

14$^{\#}$. Seja A um conjunto e seja $k \in \mathbb{N}$. Vamos denotar por $\binom{A}{k}$ o conjunto dos subconjuntos de k elementos de A, isto é,

$$\binom{A}{k} = \{S \subseteq A \mid |S| = k\}.$$

Dado $a \in A$, sejam

$$\begin{aligned} A^- &= \binom{A - \{a\}}{k}, \\ A^+ &= \binom{A - \{a\}}{k-1}, \\ \overline{A} &= \big\{S \cup \{a\} \mid S \in A^+\big\}. \end{aligned}$$

Prove que

$$\binom{A}{k} = A^- \cup \overline{A},$$

3 Equivalência Assintótica

15*. Prove que se $f, g \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ são tais que $f(n) \sim g(n)$ e $g(n)$ não é assintoticamente nula, então

$$\lim \frac{f(n)}{g(n)} = 1.$$

16$^{@}$. Prove que

$$\binom{n}{2} \sim \frac{n^2}{2}$$

17*. Seja $P \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ dado por

$$P(n) = a_0 n^0 + a_1 n^1 + a_2 n^2 + \ldots + a_k n^k,$$

com $a_k \neq 0$, um polinômio de grau k.

Prove que

$$P(n) \sim a_k n^k.$$

18*.

$$\sum_{i=1}^{n} i \sim \frac{n^2}{2}$$

19*. É verdade que

$$\lg n \sim \log n?$$

Justifique.

20*. Prove que

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \sim \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

21*. Seja $c \in \mathbb{C} - \{0, 1\}$ e seja

$$s(n) = \sum_{i=0}^{n} c^i.$$

Prove que

(a) se $0 < c < 1$, então $s(n) \sim \frac{1}{1-c}$.

(b) se $c = 1$, então $s(n) = n + 1$.

(c) se $c > 1$, então $s(n) \sim \frac{c^{n+1}}{c-1}$,

22*. Sabendo que

$$\lim H(n) - \ln n = \gamma \in \mathbb{R},$$

prove que

$$H(n) \sim \ln n.$$

23*. Prove que

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \sim e^x.$$

24⋆. A partir da aproximação de Taylor

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i!} \sim e^x, \text{ para todo } x \in \mathbb{C},$$

conclua que

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \frac{1}{i!} \sim \frac{1}{e}.$$

25@. A partir da aproximação de Stirling,

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n,$$

prove que

$$\log_b n! \sim n \log_b n, \text{ para todo } b > 1.$$

26@. Use o resultado do Exercício 25 para provar que

$$\sum_{i=1}^{n} \log_b i \sim n \log_b n, \text{ para todo } b > 1$$

27⋆. Sejam $F, f, g, h \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ e $n_0 \in \mathbb{N}$ tais que $F(n) \sim f(n)$, $F(n) \sim h(n)$, e

$$f(n) \leq g(n) \leq h(n), \text{ para todo } n \geq n_0,$$

Prove que, neste caso,

$$F \sim f \sim g \sim h.$$

28⋆. Prove que, se $f, g, h \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, então

(a) $f(n) \sim f(n)$.

(b) Se $f(n) \sim g(n)$, então $g(n) \sim f(n)$.

(c) Se $f(n) \sim g(n)$ e $g(n) \sim h(n)$ então $f(n) \sim h(n)$.

29⋆. Sejam $f, g \colon \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. É possível que $f(n) \sim g(n)$ e $\lim f(n) - g(n) = \infty$? Justifique.

4 Piso e Teto

30⋆. Prove que $\lceil x \rceil$ é o único inteiro que satisfaz

$$x \leq \lceil x \rceil < x + 1,$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

31⋆. Prove que

$$\max \{k \in \mathbb{Z} \mid k < x\} = \lceil x - 1 \rceil,$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

32⋆. Prove que

$$\lceil x \rceil + z = \lceil x + z \rceil.$$

para todo $x \in \mathbb{R}$ e todo $z \in \mathbb{Z}$.

33⋆. Prove que, para todo $x \in \mathbb{R}$, temos que $\min \{k \in \mathbb{Z} \mid k > x\}$ é o único inteiro m satisfazendo $x < m \leq x + 1$ e conclua daí que

$$\min \{k \in \mathbb{Z} \mid k > x\} = \lfloor x \rfloor + 1.$$

34@. Prove que

$$\frac{n}{2} < 2^{\lfloor \lg n \rfloor} \leq n \leq 2^{\lceil \lg n \rceil} < 2n,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$

35⋆. Prove que, para todo $n > 0$,

(a)

$$\frac{1}{2} < \frac{n}{2^{\lceil \lg n \rceil}} \leq 1 \leq \frac{n}{2^{\lfloor \lg n \rfloor}} < 2.$$

(b)

$$\left\lfloor \frac{n}{2^{\lfloor \lg n \rfloor}} \right\rfloor = 1.$$

(c)

$$\left\lfloor \frac{n}{2^x} \right\rfloor = 0 \text{ se e somente se } x > \lg n.$$

(d)
$$\lfloor \lg n \rfloor > \lfloor \lg(n-1) \rfloor \text{ se e somente se } n \text{ é potência de 2.}$$

(e)
$$\lceil \lg n \rceil < \lceil \lg(n+1) \rceil \text{ se e somente se } n \text{ é potência de 2.}$$

(f)
$$\lceil \lg(n+1) \rceil = \lfloor \lg n \rfloor + 1.$$

36⋆. É verdade que $\lfloor f(n) \rfloor \sim f(n)$ para toda $f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$? Justifique.

37⋆. É verdade que $\sum_{i=1}^{n} \lfloor f(i) \rfloor \sim \sum_{i=1}^{n} f(i)$ para toda $f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$? Justifique.

38⋆. Prove que, para todo $n \in \mathbb{N}$,

- $\left\lfloor \dfrac{n+1}{2} \right\rfloor = \left\lceil \dfrac{n}{2} \right\rceil$
- $\left\lceil \dfrac{n-1}{2} \right\rceil = \left\lfloor \dfrac{n}{2} \right\rfloor$

39⋆. Algoritmos sobre vetores baseados na ideia conhecida como "divisão e conquista" frequentemente recebem como entrada um vetor indexado por $[a..b]$ e executam recursivamente sobre os vetores indexados por $[a..m]$ e $[m+1..b]$, onde $m := \left\lfloor \frac{a+b}{2} \right\rfloor$. O objetivo deste exercício é expressar corretamente os tamanhos dos subvetores em função do tamanho $n := b - a + 1$ do vetor original.

Prove que, para todo $a, b \in \mathbb{Z}$,

(a) $a + b$ é par se e somente se n é ímpar.

(b) $m - a + 1 = \left\lceil \dfrac{n}{2} \right\rceil$.

(c) $(m+1) - b + 1 = \left\lfloor \dfrac{n}{2} \right\rfloor$.

(d) $(m-1) - a + 1 = \left\lfloor \dfrac{n-1}{2} \right\rfloor$.

[1]

[1] **Sugestão:** Use o Exercício 38

40*. Prove que, para todo $x \in \mathbb{R}$,

(a) $x - \lfloor x \rfloor < 1$.

(b) $\lceil x \rceil - x < 1$.

(c) $\lfloor x \rfloor = \lceil x \rceil$ se e somente se $x \in \mathbb{Z}$

(d) $\lceil x \rceil - \lfloor x \rfloor \in \{0, 1\}$.

41*. A soma

$$\sum_{i=1}^{n} \lfloor \lg i \rfloor$$

aparece com certa frequência em aplicações ligadas à computação[2]. O objetivo deste exercício é provar que

$$\sum_{i=1}^{n} \lfloor \lg i \rfloor \sim n \lg n.$$

(a) Prove que

$$\lfloor \lg i \rfloor = k, \text{ para todo } i \in [2^k..2^{k+1} - 1].$$

(b) Prove que, para todo $\ell \in \mathbb{N}$, se $n = 2^\ell - 1$, então

$$\sum_{i=1}^{n} \lfloor \lg i \rfloor = \sum_{k=1}^{\ell} \sum_{i=2^k}^{2^{k+1}-1} \lfloor \lg i \rfloor .$$

(c) Combine os itens anteriores para concluir que, se $n = 2^\ell - 1$, então

$$\sum_{i=1}^{n} \lfloor \lg i \rfloor = \sum_{k=1}^{\ell} k2^k.$$

(d) Sabendo que

$$\sum_{k=0}^{n} k2^k = 2^{n+1}(n-1) + 2, \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

conclua que, se $n = 2^\ell - 1$, então

$$\sum_{i=1}^{n} \lfloor \lg i \rfloor = n \lfloor \lg n \rfloor - \left(2^{\lfloor \lg n \rfloor + 1} - \lfloor \lg n \rfloor - 2\right).$$

[2] Veja o Exercício 83 para um exemplo.

(e) Prove que[3]

$$\sum_{i=1}^{n} \lfloor \lg i \rfloor \sim n \lg n.$$

(f) As proposições acima podem ser generalizadas para logaritmos em outras bases além de 2? Como?

42^{-}. Seja $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função crescente e contínua satisfazendo

$$f(x) \in \mathbb{Z} \implies x \in \mathbb{Z}, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Prove que

$$\lceil f(\lceil x \rceil) \rceil = \lceil f(x) \rceil, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

43*. Seja k um inteiro positivo e seja $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função dada por

$$f(x) = \frac{x}{k}.$$

Prove que

(a) f uma função contínua.

(b) f uma função crescente.

(c) $f(x) \in \mathbb{Z} \implies x \in \mathbb{Z}, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$

44$^{@}$. Prove que

$$\lg n \sim \lfloor \lg n \rfloor \sim \lceil \lg n \rceil$$

45*. Dê um exemplo de uma função $f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ tal que $f(n)$ não é inteiro para uma quantidade infinita de valores de $n \in \mathbb{N}$ e $\sum_{i=1}^{n} \lfloor f(i) \rfloor \sim \sum_{i=1}^{n} f(i)$.

[3]**Sugestão:** use o resultado do Exercício 35

5 Indução

46*. Prove que

$$\sum_{i=0}^{n} c^i = \frac{c^{n+1}-1}{c-1},$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $c \in \mathbb{C} - \{0, 1\}$.

47*. Prove por indução que

$$\sum_{i=0}^{n} i2^i = 2^{n+1}(n-1) + 2,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

48*. Dados $n, k \in \mathbb{N}$, o *coeficiente binomial* $\binom{n}{k}$ é definido da seguinte maneira

$$\binom{n}{k} := \begin{cases} 1, & \text{se } k = 0, \\ \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}, & \text{se } 1 \leq k \leq n, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Prove, por indução em n que, se $0 \leq k \leq n$, então

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

49*. Prove que (cfr. Exercício 48)

$$\sum_{i=k}^{n} \binom{i}{k} = \binom{n+1}{k+1}, \text{ para todo } n, k \in \mathbb{N}.$$

50*. Prove por indução em n que, dados $x, y \in \mathbb{C}$,

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i y^{n-i} = (x+y)^n,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ e $n > 0$ [4].

[4]**Sugestão:** Use a definição de $\binom{n}{k}$ dada no Exercício 48

Conclua a partir daí que

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ e $n > 0$.

51[@]. Prove por indução em n que

$$2^n < n!, \text{ para todo } n \geq 4.$$

52[@]. Prove que todo inteiro $n \geq 2$ pode ser escrito como produto de número primos.

53[@]. A *sequência de Fibonacci* é a função $F\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dada por

$$F(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n \leq 1 \\ F(n-1) + F(n-2), & \text{se } n > 1. \end{cases}$$

(a) Prove por indução em n que

$$F(n) = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right), \text{ para todo } n \in \mathbb{N}$$

(b) Conclua que

$$F(n) \sim \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

54[⋆]. Prove que

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} F(n+1) & F(n) \\ F(n) & F(n-1) \end{pmatrix}, \text{ para todo } n > 0,$$

onde F é a sequência de Fibonacci (cfr Exercício 53)[5].

[5] Este é um dos algoritmos mais eficientes para o cálculo da sequência de Fibonacci.

55*. Prove por indução em n que

$$(\sqrt{2})^{n-1} \leq F(n) \leq 2^{n-1} \text{ para todo } n \geq 3,$$

onde $F(n)$ denota a sequência de Fibonacci (cfr Exercício 53).

56*. O número de comparações no pior caso de uma execução do algoritmo MergeSort para um vetor de n elementos é dado pela função

$$T(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n < 2, \\ T\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + T\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right) + n - 1, & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

Prove que $T^-(n) \leq T(n) \leq T^+(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, onde T^+ e T^- são as seguintes funções.

$$T^-(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n < 2, \\ 2T^-\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + n - 1, & \text{se } n \geq 2, \end{cases}$$

$$T^+(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n < 2, \\ 2T^+\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right) + n - 1, & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

57*. Dados $n_1, \ldots, n_k$, o *coeficiente multinomial* é definido por

$$\binom{n_1 + \ldots + n_k}{n_1, \ldots, n_k} := \frac{(n_1 + \ldots + n_k)!}{n_1! n_2! \ldots n_k!}.$$

Observe que o coeficiente multinomial é uma generalização do coeficiente binomial, pois

$$\binom{n}{n_1} = \binom{n}{n_1, n - n_1}.$$

Prove por indução em k que

$$\binom{n_1 + \ldots + n_k}{n_1, \ldots, n_k} = \binom{n_1 + \ldots + n_{k-1}}{n_1, \ldots, n_{k-1}} \binom{n_1 + \ldots + n_k}{n_k}, \text{ para todo } k \geq 2.$$

58*. Considere o seguinte algoritmo que recebe um vetor ordenado v indexado por $[a..b]$ e um valor x.

Busca(x, v, a, b)

Se $a > b$
    Devolva $a - 1$

$m \leftarrow \left\lfloor \frac{a+b}{2} \right\rfloor$
Se $x < v[m]$
    Devolva *Busca*$(x, v, a, m-1)$
Devolva *Busca*$(x, v, m+1, b)$

Prove que Busca$(x, v, a, a+n-1)$ é o único inteiro em $[a-1..a+n-1]$ satisfazendo

$$x < v[i] \text{ para todo } i \in [\text{Busca}(x, v, a, a+k-1) + 1..a+n-1]$$

59*. Use o fato de que se A e B são conjuntos finitos e disjuntos entre si então
$$|A \cup B| = |A| + |B|,$$
para provar, por indução em n que, se $A_1, \ldots, A_n$ são conjuntos finitos dois a dois disjuntos entre si, então,
$$\left| \bigcup_{i=1}^{n} A_i \right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i|$$

60@. Prove por indução em n que se $A_1, \ldots, A_n$ e B são conjuntos, então
$$\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i \right) \cap B = \bigcup_{i=1}^{n} (A_i \cap B),$$

61*. Prove, por indução em $|X|$ que, se X é um conjunto finito e $c \in \mathbb{C}$, então
$$\prod_{x \in X} c = c^{|X|}.$$

62*. Prove, por indução em $|X|$ que, se X é um conjunto finito e $c \in \mathbb{C}$, então
$$\sum_{x \in X} c = c|X|.$$

63*. Prove, por indução em $|X|$ que, que se $f, g\colon A \to \mathbb{C}$ e $X \subseteq A$ é um conjunto finito, então

$$\sum_{x \in X} (f(x) + g(x)) = \sum_{x \in X} f(x) + \sum_{x \in X} g(x).$$

64*. Prove, por indução em $|X|$ que, que se $f\colon A \to \mathbb{C}$ e $X \subseteq A$ é um conjunto finito, e $c \in \mathbb{C}$, então

$$\sum_{x \in X} cf(x) = c \sum_{x \in X} f(x).$$

65. Exercício intencionalmente deixado em branco

66*. Seja $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ satisfazendo

$$f(n) = f(n-1) + 1, \text{ para todo } n \geq 1.$$

Prove, por indução em n, que

$$f(n) = f(0) + n, \text{ para todo } n \geq 0.$$

67*. Seja $a \in \mathbb{C}$ e seja $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ satisfazendo

$$f(n) = f(n-1) + a, \text{ para todo } n \geq 1.$$

Prove[6], por indução em n, que

$$f(n) = f(0) + na, \text{ para todo } n \geq 0.$$

68*. Sejam $f, s\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ satisfazendo

$$f(n) = f(n-1) + s(n), \text{ para todo } n \geq 1.$$

Prove[7], por indução em n que

$$f(n) = f(0) + \sum_{i=1}^{n} s(i), \text{ para todo } n \geq 0.$$

[6]Observe que este exercício generaliza o Exercício 66.
[7]Observe que este exercício generaliza o Exercício 67.

69*. Sejam $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ e $a \in \mathbb{C}$ tais que

$$f(n) = af(n-1), \text{ para todo } n \geq 1.$$

Prove por indução em n que

$$f(n) = a^n f(0), \text{ para todo } n \geq 0.$$

70*. Sejam $f, m\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ tais que

$$f(n) = m(n)f(n-1), \text{ para todo } n \geq 1.$$

Prove[8], por indução em n, que

$$f(n) = f(0) \prod_{i=1}^{n} m(i), \text{ para todo } n \geq 0.$$

71*. Sejam $f, s, m\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ tais que

$$f(n) = m(n)f(n-1) + s(n), \text{ para todo } n \geq 1.$$

Prove (por indução em n) que[9]

$$f(n) = f(0) \prod_{i=1}^{n} m(i) + \sum_{j=1}^{n} \left(s(j) \prod_{i=j+1}^{n} m(i) \right), \text{ para todo } n \geq 0.$$

[8] Observe que este exercício generaliza o Exercício 69.

[9] Observe que este exercício generaliza o Exercício 70.

5.1 Algoritmos Recursivos

72[@]. Sejam $l, L\colon \mathbb{N} - \{0\} \to \mathbb{N}$ dadas por

$l(n)$: tamanho (número de dígitos) na representação binária de n,

e

$$L(n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 1, \\ L\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + 1, & \text{se } n > 1. \end{cases}$$

Prove que

$$l(n) = L(n), \text{ para todo } n > 0.$$

73[@]. Seja $l\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dada por

$$l(n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 1, \\ l\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + 1, & \text{se } n > 1. \end{cases}$$

Prove por indução em n que

$$l(n) = \lfloor \lg n \rfloor + 1, \text{ para todo } n > 0.$$

74[@]. Sejam

$b(n)$: o número de dígitos 1 na representação binária de n.

e $B\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ a função dada por

$$B(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n = 0, \\ B\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + (n \bmod 2), & \text{se } n > 0. \end{cases}$$

(a) Prove que $b(n) = B(n)$, para todo $n \geq 0$.

(b) Prove que

$$B(n) \leq \lfloor \lg n \rfloor + 1, \text{ para todo } n > 0.$$

75[⋆]. Seja $M(n)\colon \mathbb{N} - \{0\} \to \mathbb{N}$ dada por

$M(n) :=$ a posição do bit mais significativo na representação binária de n,

sendo que os bits são contados da direita para a esquerda a partir de 0. Por exemplo, $M(1) = 0$ e $M(10) = 3$.

(a) Proponha uma expressão recursiva para $M(n)$.

(b) Prove que a expressão proposta está correta.

76*. Considere o Algoritmo $\mathsf{Exp}(x, n)$ dado por

```
Exp(x,n)
  Se n = 0
     Devolva 1
  e ← Exp(x, ⌊n/2⌋)
  e ← e × e
  Se n é par
     Devolva e
  Devolva x × e
```

(a) Execute $\mathsf{Exp}(2, n)$ para $n \in \{0, 1, 2, 5, 11, 15, 16, 20\}$ e, para cada execução, mostre o resultado do algoritmo e o número de multiplicações efetuadas.

(b) Prove por indução em n que $\mathsf{Exp}(x, n) = x^n$ para todo $x \neq 0$ e todo $n \in \mathbb{N}$.

(c) Prove que a execução de $\mathsf{Exp}(x, n)$ efetua $\lfloor \lg(n) \rfloor + b(n) + 1$ multiplicações para todo $x \neq 0$ e todo $n \in \mathbb{N}$ e $n > 0$, onde b é a função definida no Exercício 74.

(d) Prove que a execução de $\mathsf{Exp}(x, n)$ efetua no máximo $2(\lfloor \lg n \rfloor + 1)$ multiplicações para todo $x > 0$ e todo $n > 0$.

77@. Considere o Algoritmo Mínimo(v, a, b) dado por

```
Minimo(v,a,b)
  Se a = b
     Devolva a
  m ← ⌊(a+b)/2⌋
  m1 ← Mínimo(v, a, m)
  m2 ← Mínimo(v, m + 1, b)
  Se v[m1] ≤ v[m2]
     Devolva m1
  Devolva m2
```

Prove por indução em n que, dado $a \in \mathbb{Z}$, a execução de $\mathsf{Mínimo}(v, a, a+n-1)$ faz $n-1$ comparações entre elementos de v, para todo $n \geq 1$.

78*. Prove, por indução em n, que o seguinte algoritmo devolve $\prod_{i=1}^{n} i$, para todo $n \in \mathbb{N}$

```
Fatorial(n)
-----------
  Se n = 0
      Devolva 1
  Devolva n × Fatorial(n − 1)
```

79*. Prove que se $f(0) \leq 0$ e

$$f(n) \leq f\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + 2, \text{ para todo } n > 0,$$

então

$$f(n) \leq 2\lfloor \lg n \rfloor + 2, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

80*. Considere o seguinte algoritmo

```
Multiplica(x,n)
---------------
  Se n = 0
      Devolva 0
  Se n é par
      Devolva Multiplica(x + x, n/2)
  Devolva Multiplica(x + x, (n−1)/2) + x
```

(a) Prove, por indução em n, que Multiplica(x, n) devolve o valor de nx para todo $x \in \mathbb{C}$ e todo $n \in \mathbb{N}$.

(b) Enuncie e prove um teorema estabelecendo um limite superior (em função de n) para o número de somas efetuadas por Multiplica(x, n)[10].

81$^@$. O seguinte algoritmo devolve o n-ésimo termo da sequência de Fibonacci.

```
F(n)
----
  Se n ≤ 1
      Devolva n
  Devolva F(n − 1) + F(n − 2)
```

Prove que o número de somas na execução de $F(n)$ é pelo menos $F(n)$, para todo $n \geq 2$.

[10]**Sugestão:** Use o resultado do Ex. 79.

82*. (a) Combine as informações dos Exercícios 54, 74 e 76 para propor um algoritmo para o cálculo de $F(n)$.

(b) Dê uma expressão para o número $s(n)$ de somas efetuadas pelo seu algoritmo para calcular $F(n)$.

(c) Compare o resultado obtido com o número de somas efetuadas pelo algoritmo do Exercício 81.

83*. Considere o seguinte algoritmo de ordenação, conhecido como "ordenação por inserção".

Ordena(v, a, b)

```
Se a ≥ b
    Devolva v
Ordena(v, a, b − 1)
Insere(v, a, b)
Devolva v
```

---

onde Busca(x, v, a, b) é o algoritmo do Exercício 58, e

Insere(v, a, b)

```
p ← Busca(v[b], v, a, b − 1)
i ← b
Enquanto i ≥ p + 1
    Troca(v, i, i − 1)
    i ← i − 1
Devolva v
```

---

e Troca(v, a, b) troca os valores de $v[a]$ e $v[b]$ entre si.

Use o resultado dos Exercícios 41 e **??** para estabelecer um limitante superior para o número de comparações na execução de Ordena$(v, a, a + n - 1)$ em função do valor de n.

84*. Proponha uma expressão recursiva para a função $B\colon \mathbb{N} - \{0\} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dada por

$$B(n, k) := k\text{-ésimo bit na representação binária de } n.$$

Prove que a expressão proposta está correta.

85*. Prove por indução em n que, se $0 \leq k \leq n$, então o seguinte algoritmo devolve $\frac{n!}{k!(n-k)!}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

```
B(n, k)
  Se k = 0
      Devolva 1
  Devolva (n/k) B(n − 1, k − 1)
```

86*. Uma certa aplicação financeira rende j por cento do capital aplicado por mês. O rendimento é creditado no próprio saldo da aplicação.

Proponha uma expressão recursiva para a função $C(n)\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ de tal forma que $C(n)$ represente o saldo da aplicação após ao final de n meses, a partir de uma aplicação inicial de valor s.

87*. Sejam $f^-, f, f^+ \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ funções não-decrescentes satisfazendo, para todo $n \geq 2$,

$$\begin{aligned} f^-(n) &= f^-(n-2) + f^-(n-2), \\ f(n) &= f(n-1) + f(n-2), \\ f^+(n) &= f^+(n-1) + f^+(n-1), \end{aligned}$$

e ainda

$$f^-(0) \leq f(0) \leq f^+(0), \text{ e}$$
$$f^-(1) \leq f(1) \leq f^+(1).$$

Prove por indução em n que

$$f^-(n) \leq f(n) \leq f^+(n), \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

88*. Seja $p[a..b]$ um vetor de números racionais. Dados c, $d \in [a..b]$ com $c \leq d$, vamos denotar por $p_{c,d}$ o polinômio

$$p_{c,d}(x) = \sum_{i=0}^{d-c} p[c+i]x^i$$

Por exemplo, se p é o vetor dado por

i	0	1	2	3	4	5
$p[i]$	4	8	15	16	23	42

então,

$$p_{0,5}(x) = 4x^0 + 8x^1 + 15x^2 + 16x^3 + 23x^4 + 42x^5,$$

e

$$p_{2,4}(x) = 15x^0 + 16x^1 + 23x^2.$$

O seguinte algoritmo para computar o valor de $p_{a,b}(x)$ é conhecido como "Método de Horner" para avaliação de polinômios.

```
Avalia(p, x, a, b)
---------------------------------
  Se a = b
     Devolva p[a]
  Devolva p[a] + x × Avalia(p, x, a + 1, b)
```

(a) Prove que o algoritmo está correto, isto é, que dados p, x e a, temos $\mathsf{Avalia}(p, x, a, a + n) = p_{a,a+n}(x)$ para todo $n \geq 0$.

(b) Prove que o algoritmo executa n multiplicações para avaliar um polinômio de grau n, isto é, que dados p, x e a, o número de multiplicações na execução de $\mathsf{Avalia}(p, x, a, a + n)$ é n.

6 Recorrências

6.1 Funções Iteradas

89[@]. Para cada uma das funções $f(x)$ abaixo, dê uma expressão para $f^n(x)$. Em cada caso, prove por indução em n que sua resposta está correta.

(a) $f(x) = x + 1$.

(b) $f(x) = x + 2$.

(c) $f(x) = x + 3$.

(d) $f(x) = x + s$.

(e) $f(x) = 2x$.

(f) $f(x) = 3x$.

(g) $f(x) = mx$.

(h) $f(x) = s + mx$.

90*. Para cada função $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ abaixo, dê uma expressão para a função h^n, onde $n \in \mathbb{N}$.

(a) $h(x) = x - 2$,

(b) $h(x) = x - s$, com $s \in \mathbb{R}$,

(c) $h(x) = 3x$

(d) $h(x) = mx$, com $m \in \mathbb{R}$,

(e) $h(x) = x/2$,

(f) $h(x) = \lceil x/k \rceil$, com $k \in \mathbb{Z}^+$,

(g) $h(x) = \lfloor \sqrt[k]{x} \rfloor$, com $k \in \mathbb{N}$,

91⁻. Considere a seguinte função.

$$C(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{se } n \text{ é par} \\ 3n + 1 & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

A Conjectura de Collatz é a seguinte proposição.

Para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $C^k(n) = 1$.

Desde que foi formulada em 1937, esta conjectura permanece em aberto.

Prove que se for verdade que para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $C^k(n) < n$, então a Conjectura de Collatz é verdadeira.

6.2 Recorrências Iteradas

92[@]. Resolva a seguinte recorrência.

$$f(n) = f(n-2) + 1, \text{ para todo } n \geq 2.$$

93[@]. Resolva a seguinte recorrência.

$$f(n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 1, \\ f\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + 1, & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

94[@]. Resolva a seguinte recorrência.

$$f(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n = 0, \\ f\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + (n \bmod 2) & \text{se } n \geq 1. \end{cases}$$

95*. Seja $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ satisfazendo

$$f(n) = f(n-2) + 1, \text{ para todo } n > 1.$$

Prove, por indução em n, que

(a) $f(n) = f(n \bmod 2) + \left\lfloor \dfrac{n}{2} \right\rfloor$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

(b) $f(n) = (-1)^n a + b + cn$, para todo $n \in \mathbb{N}$, onde

$$\begin{aligned} a &= \frac{f(0) - f(1)}{2} + \frac{1}{4}, \\ b &= \frac{f(0) + f(1)}{2} - \frac{1}{4}, \\ c &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

(c) $f(n) = f(4 + n \bmod 2) + \left\lceil \dfrac{k-5}{2} \right\rceil$, para $n \geq 5$.

96*. Seja $f(n)$ o número de sequências binárias de comprimento n.

(a) Descreva $f(n)$ como uma recorrência.

(b) Resolva esta recorrência.

97*. Uma função $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ é uma *progressão aritmética* se existe $r \in \mathbb{C}$ tal que

$$f(n+1) - f(n) = r \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

(a) Expresse a função f como acima por meio de uma recorrência.

(b) Resolva esta recorrência, obtendo assim uma expressão para o termo geral da progressão aritmética.

98*. Seja $m(n,k)$ o número de multiplicações/divisões efetuadas na execução de $B(n,k)$, o algoritmo do Exercício 85.

(a) Formule uma recorrência para $m(n,k)$ $(0 \leq k \leq n)$.

(b) Resolva esta recorrência.

99*. Resolva a recorrência do Exercício 84.

100*. O Algoritmo de Strassen é um algoritmo recursivo para multiplicação de matrizes quadradas que, para matrizes suficientemente grandes, faz menos operações aritméticas do que o algoritmo usual.

A função $M(n)$, abaixo, estabelece um limitante superior para o número $S(n)$ de operações aritméticas na execução do Algoritmo de Strassen com duas matrizes quadradas de ordem n como entrada, isto é, $S(n) \leq M(n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

$$M(n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 1, \\ 7M\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right) + 18\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil^2, & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

Resolva esta recorrência.

101*. O Algoritmo de Karatsuba é um algoritmo recursivo para multiplicação de inteiros que, para números suficientemente grandes, faz menos operações aritméticas do que o algoritmo usual.

A função $A(n)$, abaixo, descreve o número de operações aritméticas na execução do Algoritmo de Karatsuba com dois inteiros de n dígitos em sua representação binária.

Resolva esta recorrência.

$$A(n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 1, \\ 5, & \text{se } n = 2, \\ 3A\left(\left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil\right) + 20\left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil, & \text{se } n > 2. \end{cases}$$

102@. Dado $q \in \mathbb{C}$, uma *progressão geométrica* de razão q é uma função $f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ satisfazendo

$$\frac{f(n+1)}{f(n)} = q, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

(a) Expresse a função f acima por meio de uma recorrência.

(b) Resolva esta recorrência.

103@. Resolva as seguintes recorrências

(a)
$$f(n) = \begin{cases} n - 1, & \text{se } 2 \leq n \leq 3, \\ 2f(n-1), & \text{se } n \geq 4. \end{cases}$$

(b)
$$f(n) = \begin{cases} n - 1, & \text{se } 2 \leq n \leq 3, \\ 2f(n-2), & \text{se } n \geq 4. \end{cases}$$

104*. Resolva as seguintes recorrências.

(a) $f(n) = 2f\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + 6n - 1, \text{ para todo } n > 1,$

(b) $f(n) = 6f\left(\left\lfloor \frac{n}{6} \right\rfloor\right) + 2n + 3, \text{ para todo } n > 1,$

(c) $f(n) = 4f\left(\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor\right) + 2n - 1, \text{ para todo } n > 1,$

(d) $f(n) = 3f\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + n^2 - 2n + 1, \text{ para todo } n > 1,$

(e) $f(n) = 4f\left(\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor\right) + n^2 - 7n + 5, \text{ para todo } n > 1,$

(f) $f(n) = 4f\left(\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor\right) + \lfloor \sqrt{n} \rfloor + 1, \text{ para todo } n > 3,$

(g) $f(n) = 2f\left(\left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor\right) + n - 1, \text{ para todo } n > 1,$

(h) $f(n) = 2f\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right) + 1, \text{ para todo } n > 1,$

(i) $f(n) = f\left(\left\lceil \frac{2n}{3} \right\rceil\right) + k, \text{ para todo } n > 1 \text{ e } \text{ para todo } k \in \mathbb{N},$

105*. Resolva as seguintes recorrências.

(a) $f(n) = f(n-1) + n, \text{ para todo } n > 0.$

(b) $f(n) = 2f(n-1) + n^2, \text{ para todo } n \geq 1$

(c) $f(n) = f(n-1) + 2n - 3, \text{ para todo } n > 1,$

(d) $f(n) = 2f(n-1) + 3n + 1, \text{ para todo } n > 1,$

(e) $f(n) = 2f(n-1) + n^2, \text{ para todo } n > 1,$

(f) $f(n) = f(n-2) + 3n + 4, \text{ para todo } n > 1,$

(g) $f(n) = f(n-3) + 5n - 9, \text{ para todo } n > 3,$

(h) $f(n) = 2f(n-1) + n^2 - 2n + 1, \text{ para todo } n > 1,$

106*. O seguinte algoritmo resolve o conhecido quebra-cabeça das Torres de Hanói. A execução de Hanoi(n, a, b, c) move n discos da torre a para a torre b usando a torre c como torre auxiliar, de acordo com as regras do jogo.

```
Hanoi(n, a, b, c)
---
  Se n = 0
      Termine
  Hanoi(n − 1, a, c, b)
  mova o disco no topo da torre a para o topo da torre b
  Hanoi(n − 1, c, b, a)
```

Seja $M(n)$ o número de movimentos (passagem de um disco de uma torre para outra) na execução de Hanoi(n, a, b, c).

(a) Descreva $M(n)$ por meio de uma recorrência.

(b) Resolva esta recorrência.

107*. Resolva as seguintes recorrências.

(a) $f(n) = nf(n-1) + n, \text{ para todo } n > 1,$

(b) $f(n) = f\left(\lfloor\sqrt{n}\rfloor\right) + n^2, \text{ para todo } n > 1,$

(c) $f(n) = 2f\left(\lfloor\sqrt[3]{n}\rfloor\right) + n, \text{ para todo } n > 1.$

108@. O número de comparações no pior caso de uma execução do algoritmo MergeSort para um vetor de n elementos é dado pela recorrência

$$T(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n < 2, \\ T\left(\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\right) + T\left(\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil\right) + n - 1, & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

Do Exercício 56 temos que $T^-(n) \leq T(n) \leq T^+(n)$, onde

$$T^-(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n < 2, \\ 2T^-\left(\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\right) + n - 1, & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

e

$$T^+(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n < 2, \\ 2T^+\left(\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil\right) + n - 1, & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

(a) Resolva as recorrências de $T^-(n)$ e $T^+(n)$.

(b) Use as soluções obtidas e o Exercício **??** para concluir que $T(n) \sim n \lg n$.

109@. O "Master Method" ou "Master Theorem"[11] é um método para obtenção de soluções assintóticas para recorrências que surgem naturalmente na análise de "algoritmos de divisão e conquista".

Tais recorrências tem a forma geral

$$T(n) = aT(n/b) + f(n),$$

onde $a \geq 1$ e $b \geq 1$, a expressão n/b pode significar tanto $\lfloor n/b \rfloor$ como $\lceil n/b \rceil$ e $f()$ é uma função genérica. A recorrência do Exercício 108 é um exemplo de caso particular desta recorrência.

[11] Popularizado com este nome por Cormen, Leiserson, Rivest, and Stein (2009).

Sejam a, b e $f()$ como acima e sejam $n_0 \in \mathbb{N}$ e $T^+, T^- : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ tais que

$$\begin{aligned} T^-(n) &= aT^-\left(\lfloor n/b \rfloor\right) + f(n), \\ T^+(n) &= aT^+\left(\lceil n/b \rceil\right) + f(n), \end{aligned}$$

para todo $n \geq n_0$.

Resolva estas recorrências.

110*. Considere o algoritmo Exp do exercício 76.

(a) Expresse o número de multiplicações efetuadas na execução de Exp(x, n)) por meio de uma recorrência.

(b) Resolva essa recorrência.

111*. O Algoritmo MinMax(v, a, b) (abaixo), devolve um par de índices $(m, M) \in [a..b]^2$ tal que $v[m] \leq v[i] \leq v[M]$, para todo $i \in [a..b]$. O Algoritmo Ordena(v, a, b) ordena o vetor $v[a..b]$ em ordem não-decrescente.

```
MinMax(v, a, b)
  Se a = b
      Devolva (a, a)
  Se a = b − 1
      Se v[a] ≤ v[b]
          Devolva (a, b)
      Devolva (b, a)
  (m, M) ←
    MinMax(v, a, a + 1)
  (m′, M′) ←
    MinMax(v, a + 2, b)
  Se v[m′] < v[m]
      m ← m′
  Se v[M′] > v[M]
      M ← M′
  Devolva (m, M)
```

```
Ordena(v, a, b)
  Se a ≥ b
      Termine
  (m, M) ←
    MinMax(v, a, b)
  Troca(v, a, m)
  Troca(v, b, M)
  Ordena(v, a + 1, b − 1)
```

(a) Seja $C(n)$ o número de comparações entre elementos de v efetuadas na execução de MinMax$(v, a, a + n - 1)$. Expresse $C(n)$ por meio de uma recorrência.

(b) Resolva esta recorrência.

(c) Seja $K(n)$ o número de comparações entre elementos de v efetuadas na execução de $\mathsf{Ordena}(v, a, a+n-1)$. Expresse $K(n)$ por meio de uma recorrência.

(d) Resolva esta recorrência.

(e) O conhecido "método da seleção" para ordenação de vetor faz $\binom{n}{2}$ comparações ao processar um vetor de n posições. O algoritmo *Ordena* faz mais ou menos comparações assintoticamente?

6.3 Recorrências Lineares Homogêneas

112*. Resolva as seguintes recorrências.

(a)

$$f(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n \leq 1, \\ 5f(n-1) - 6f(n-2), & \text{se } n > 1. \end{cases}$$

ex:rlh+4+3

(b)

$$f(n) = \begin{cases} 0, & \mathsf{se}\ n = 0 \\ 2^n, & \mathsf{se}\ n = 1\ \mathsf{ou}\ n = 2 \\ 6f(n-1) - 11f(n-2) + 6f(n-3), & \mathsf{se}\ n \geq 3. \end{cases}$$

ex:rlh+2-1

(c)

$$f(n) = \begin{cases} n, & \mathsf{se}\ n < 1, \\ 1, & \mathsf{se}\ 1 \leq n \leq 2, \\ 8f(n-1) - 19f(n-2) + 12f(n-3), & \mathsf{se}\ n \geq 3. \end{cases}$$

ex:rlh+72-72+1

113⁻. Seja $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ o conjunto das funções $\mathbb{N} \to \mathbb{C}$. Dados $f, g \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ e $z \in \mathbb{C}$, definimos $f + g \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ e $zf \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ como as funções dadas por

$$\begin{aligned} (f+g)(n) &= f(n) + g(n), \\ (zf)(n) &= zf(n). \end{aligned}$$

(a) Prove que $(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}, +)$ é um grupo comutativo.

(b) Prove que $(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}, +)$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$.

114^{-}. Sejam $r_1, r_2 \in \mathbb{C} - \{0\}$. Prove que as funções $f_1, f_2 \colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ dadas por

$$\begin{aligned} f_1(n) &= r_1^n, \\ f_2(n) &= r_2^n, \end{aligned}$$

são linearmente independentes em $(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}, +)$ se e somente se $r_1 \neq r_2$.

115^{-}. Sejam[12] $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{C}$.

(a) Prove que se $g, h \colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ satisfazem a recorrência

$$f(n) = a_1 f(n-1) + a_2 f(n-2) + \ldots + a_k f(n-k), \text{ para todo } n \geq k,$$

então a função $g + h$ também satisfaz a mesma recorrência para todo $n \geq k$.

(b) Prove que se $f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ satisfaz a recorrência

$$f(n) = a_1 f(n-1) + a_2 f(n-2) + \ldots + a_k f(n-k), \text{ para todo } n \geq k,$$

então para todo $z \in \mathbb{C}$, a função zf também satisfaz a mesma recorrência para todo $n \geq k$.

(c) Prove que o conjunto das funções $f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ que satisfazem a recorrência

$$f(n) = a_1 f(n-1) + a_2 f(n-2) + \ldots + a_k f(n-k), \text{ para todo } n \geq k,$$

é um subespaço vetorial de $(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}, +)$.

116$^{@}$. Resolva a seguinte recorrência.

$$f(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n < 2, \\ 2f(n-1) - f(n-2), & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

117$^{@}$. Resolva as seguintes recorrências.

[12] Este exercício usa a notação do Exercício 113

(a)

$$f(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n \leq 2 \\ 5f(n-1) - 7f(n-2) + 3f(n-3), & \text{se } n \geq 3. \end{cases}$$

(b)

$$f(n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 0 \\ 9, & \text{se } n = 1 \text{ ou } n = 2 \\ 9f(n-1) - 27f(n-2) + 27f(n-3), & \text{se } n \geq 3. \end{cases}$$

(c)

$$f(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n \leq 1 \\ 3, & \text{se } n = 2 \\ 7f(n-1) - 16f(n-2) + 12f(n-3), & \text{se } n \geq 3. \end{cases}$$

118*. Resolva as seguintes recorrências.

(a)

$$f(n) = \begin{cases} 3, & \text{se } n \leq 1, \\ 7, & \text{se } n = 2, \\ 3f(n-1) - f(n-2) + 3f(n-3), & \text{se } n \geq 3. \end{cases}$$

(b)

$$2f(n) = 3f(n-1) - 3f(n-2) + f(n-3), \text{ para todo } n \geq 3,$$

com

$$f(n) = n, \text{ para todo } n < 3.$$

(c)

$$f(n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 0 \\ 4, & \text{se } n = 1 \text{ ou } n = 2, \\ 6f(n-1) - 12f(n-2) + 8f(n-3), & \text{se } n \geq 3. \end{cases}$$

(d)

$$f(n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 0 \\ \sqrt{5} + 2^n, & \text{se } n = 1 \text{ ou } n = 2 \\ 3f(n-1) - f(n-2) - 2f(n-3), & \text{se } n \geq 3. \end{cases}$$

(e)

$$f(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n = 0 \\ 3^n, & \text{se } n = 1 \text{ ou } n = 2 \\ 10f(n-1) - 31f(n-2) + 30f(n-3), & \text{se } n \geq 3. \end{cases}$$

(f)

$$f(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n \leq 2 \\ 8f(n-1) - 21f(n-2) + 18f(n-3), & \text{se } n \geq 3. \end{cases}$$

(g)

$$f(n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 0, \\ 2, & \text{se } n = 1, \\ 2f(n-1) + 4f(n-2), & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

(h)

$$f(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n \leq 1, \\ f(n-1) - f(n-2), & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

(i)

$$f(n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n \leq 1 \\ 4f(n-1) - 4f(n-2), & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

(j)

$$f(n) = \begin{cases} 4n, & \text{se } n < 2, \\ 4f(n-2), & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

(k)

$$f(n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 0 \\ 6, & \text{se } n = 1 \\ 6f(n-1) - 9f(n-2), & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

(l)

$$f(n) = \begin{cases} 2n, & \text{se } n < 2, \\ f(n-2), & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

$119^\star$. Resolva as seguintes recorrências.

(a) [13]

$$f(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n \leq 1, \\ nf(n-1) + n(n-1)f(n-2), & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

(b) [14]

$$f(n) = \begin{cases} n+1, & \text{se } n \leq 1, \\ \sqrt{f(n-1)f(n-2)}, & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

(c) [15]

$$f(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n = 0, \\ \sqrt{1 + f(n-1)^2}, & \text{se } n \geq 1. \end{cases}$$

(d) [16]

$$f(n) = \begin{cases} n+1, & \text{se } n \leq 1, \\ f(n-1)f(n-2), & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

120*. Resolva a recorrência

$$f(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n \leq 4, \\ 7f(n-1) - 19f(n-2) + 25f(n-3) - 16f(n-4) + 4f(n-5), & \text{se } n > 4. \end{cases}$$

[13]**Sugestão:** Considere a função

$$g(n) = \frac{f(n)}{n!}.$$

[14]**Sugestão:** Considere a função

$$g(n) = \lg f(n).$$

[15]**Sugestão:** Considere a função

$$g(n) = f(n)^2.$$

[16]**Sugestão:** Considere a função

$$g(n) = \lg f(n).$$

6.4 Recorrências Lineares não Homogêneas

121@. Resolva as seguintes recorrências.

(a)
$$f(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n = 0, \\ f(n-1) + 1, & \text{se } n > 0. \end{cases}$$

(b)
$$f(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n = 0, \\ 2f(n-1) + 1, & \text{se } n > 0. \end{cases}$$

(c)
$$f(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n = 0, \\ f(n-1) + n, & \text{se } n > 0 \end{cases}$$

(d)
$$f(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n < 1, \\ 2f(n-1) + n, & \text{se } n \geq 1. \end{cases}$$

(e)
$$f(n) = 2f(n-1) + n^2, \text{ para todo } n \geq 1$$

(f)
$$f(n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n \leq 1, \\ 2f(n-2) + \frac{1}{2^n}, & \text{se } n > 1. \end{cases}$$

(g)
$$f(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n < 1 \\ 2f(n-1) + 2n - 1, & \text{se } n \geq 1 \end{cases}$$

(h)
$$f(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n < 1 \\ 2f(n-1) + n^2 + n, & \text{se } n \geq 1 \end{cases}$$

(i)
$$f(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n < 2, \\ f(n-1) + f(n-2) + 1, & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

(j)

$$f(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n < 2, \\ 7f(n-1) - 12f(n-2) + 2n, & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

(k)

$$f(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n < 2, \\ 5f(n-1) - 6f(n-2) + n.3^n, & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

(l)

$$f(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n < 2, \\ 5f(n-1) - 4f(n-2) + 2n.5^n + 2, & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

122*. O **"Triângulo de Cantor"**, (batizado em homenagem ao Georg Cantor), é uma "tabela infinita" triangular em que cada par $(i, j) \in \mathbb{N}^2$ ocupa uma posição de maneira que, para todo $n \in \mathbb{N}$, a n-ésima linha do triângulo é formada por todos os pares $(i, j) \in \mathbb{N}^2$ satisfazendo $i + j = n$.

As linhas, colunas e posições começam a contar a partir de 0, de cima para baixo e da esquerda para direita. Assim, por exemplo, $(0, 0)$ ocupa a posição 0 (linha 0, coluna 0); $(0, 1)$ ocupa a posição 1 (linha 1, coluna 0); $(1, 0)$ ocupa a posição 2 (linha 1, coluna 1); $(0, 2)$ ocupa a posição 3 (linha 2, coluna 0) e assim por diante. As 7 primeiras linhas do Triângulo de Cantor são

$$\begin{array}{lllllll}
(0,0) \\
(0,1) & (1,0) \\
(0,2) & (1,1) & (2,0) \\
(0,3) & (1,2) & (2,1) & (3,0) \\
(0,4) & (1,3) & (2,2) & (3,1) & (4,0) \\
(0,5) & (1,4) & (2,3) & (3,2) & (4,1) & (5,0) \\
(0,6) & (1,5) & (2,4) & (3,3) & (4,2) & (5,1) & (6,0)
\end{array}$$

(a) Seja $l(n)$ o número de pares na n-ésima linha do Triângulo de Cantor

   i. Descreva $l(n)$ como uma recorrência.

   ii. Resolva essa recorrência.

(b) Seja $t(n)$ o número de pares no Triângulo de Cantor até a n-ésima

   i. Descreva $t(n)$ como uma recorrência.

ii. Resolva essa recorrência.

(c) Seja $p(i,j)$ a posição ocupada pelo par (i,j) no Triângulo de Cantor. Dê uma expressão não recorrente para $p(i,j)$.

123*. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $S(n)$ o número de somas efetuado na execução de $\mathsf{F}(n)$, o algoritmo do Exercício 81.

(a) Expresse $S(n)$ por uma recorrência.

(b) Resolva essa recorrência.

124*. Para todo $n \geq 0$, um n-cubo é um diagrama composto por pontos e linhas que ligam pares de pontos entre si (ou seja, um *grafo*). O 0-cubo tem um ponto e nenhuma linha. Para todo $n > 0$, o n-cubo é o diagrama obtido desenhando-se lado a lado duas cópias do $(n-1)$-cubo e ligando cada ponto de uma das cópias ao seu correspondente na outra cópia por uma linha.

(a) Descreva o número de pontos de um n-cubo através de uma recorrência.

(b) Resolva esta recorrência.

(c) Descreva o número de linhas de um n-cubo através de uma recorrência.

(d) Resolva esta recorrência.

6.5 Somatórios

125$^@$. Dado $q \in \mathbb{C} - \{0\}$, uma *progressão geométrica*[17] de razão q é uma função $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ satisfazendo

$$\frac{f(n+1)}{f(n)} = q, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Assim, a soma dos n termos iniciais de uma progressão geométrica é dada por

$$s(n) = \sum_{i=0}^{n-1} f(i).$$

[17] cfr. Exercício 102

(a) Expresse a função f acima por meio de uma recorrência linear homogênea.

(b) Resolva esta recorrência, obtendo assim uma expressão para o termo geral da progressão geométrica.

(c) Dê uma expressão livre de somatórios para $s(n)$.

126$^{@}$. Uma função $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ é uma *progressão aritmética*[18] se existe $r \in \mathbb{C}$ tal que

$$f(n+1) - f(n) = r \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Assim, a soma dos n termos iniciais de uma progressão aritmética é dada por

$$s(n) = \sum_{i=0}^{n-1} f(i).$$

(a) Expresse a função f acima por meio de uma recorrência linear não homogênea.

(b) Resolva esta recorrência, obtendo assim uma expressão para o termo geral da progressão aritmética.

(c) Dê uma expressão livre de somatórios para $s(n)$.

127$^{@}$. Dê uma expressão livre de somatórios para $\sum_{i=0}^{n} i$.

128$^{@}$. Dê uma expressão[19] livre de somatórios para $\sum_{i=0}^{n} i2^i$.

129*. Calcule o valor dos seguintes somatórios.

(a)

$$\sum_{i=0}^{n} i^2.$$

ex:somatorios:i3

[18] cfr. Exercício 97

[19] cfr. Exercício 47

(b)

$$\sum_{i=0}^{n} i(i-1).$$

ex:somatorios:2i

(c)

$$\sum_{i=0}^{n} i^2 3^i.$$

ex:somatorios:i256i

(d)

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{i^2}{5^i}.$$

ex:somatorios:i2i-1

(e)

$$\sum_{i=0}^{n} i^2(i-1).$$

ex:somatorios:i(2i-i)

130*. A *média*[20] do número de comparações efetuadas na execução do algoritmo de busca binária em um vetor de n posições é dada por[21]

$$\begin{aligned}\mu(n) = 1 \times \frac{1}{n} + 2 \times \frac{2}{n} + 3 \times \frac{4}{n} + 4 \times \frac{8}{n} + \dots \\ + \lfloor \lg n \rfloor \times \frac{2^{\lfloor \lg n \rfloor - 1}}{n} \\ + (\lfloor \lg n \rfloor + 1) \times \frac{(n - \sum_{i=1}^{\lfloor \lg n \rfloor} 2^{i-1})}{n}\end{aligned}$$

(a) Dê uma expressão livre de somatórios[22] para $\mu(n)$.

(b) Conclua do item anterior que $\mu(n) \sim \lfloor \lg n \rfloor$.

[20] Também chamada *número esperado* ou *esperança*.

[21] Assume-se aqui que a busca por qualquer dos n elementos do vetor é equiprovável e bem-sucedida.

[22] **Sugestão:** use os resultados dos Exercícios 46 e 47

131*. Dê uma expressão livre de somatórios para

$$s(n) = \sum_{i=0}^{n} F(i),$$

onde $F(n)$ é a sequência de Fibonacci[23].

132$^@$. Em muitas situações de cálculo numérico trabalha-se com matrizes triangulares inferiores, isto é, matrizes quadradas cujos elementos acima da diagonal principal são todos nulos. Nesses casos é comum representar uma matriz triangular inferior de n linhas por um vetor contendo somente as posições não-nulas da matriz, o que resulta numa economia de espaço de quase 50%.

Suponha que a matriz triangular inferior M, de n linhas indexadas de 1 a n, será representada por um vetor $v[0..N(n)-1]$, onde $N(n)$ é o tamanho do vetor necessário para representar uma matriz triangular inferior de n linhas.

(a) Descreva $N(n)$ através de uma recorrência.

(b) Resolva esta recorrência.

(c) Qual o índice de v que corresponde à posição $M[i,j]$?

133$^@$. Resolva a seguinte recorrência que expressa o número médio de comparações na execução do algoritmo QuickSort.

$$C(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n < 2, \\ \frac{(n+1)}{n}C(n-1) + \frac{2(n-1)}{n}, & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

134$^@$. Uma *árvore binária* T é uma *árvore vazia*, denotada por λ ou é um par $(E(T), D(T))$ onde $E(T)$ e $D(T)$ são árvores binárias, chamadas respectivamente de *subárvore esquerda* e *subárvore direita* de T. Vamos denotar por $\mathcal{B}$ o conjunto das árvores binárias.

O *tamanho* de uma árvore T é dado por

$$|T| = \begin{cases} 0, & \text{se } T = \lambda, \\ |E(T)| + |D(T)| + 1, & \text{caso contrário .} \end{cases}$$

[23]Veja o Exercício 53.

A árvore de tamanho um é chamada de *árvore trivial*.

A *altura* de uma árvore T é dada por

$$h(T) = \begin{cases} 0, & \textsf{se } T = \lambda, \\ \max\{h(E(T)), h(D(T))\} + 1, & \textsf{se } T \neq \lambda. \end{cases}$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $h^+(n)$ a maior altura possível de uma árvore binária de tamanho n.

(a) Expresse $h^+(n)$ como uma recorrência.

(b) Resolva esta recorrência.

135$^@$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $t^+(n)$ o maior tamanho possível de uma árvore binária[24] de altura n.

(a) Expresse $t^+(n)$ como uma recorrência.

(b) Resolva esta recorrência.

136$^@$. Seja AVL o conjunto das árvores binárias[25] T satisfazendo

$$\lambda \in \mathsf{AVL} \textsf{ e } E(T) \in \mathsf{AVL} \textsf{ e } D(T) \in \mathsf{AVL}.$$

e

$$|h(E(T)) - h(D(T))| \leq 1.$$

Seja $t^-(n)$ o menor tamanho possível de uma árvore AVL de altura n.

(a) Expresse $t^-(n)$ como uma recorrência.

(b) Resolva esta recorrência.

[24] Veja o Exercício 134.
[25] Veja o Exercício 134.

Referências

Thomas H. Cormen, Charles E. Leiserson, Ronald L. Rivest, and Clifford Stein. *Introduction to Algorithms*. MIT Press, 3 edition, 2009. ISBN 978-0-262-03384-8. URL http://mitpress.mit.edu/catalog/item/default.asp?ttype=2&tid=11866. 31