Matemática Discreta

Exercícios

28 de julho de 2016

Sumário

1 Elementos de Lógica

1. Das proposições abaixo, indique as verdadeiras e as falsas.

   (a) "$2 \leq 3$".

   (b) "$10 > 20$".

   (c) "$x^2 \leq x$".

2. Das proposições abaixo, indique as verdadeiras e as falsas.

   (a) $(1 < 2)$ e $(2 < 3) \implies (1 < 3)$,

   (b) $(1 < 2) \implies (10 < 30)$,

   (c) $1 > 2 \implies 2 < 3$,

   (d) $1 > 2 \implies 2 > 3$.

3. Sejam P e Q os seguintes predicados.

$$\begin{aligned} P(x) &: x \leq x^2, \\ Q(x, y) &: x \leq y^2. \end{aligned}$$

   Das proposições abaixo, indique as verdadeiras e as falsas.

   (a) $P(2)$.

   (b) $P(1/2)$.

   (c) $Q(1, 1)$.

   (d) $R(t) = Q(1, t)$.

4. Seja $P(x)$ o predicado "$x \leq x^2$".

   Das proposições abaixo, indique as verdadeiras e as falsas.

   (a) $P(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

   (b) $P(x)$, para algum $x \in \mathbb{R}$.

   (c) $P(x)$, para todo $x \geq 1$.

   (d) $P(x)$, para algum $0 < x < 1$.

5. Prove que se A, B e C são proposições, então

(a) $F \implies A$, ou seja, a partir de uma proposição falsa pode-se concluir qualquer coisa.

(b) $(A \implies B) \equiv ((\text{ não } B) \implies (\text{ não } A))$, também conhecida como *contrapositiva* da implicação. Uma "prova de $A \implies B$ por contrapositiva" é uma prova de que $((\text{ não } B) \implies (\text{ não } A))$.

(c) $(A \implies F) \equiv \text{ não } A$, ou seja, uma implicação cujo consequente é falso só pode ser verdadeira se o antecedente é falso. Este é o princípio por baixo das "provas por contradição".

(d) $((A \implies B) \text{ ou } (A \implies C)) \equiv (A \implies (B \text{ ou } C))$ (distributividade da disjunção pela implicação).

(e) $((A \implies B) \text{ e } (A \implies C)) \equiv (A \implies (B \text{ e } C))$ (distributividade da conjunção pela implicação).

(f) $((B \implies A) \text{ ou } (C \implies A)) \equiv ((B \text{ e } C) \implies A)$ (outra distributividade).

(g) $((B \implies A) \text{ e } (C \implies A)) \equiv ((B \text{ ou } C) \implies A)$ (outra distributividade).

(h) $((A \implies B) \text{ e } (A \implies (\text{ não } B))) \implies (\text{ não } A)$ (outar maneira de expressar o princípio por baixo de uma prova por contradição).

6. Considere os seguintes predicados.

$$
\begin{aligned}
I(x) &\equiv x \in \mathbb{Z}, \\
P(f,x) &\equiv I(x) \implies I(f(x)), \\
Q(f,x) &\equiv I(f(x)) \implies I(x).
\end{aligned}
$$

Dê um exemplo de função $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que

(a) satisfaz o predicado $P(g,x), \text{ para todo } x \in \mathbb{R}$.

(b) não satisfaz o predicado $P(g,x), \text{ para todo } x \in \mathbb{R}$.

(c) satisfaz o predicado $\text{ não } (P(g,x), \text{ para todo } x \in \mathbb{R})$.

(d) satisfaz o predicado $Q(g,x), \text{ para todo } x \in \mathbb{R}$.

(e) não satisfaz o predicado $Q(g,x), \text{ para todo } x \in \mathbb{R}$.

(f) satisfaz o predicado $\text{ não } (Q(g,x), \text{ para todo } x \in \mathbb{R})$.

7. Considere os seguintes predicados.

$$\begin{aligned}
L(f) &\equiv \lim f(n) = 0, \\
P(n, f, g, h) &\equiv f(n) = g(n)(1 + h(n)), \\
B(f, g, h) &\equiv L(h) \text{ e } (P(n, f, g, h), \text{ para todo } n \in \mathbb{N}), \\
A(f, g) &\equiv B(f, g, h), \text{ para algum } h\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Dê um exemplo de funções $f, g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ que

(a) satisfazem $A(f, g)$.

(b) não satisfazem $A(f, g)$.

(c) satisfazem não $A(f, g)$.

8. Seja $O(f)$ o seguinte predicado (onde $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$).

$$(((n \geq k \implies |f(n)| \leq c), \text{ para algum } k > 0), \text{ para algum } c > 0), \text{ para todo } n \geq k.$$

Avalie as seguintes proposições justificando cada uma, isto é, apresentando uma prova de se são verdadeiras ou falsas.

(a) $O(n/(n-1))$,

(b) $O(n)$,

(c) $O(10 + 1/n)$,

(d) $O(\log n)$,

(e) $O(42)$.

9. Considere os seguintes predicados.

$$\begin{aligned}
P_1(f, g, c, n) &\equiv |f(n)| \leq c|g(n)|, \\
P_2(f, g, c, k) &\equiv P_1(f, g, c, n), \text{ para todo } n \geq k, \\
P_3(f, g, c) &\equiv P_2(f, g, c, k), \text{ para algum } k \in \mathbb{N}, \\
O(f, g) &\equiv P_3(f, g, c), \text{ para algum } c \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Para cada par de funções $f, g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, classifique as proposições abaixo como verdadeiras ou falsas.

(a) $O(f, g)$, para $f(n) = n$ e $g(n) = n^2$.

(b) $O(g, f)$, para $f(n) = n$ e $g(n) = n^2$.

(c) $O(f, g)$, para $f(n) = n/2$ e $g(n) = n$.

(d) $O(g, f)$, para $f(n) = n/2$ e $g(n) = n$.

10. Sejam $D(x, y, d)$ e $M(x, y)$ os seguintes predicados, respectivamente.

    $D(x, y, d)$**:** $|x - y| < d$,

    $M(x, y)$**:** $x > y$.

    Use os predicados $D(x, y, d)$ e $M(x, y)$ para expressar os seguintes predicados.

    $L_1(f, a, l)$**:** $\lim_{x \to a} f(x) = l$.

    $L_2(f, l)$**:** $\lim_{x \to \infty} f(x) = l$.

    $L_3(f, a)$**:** $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$.

    $L_4(f)$**:** $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$

2 Conjuntos e Inteiros

11. Seja A um conjunto finito e seja $B \subseteq A$. Prove que

$$A = (A - B) \cup B,$$

12. Dados $f, g \colon A \to \mathbb{C}$ e $X \subseteq A$ e $c \in \mathbb{C}$, é verdade que

    (a)
    $$\prod_{x \in X} c = c|X|?$$

    (b)
    $$\prod_{x \in X} (f(x) + g(x)) = \prod_{x \in X} f(x) + \prod_{x \in X} g(x)?$$

    (c)
    $$\sum_{x \in X} f(x)g(x) = \left(\sum_{x \in X} f(x)\right)\left(\sum_{x \in X} g(x)\right)?$$

    Justifique.

3 Chão e Teto

13. Prove que $\lceil x \rceil$ é o único inteiro que satisfaz

$$x \leq \lceil x \rceil < x + 1,$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

14. Prove que

$$\lceil x \rceil + z = \lceil x + z \rceil .$$

para todo $x \in \mathbb{R}$ e todo $z \in \mathbb{Z}$.

15. Sejam $n, m \colon \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ dadas por

$$\begin{aligned} n(a, b) &= b - a + 1, \\ m(a, b) &= \left\lfloor \frac{a + b}{2} \right\rfloor, \end{aligned}$$

Prove que, para todo $a, b \in \mathbb{Z}$,

(a) $a+b$ é par se e somente se $n(a,b)$ é ímpar.

(b) $n(a, m(a,b)) = \left\lceil \dfrac{n(a,b)}{2} \right\rceil$.

(c) $n(m(a,b)+1, b) = \left\lfloor \dfrac{n(a,b)}{2} \right\rfloor$.

(d) $n(a, m(a,b)-1) = \left\lfloor \dfrac{n(a,b)-1}{2} \right\rfloor$.

16. Prove que, para todo $x \in \mathbb{R}$,

    (a) $x - \lfloor x \rfloor \leq 1$.

    (b) $\lceil x \rceil - x \leq 1$.

    (c) $\lfloor x \rfloor = \lceil x \rceil$ se e somente se $x \in \mathbb{Z}$

    (d) $\lceil x \rceil - \lfloor x \rfloor \in \{0, 1\}$.

17. Prove que

    (a) $\min \{k \in \mathbb{Z} \mid k > x\} = \lfloor x+1 \rfloor$,

    (b) $\max \{k \in \mathbb{Z} \mid k < x\} = \lceil x-1 \rceil$,

    para todo $x \in \mathbb{R}$.

18. Prove que, para todo inteiro $n > 0$,

    (a) $\frac{n}{2} < 2^{\lfloor \lg n \rfloor} \leq n \leq 2^{\lceil \lg n \rceil} < 2n$.

    (b) $\lfloor \lg n \rfloor > \lfloor \lg(n-1) \rfloor$ se e somente se n é potência de 2.

    (c) $\lceil \lg n \rceil < \lceil \lg(n+1) \rceil$ se e somente se n é potência de 2.

    (d) $\frac{1}{2} \leq \frac{n}{2^{\lceil \lg n \rceil}} \leq 1 \leq \frac{n}{2^{\lfloor \lg n \rfloor}} < 2$.

    (e) $\left\lfloor \frac{n}{2^{\lfloor \lg n \rfloor}} \right\rfloor = 1$, para todo $n > 0$.

    (f) $\left\lfloor \frac{n}{2^k} \right\rfloor = 0$ se e somente se $k > \lfloor \lg n \rfloor$.

    (g) $\lceil \lg(n+1) \rceil = \lfloor \lg n \rfloor + 1$.

19. Seja $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função crescente e contínua satisfazendo

$$f(x) \in \mathbb{Z} \implies x \in \mathbb{Z}, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Prove que

$$\lceil f(\lceil x \rceil) \rceil = \lceil f(x) \rceil\,, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

20. Seja k um inteiro positivo e seja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função dada por

$$f(x) = \frac{x}{k}.$$

Prove que

(a) f uma função contínua.

(b) f uma função crescente.

(c) $f(x) \in \mathbb{Z} \implies x \in \mathbb{Z}$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

21. Se $f\colon A \to B$ e $g\colon B \to C$ são funções contínuas, então $f \circ g\colon A \to C$ é uma função contínua.

22. Sejam $A, B, C \subseteq \mathbb{R}$ e $f\colon A \to B$ e $g\colon B \to C$ funções crescentes. Prove que $f \circ g\colon A \to C$ é uma função crescente.

23. Dizemos que uma função $f\colon A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é integralizada se

$$f(x) \in \mathbb{Z} \implies x \in \mathbb{Z}, \text{ para todo } x \in A,$$

Sejam $A, B, C \subseteq \mathbb{R}$. Prove que se $f\colon A \to B$ e $g\colon B \to C$ são funções integralizadas, então $f \circ g\colon A \to C$ é uma função integralizada.

4 Aproximação Assintótica

24. Prove que $\approx$ é uma relação de equivalência sobre o conjunto das funções $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

25. É verdade que $\lfloor f(n) \rfloor \approx f(n)$ para toda $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$? Justifique.

26. É verdade que $\sum_{i=1}^{n} \lfloor f(n) \rfloor \approx \sum_{i=1}^{n} f(n)$ para toda $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$? Justifique.

27. A soma
$$\sum_{i=1}^{n} \lfloor \lg i \rfloor \tag{1}$$
aparece com certa frequência em aplicações ligadas à computação. [1].

(a) Prove que, dado $k \in \mathbb{N}$, temos
$$\lfloor \lg i \rfloor = \lfloor \lg k \rfloor \text{ para todo } i \in [2^{\lfloor \lg k \rfloor}..2^{\lfloor \lg k \rfloor + 1} - 1].$$

(b) Use esta observação para agrupar convenientemente os termos em (1).

(c) Prove que[2]
$$\sum_{i=1}^{n} \lfloor \lg i \rfloor = n \lfloor \lg n \rfloor - \left(2^{\lfloor \lg n \rfloor + 1} - \lfloor \lg n \rfloor - 2\right).$$

(d) Prove que
$$\sum_{i=1}^{n} \lfloor \lg i \rfloor \approx \sum_{i=1}^{n} \lg i.$$

(e) Prove que[3]
$$\sum_{i=1}^{n} \lfloor \lg i \rfloor \approx n \lg n.$$

[1] Veja o Exercício 46 para um exemplo.
[2] **Sugestão:** use os resultados dos Exercícios 18 e 52.
[3] **Sugestão:** use o resultado do Exercício 18

(f) Prove que
$$\lg n! \approx n \lg n.$$

(g) As proposições acima podem ser generalizadas para logaritmos em outras bases além de 2? Como?

28. Prove que

(a) $\binom{n}{2} \approx \frac{n^2}{2}$,

(b) $\sum_{i=1}^{n} i \approx \frac{n^2}{2}$,

(c) $\log_b n! \approx n \log_b n$, para todo $b > 1$.

(d) $\sum_{i=1}^{n} \log_b i \approx n \log_b n$, para todo $b > 1$.

29. Prove que
$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \approx \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

30. Prove que
$$\frac{5-3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{5+3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - 1 \approx \frac{5+3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

31. Sejam $f, g \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Prove que $f(n) \approx g(n)$ se e somente se existe $\varepsilon \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ tal que
$$f(n) = g(n)(1 + \varepsilon(n)),$$
e
$$\lim \varepsilon(n) = 0.$$

32. Sejam $F, f, g, h \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ e $n_0 \in \mathbb{N}$ tais que $F(n) \approx f(n)$, $F(n) \approx h(n)$, e
$$f(n) \leq g(n) \leq h(n), \text{ para todo } n \geq n_0,$$
Prove que, neste caso,
$$F \approx f \approx g \approx h.$$

33. Seja $P\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ dado por

$$P(n) = a_0 n^0 + a_1 n^1 + a_2 n^2 + \ldots + a_k n^k$$

um polinômio de grau k (e, portanto, $a_k \neq 0$).

Prove que $P(n) \approx a_k n^k$

34. Seja $c \in \mathbb{C} - \{0, 1\}$ e seja

$$s(n) = \sum_{i=0}^{n} c^i.$$

Prove que

(a) se $c > 1$, então $s(n) \approx \frac{c^{n+1}}{c-1}$,

(b) se $c < 1$, então $s(n) \approx \frac{1}{1-c}$.

35. Prove que

$$\binom{n}{k} \approx \frac{n^k}{k!}, \text{ para todo } 0 \leq k \leq n/2.$$

5 Indução

36. Prove por indução em n que se $A_1, \ldots, A_n$ e B são conjuntos, então

$$\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \cap B = \bigcup_{i=1}^{n} (A_i \cap B),$$

37. Prove que

$$\sum_{i=0}^{n} c^i = \frac{c^{n+1} - 1}{c - 1},$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $c \in \mathbb{C} - \{0, 1\}$.

38. Prove por indução em n que

$$2^n < n!, \text{ para todo } n \geq 4.$$

39. A *sequência de Fibonacci* é a função $F\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dada por

$$F(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n \leq 1 \\ F(n-1) + F(n-2), & \text{se } n > 1. \end{cases}$$

(a) Prove por indução em n que

$$F(n) = \frac{\sqrt{5}}{5} \left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right),$$

(b) Conclua que

$$F(n) \approx \frac{\sqrt{5}}{5} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n$$

40. Prove por indução que qualquer valor maior ou igual a 4 reais pode ser obtido somente com cédulas de 2 e 5 reais.

41. Prove, por indução em n, que $n^2 - 1$ é divisível por 8 para todo $n \in \mathbb{N}$ ímpar.

42. A *sequência de Fibonacci* é a função $F\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dada por

$$F(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n \leq 1 \\ F(n-1) + F(n-2), & \text{se } n > 1. \end{cases}$$

Prove, por indução em n, que

(a) $\sum_{j=0}^{n} \big(F(j)\big)^2 = F(n)F(n+1), \text{ para todo } n \in \mathbb{N}$

(b) $\sum_{j=0}^{n} F(2j) = F(2n+1) - 1, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}$

(c) $\sum_{j=1}^{n} F(2j-1) = F(2n), \text{ para todo } n \in \mathbb{N}$

(d) $F(n+1)F(n-1) - \big(F(n)\big)^2 = (-1)^n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}$

onde $F : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ é a *sequência de Fibonacci*[4].

43. Dados $n, k \in \mathbb{N}$, o coeficiente binomial $\binom{n}{k}$ é definido da seguinte maneira

$$\binom{n}{k} := \begin{cases} 1, & \text{se } k = 0, \\ \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}, & \text{se } 1 \leq k \leq n, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Prove, por indução em n, que

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$$

44. Seja $l\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dada por

$$l(n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 1, \\ l\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + 1, & \text{se } n > 1. \end{cases}$$

Prove por indução em n que

$$l(n) = \lfloor \lg n \rfloor + 1, \text{ para todo } n > 0.$$

45. Prove que

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} F(n+1) & F(n) \\ F(n) & F(n-1) \end{pmatrix}, \text{ para todo } n > 0,$$

onde F é a sequência de Fibonacci (cfr Exercício 42)[5].

[4] Veja o Exercício 39

[5] Este é um dos algoritmos mais eficientes para o cálculo da sequência de Fibonacci.

46. Considere o seguinte algoritmo de ordenação, conhecido como "ordenação por inserção".

```
Ordena(v, a, b)
----------------
  Se a ≥ b
      Devolva v
  Ordena(v, a, b − 1)
  Insere(v, a, b)
  Devolva v
```

onde

```
Insere(v, a, b)
----------------
  p ← Busca(v[b], v, a, b − 1)
  i ← b
  Enquanto i ≥ p + 1
      Troca(v, i, i − 1)
      i ← i − 1
  Devolva v
```

e

```
Busca(x, v, a, b)
----------------
  Se a > b
      Devolva a − 1

  m ← ⌊(a+b)/2⌋
  Se x < v[m]
      Devolva Busca(x, v, a, m − 1)
  Devolva Busca(x, v, m + 1, b)
```

(a) Fazendo $n = b - a + 1$, prove que o número de comparações na execução de Busca(x, v, a, b) é no máximo $\lfloor \lg n \rfloor + 1$ para todo $n \geq 1$.

(b) Use o resultado do Exercício 27 para estabelecer o número máximo de comparações na execução de Ordena(v, a, b) em função do valor de $n = b - a + 1$.

47. Considere o problema de sortear um elemento de uma lista de tamanho desconhecido, isto é, deseja-se um algoritmo que recebe como entrada uma lista l de $n \geq 1$ itens e devolve como resposta um destes itens escolhido aleatoriamente de maneira que cada item da entrada l tenha

a mesma probabilidade $1/n$ de ser a resposta. A dificuldade é que o tamanho n da lista é desconhecido até que o último item seja lido e a lista não pode ser armazenada em memória.

Prove por indução em n que o seguinte algoritmo resolve este problema.

```
Escolhe(l)
---------------------------------------------------------------
  k ← 0
  Enquanto a entrada l não acabou
      k ← k + 1
      p ← próximo item de l
      r ← um número aleatório uniformemente escolhido em[1..k]
      Se r = k
          e ← p
  Devolva e
```

48. Prove, por indução em $|X|$ que, se X é um conjunto finito e $c \in \mathbb{C}$, então
$$\sum_{x \in X} c = c|X|.$$

49. Prove, por indução em $|X|$ que, se X é um conjunto finito e $c \in \mathbb{C}$, então
$$\prod_{x \in X} c = c^{|X|}.$$

50. Prove, por indução em $|X|$ que, que se $f, g \colon A \to \mathbb{C}$ e $X \subseteq A$ é um conjunto finito, então
$$\sum_{x \in X} (f(x) + g(x)) = \sum_{x \in X} f(x) + \sum_{x \in X} g(x).$$

51. Prove, por indução em $|X|$ que, que se $f \colon A \to \mathbb{C}$ e $X \subseteq A$ é um conjunto finito, e $c \in \mathbb{C}$, então
$$\sum_{x \in X} cf(x) = c \sum_{x \in X} f(x).$$

52. Prove por indução que

$$\sum_{i=0}^{n} i2^i = 2^{n+1}(n-1) + 2,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

53. Use o fato de que se A e B são conjuntos finitos e disjuntos entre si então

$$|A \cup B| = |A| + |B|,$$

para provar, por indução em n que, se $A_1, \ldots, A_n$ são conjuntos finitos dois a dois disjuntos entre si, então,

$$\left| \bigcup_{i=1}^{n} A_i \right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i|$$

54. Prove por indução em n que, dados $x, y \in \mathbb{C}$,

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k},$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Conclua a partir daí que

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

55. Prove por indução em n que, se $0 \leq k \leq n$, então o seguinte algoritmo devolve $\frac{n!}{k!(n-k)!}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

```
B(n, k)
--------------------------
Se k = 0
    Devolva 1
Devolva (n/k) B(n − 1, k − 1)
```

56. Seja $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ satisfazendo

$$f(n) = f(n-1) + 1, \text{ para todo } n \geq 1.$$

Prove, por indução em n, que

$$f(n) = f(0) + n, \text{ para todo } n \geq 0.$$

57. Seja $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ satisfazendo

$$f(n) = f(n-2) + 1, \text{ para todo } n > 1.$$

Prove, por indução em n, que

(a) $f(n) = f(n \bmod 2) + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

(b) $f(n) = (-1)^n c_{10} + c_{20} + c_{21}n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, onde

$$\begin{aligned} c_{10} &= \frac{f(0) - f(1)}{2} + \frac{1}{4}, \\ c_{20} &= \frac{f(0) + f(1)}{2} - \frac{1}{4}, \\ c_{21} &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

(c) $f(n) = f(4 + n \bmod 2) + \left\lceil \frac{k-5}{2} \right\rceil$, para $n \geq 5$.

58. Seja $a \in \mathbb{C}$ e seja $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ satisfazendo

$$f(n) = f(n-1) + a, \text{ para todo } n \geq 1.$$

Prove[6], por indução em n, que

$$f(n) = f(0) + na, \text{ para todo } n \geq 0.$$

59. Sejam $f, s\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ satisfazendo

$$f(n) = f(n-1) + s(n), \text{ para todo } n \geq 1.$$

[6] Observe que este exercício generaliza o Exercício 56.

Prove[7], por indução em n que

$$f(n) = f(0) + \sum_{i=1}^{n} s(i), \text{ para todo } n \geq 0.$$

60. Sejam $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ e $a \in \mathbb{C}$ tais que

$$f(n) = af(n-1), \text{ para todo } n \geq 1.$$

Prove por indução em n que

$$f(n) = a^n f(0), \text{ para todo } n \geq 0.$$

61. Sejam $f, m\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ tais que

$$f(n) = m(n)f(n-1), \text{ para todo } n \geq 1.$$

Prove[8], por indução em n, que

$$f(n) = f(0) \prod_{i=1}^{n} m(i), \text{ para todo } n \geq 0.$$

62. Sejam $f, s, m\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ tais que

$$f(n) = m(n)f(n-1) + s(n), \text{ para todo } n \geq 1.$$

Prove (por indução em n) que[9]

$$f(n) = f(0) \prod_{i=1}^{n} m(i) + \sum_{j=1}^{n} \left(s(j) \prod_{i=j+1}^{n} m(i) \right), \text{ para todo } n \geq 0.$$

63. Sejam $n_0 \in \mathbb{N}$, $h\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ e $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ tais que

$$\begin{aligned} h(n) &< n, \\ f(n) &= f(h(n)) + 1, \end{aligned}$$

[7] Observe que este exercício generaliza o Exercício 58.
[8] Observe que este exercício generaliza o Exercício 60.
[9] Observe que este exercício generaliza o Exercício 61.

para todo $n \geq n_0$,

Prove (por indução) que para todo $n \geq h(n_0)$,

$$f(n) = f(h^u(n)) + u,$$

onde

$$u = \min \left\{ k \in \mathbb{N} \mid h^k(n) < n_0 \right\}.$$

64. Sejam $n_0 \in \mathbb{N}$, $h\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ e $f, s\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ tais que

$$\begin{array}{rcl} h(n) & < & n, \\ f(n) & = & f(h(n)) + s(n), \end{array}$$

para todo $n \geq n_0$.

Prove (por indução) que

$$f(n) = f(h^u(n)) + \sum_{i=0}^{u-1} s(h^i(n)), \text{ para todo } n \geq h(n_0).$$

onde

$$u = \min \left\{ k \in \mathbb{N} \mid h^k(n) < n_0 \right\}.$$

65. Sejam $n_0 \in \mathbb{N}$, $h\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ e $f, m\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ tais que

$$\begin{array}{rcl} h(n) & < & n, \\ f(n) & = & m(n) f(h(n)), \end{array}$$

para todo $n \geq n_0$.

Prove (por indução) que

$$f(n) = f(h^u(n)) \prod_{i=0}^{u-1} m(h^i(n)),$$

onde

$$u = \min \left\{ k \in \mathbb{N} \mid h^k(n) < n_0 \right\}.$$

66. Sejam $n_0 \in \mathbb{N}$, $h\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ e $f, m, s\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ tais que

$$\begin{array}{rcl} h(n) & < & n, \\ f(n) & = & m(n) f(h(n)) + s(n), \end{array}$$

para todo $n \geq n_0$.

Prove (por indução) que

$$f(n) = f(h^u(n)) \prod_{i=0}^{u-1} m(h^i(n)) + \sum_{i=0}^{u-1} s(h^i(n)) \prod_{j=0}^{i-1} m(h^j(n)), \text{ para todo } n \geq n_0,$$

onde

$$u = \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid h^k(n) < n_0\right\}.$$

67. Seja $b\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ a função dada por

$$b(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n = 0, \\ b\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + (n \bmod 2) & \text{se } n > 0. \end{cases}$$

   (a) Prove que o número de dígitos 1 na representação binária de n é $b(n)$, para todo $n \geq 0$.

   (b) Prove que

$$b(n) \leq \lfloor \lg n \rfloor + 1, \text{ para todo } n > 0.$$

68. Uma certa aplicação financeira rende j por cento do capital aplicado por mês. O rendimento é creditado no próprio saldo da aplicação.

    Proponha uma expressão recursiva para a função $C(n)\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ de tal forma que $C(n)$ represente o saldo da aplicação após ao final de n meses, a partir de uma aplicação inicial de valor s.

69. Seja $M(n)\colon \mathbb{N} - \{0\} \to \mathbb{N}$ dada por

$$M(n) := \text{a posição do bit mais significativo na representação binária de } n,$$

    sendo que os bits são contados da direita para a esquerda a partir de 0. Por exemplo, $M(1) = 0$ e $M(10) = 3$.

   (a) Proponha uma expressão recursiva para $M(n)$.

   (b) Prove que a expressão proposta está correta.

70. Proponha uma expressão recursiva para a função $B(n, k)\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ de tal forma que $B(n, k)$ represente o valor do k-ésimo bit na representação binária de n.

    Prove que a expressão proposta está correta.

71. Considere o Algoritmo $\mathsf{Exp}(x, n)$ dado por

```
Exp(x,n)
-----------------------------
  Se n = 0
      Devolva 1
  e ← Exp(x, ⌊n/2⌋)
  e ← e × e
  Se n é par
      Devolva e
  Devolva x × e
```

(a) Execute $\mathsf{Exp}(2, n)$ para $n \in \{0, 1, 2, 5, 11, 15, 16, 20\}$ e, para cada execução, mostre o resultado do algoritmo e o número de multiplicações efetuadas.

(b) Prove por indução em n que $\mathsf{Exp}(x, n) = x^n$ para todo $x \neq 0$ e todo $n \in \mathbb{N}$.

(c) Prove que a execução de $\mathsf{Exp}(x, n)$ efetua $\lfloor \lg(n) \rfloor + b(n) + 1$ multiplicações para todo $x \neq 0$ e todo $n \in \mathbb{N}$, onde b é a função definida no Exercício 67.

(d) Prove que a execução de $\mathsf{Exp}(x, n)$ efetua no máximo $2(\lfloor \lg n \rfloor + 1)$ multiplicações para todo $x > 0$ e todo $n > 0$.

72. Considere o Algoritmo Mínimo(v, a, b) dado por

```
Minimo(v,a,b)
-----------------------------
  Se a = b
      Devolva a
  m ← ⌊(a+b)/2⌋
  m1 ← Mínimo(v, a, m)
  m2 ← Mínimo(v, m + 1, b)
  Se v[m1] ≤ v[m2]
      Devolva m1
  Devolva m2
```

Prove por indução em $b-a$ que, a execução de $\mathsf{Mínimo}(v, a, b)$ faz $b-a$ comparações entre elementos de v sempre que $a \leq b$.

73. Prove, por indução em n, que o seguinte algoritmo devolve $\prod_{i=1}^{n} i$, para todo $n \in \mathbb{N}$

Fatorial(n)
Se $n = 0$ Devolva 1 Devolva $n \times$ *Fatorial*$(n-1)$

74. Prove, por indução em n, que o seguinte algoritmo devolve $3^n - 2^n$, para todo n natural.

A(n)
Se $n \leq 1$ Devolva n Devolva $5 \times$ *A*$(n-1) - 6 \times$ *A*$(n-2)$

75. Considere o seguinte algoritmo

Multiplica(x,n)

Se $n = 0$
    Devolva 0
Se n *é par*
    Devolva *Multiplica*$(x + x, \frac{n}{2})$
Devolva *Multiplica*$(x + x, \frac{n-1}{2}) + x$

(a) Prove, por indução em n, que Multiplica(x, n) devolve o valor de nx para todo $x \in \mathbb{C}$ e todo $n \in \mathbb{N}$.

(b) Enuncie e prove um teorema estabelecendo um limite superior (em função de n) para o número de somas efetuadas por Multiplica(x, n)[10].

76. Combine as informações dos Exercícios 42, 45, 71 e 67 para propor um algoritmo para o cálculo de $F(n)$.

Seja $s(n)$ o número de somas efetuadas pelo seu algoritmo para calcular $F(n)$.

(a) Expresse $s(n)$ por meio de uma recorrência.

(b) Resolva esta recorrência.

[10] **Sugestão:** compare este exercício com o Exercício 71.

77. Sejam $f^-, f, f^+ \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ funções não-decrescentes satisfazendo, para todo $n \geq 2$,

$$\begin{aligned} f^-(n) &= f^-(n-2) + f^-(n-2), \\ f(n) &= f(n-1) + f(n-2), \\ f^+(n) &= f^+(n-1) + f^+(n-1), \end{aligned}$$

e ainda

$$\begin{aligned} f^-(0) \leq f(0) \leq f^+(0), &\text{ e} \\ f^-(1) \leq f(1) \leq f^+(1). \end{aligned}$$

Prove por indução em n que

$$f^-(n) \leq f(n) \leq f^+(n), \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

78. Sejam $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $s, m \in \mathbb{R}$ tais que

$$f(x) = s + mx, \text{ para todo } x \in \mathbb{R},$$

Prove que

$$f^n(x) = \begin{cases} x + sn, & \text{se } m = 1, \\ m^n x + s\frac{m^n-1}{m-1}, & \text{se } m \neq 1, \end{cases}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$ e todo $n \in \mathbb{N}$.

79. Prove que

$$f^n(x) = \left\lfloor \frac{x}{k^n} \right\rfloor, \text{ para todo } n > 0,$$

onde $k \neq 0$ e $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dada por

$$f(x) = \left\lfloor \frac{x}{k} \right\rfloor.$$

80. Para cada função $h \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ abaixo, dê uma expressão para a função h^n, onde $n \in \mathbb{N}$.

    (a) $h(x) = x - 2$,

    (b) $h(x) = x - s$, com $s \in \mathbb{R}$,

    (c) $h(x) = 3x$

(d) $h(x) = mx$, com $m \in \mathbb{R}$,

(e) $h(x) = x/2$,

(f) $h(x) = \lceil x/k \rceil$, com $k \in \mathbb{Z}^+$,

(g) $h(x) = \lfloor \sqrt[k]{x} \rfloor$, com $k \in \mathbb{N}$,

6 Recorrências

81. Uma função $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ é uma *progressão aritmética* se existe $r \in \mathbb{C}$ tal que

$$f(i+1) - f(i) = r \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

   (a) Expresse a função f como acima por meio de uma recorrência.

   (b) Resolva esta recorrência, obtendo assim uma expressão para o termo geral da progressão aritmética.

82. Resolva as seguintes recorrências.

   (a) $f(n) = 2f\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + 6n - 1, \text{ para todo } n > 1,$

   (b) $f(n) = 2f\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + 3n + 2, \text{ para todo } n > 1,$

   (c) $f(n) = 6f\left(\left\lfloor \frac{n}{6} \right\rfloor\right) + 2n + 3, \text{ para todo } n > 1,$

   (d) $f(n) = 6f\left(\left\lfloor \frac{n}{6} \right\rfloor\right) + 3n - 1, \text{ para todo } n > 1,$

   (e) $f(n) = 4f\left(\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor\right) + 2n - 1, \text{ para todo } n > 1,$

   (f) $f(n) = 4f\left(\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor\right) + 3n - 5, \text{ para todo } n > 1,$

   (g) $f(n) = 3f\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + n^2 - n, \text{ para todo } n > 1,$

   (h) $f(n) = 3f\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + n^2 - 2n + 1, \text{ para todo } n > 1,$

   (i) $f(n) = 3f\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + n - 2, \text{ para todo } n > 1,$

   (j) $f(n) = 3f\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + 5n - 7, \text{ para todo } n > 1,$

   (k) $f(n) = 4f\left(\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor\right) + n^2, \text{ para todo } n > 1,$

   (l) $f(n) = 4f\left(\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor\right) + n^2 - 7n + 5, \text{ para todo } n > 1,$

   (m) $f(n) = 4f\left(\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor\right) + \left\lfloor \sqrt{n} \right\rfloor + 1, \text{ para todo } n > 3,$

   (n) $f(n) = nf(n-1) + n, \text{ para todo } n > 1.$

83. Resolva as seguintes recorrências.

(a) $f(n) = f(n-1) + n,$ para todo $n > 0.$
(b) $f(n) = 2f(n-1) + 1,$ para todo $n > 0$
(c) $f(n) = 2f(n-1) + n^2,$ para todo $n \geq 1$
(d) $f(n) = 2f(n-1) + n,$ para todo $n > 1,$
(e) $f(n) = 3f(n-1) + 2,$ para todo $n > 1,$
(f) $f(n) = 3f(n-1) - 15,$ para todo $n > 1,$
(g) $f(n) = f(n-1) + n - 1,$ para todo $n > 1,$
(h) $f(n) = f(n-1) + 2n - 3,$ para todo $n > 1,$
(i) $f(n) = 2f(n-1) + n - 1,$ para todo $n > 1,$
(j) $f(n) = 2f(n-1) + 3n + 1,$ para todo $n > 1,$
(k) $f(n) = 2f(n-1) + n^2,$ para todo $n > 1,$
(l) $f(n) = f(n-2) + 3n + 4,$ para todo $n > 1,$
(m) $f(n) = f(n-2) + n,$ para todo $n > 1,$
(n) $f(n) = f(n-3) + 5n - 9,$ para todo $n > 3,$
(o) $f(n) = 2f(n-1) + n^2 - 2n + 1,$ para todo $n > 1,$
(p) $f(n) = 3f(n-1) + n,$ para todo $n \geq 1.$

84. Seja $f(n)$ o número de sequências binárias de comprimento n.

(a) Descreva $f(n)$ como uma recorrência.
(b) Resolva esta recorrência.

85. Dado $r \in \mathbb{C}$, uma *progressão geométrica* de razão r é uma função $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ satisfazendo

$$\frac{f(n)}{f(n-1)} = r, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

(a) Expresse a função f acima por meio de uma recorrência.
(b) Resolva esta recorrência.

86. Resolva as seguintes recorrências

(a) $f(n) = 2f(n-1),$ para todo $n \geq 2.$

(b) $f(n) = 2f(n-2), \text{ para todo } n \geq 2.$

87. O número de comparações no pior caso de uma execução do algoritmo MergeSort para um vetor de n elementos é dado pela recorrência

$$T(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n < 2, \\ T\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + T\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right) + n - 1, & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

Considere as seguintes recorrências.

$$T^-(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n < 2, \\ 2T^-\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + n - 1, & \text{se } n \geq 2. \end{cases} \tag{2}$$

e

$$T^+(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n < 2, \\ 2T^+\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right) + n - 1, & \text{se } n \geq 2. \end{cases} \tag{3}$$

(a) Prove que $T^-(n) \leq T(n) \leq T^+(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

(b) Resolva as recorrências.

(c) Use as soluções obtidas para provar que $T^-(n) \approx n \lg n$ e $T^+(n) \approx n \lg n$.

(d) Conclua que $T(n) \approx n \lg n$.

88. O "Master Method" ou "Master Theorem"[11] é um método para obtenção de soluções assintóticas para recorrências que surgem naturalmente na análise de "algoritmos de divisão e conquista".

Tais recorrências tem a forma geral

$$T(n) = aT(n/b) + f(n),$$

onde $a \geq 1$ e $b \geq 1$, a expressão n/b pode significar tanto $\lfloor n/b \rfloor$ como $\lceil n/b \rceil$ e $f()$ é uma função genérica. A recorrência do Exercício 87 é um exemplo de caso particular desta recorrência.

Sejam a, b e $f()$ como acima e sejam $n_0 \in \mathbb{N}$ e $T^+, T^- : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ tais que

$$\begin{aligned} T^-(n) &= aT^-\left(\lfloor n/b \rfloor\right) + f(n), \\ T^+(n) &= aT^+\left(\lceil n/b \rceil\right) + f(n), \end{aligned}$$

para todo $n \geq n_0$.

Resolva estas recorrências.

[11] Popularizado com este nome por Cormen, Leiserson, Rivest, and Stein (2009).

89. Resolva as seguintes recorrências.

(a) $f(n) = nf(n-1) + n, \text{ para todo } n > 1,$

(b) $f(n) = f\left(\lfloor\sqrt{n}\rfloor\right) + n^2, \text{ para todo } n > 1,$

(c) $f(n) = 2f\left(\lfloor\sqrt[3]{n}\rfloor\right) + n, \text{ para todo } n > 1.$

90. Seja $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ o conjunto das funções $\mathbb{N} \to \mathbb{C}$. Dados $f, g \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ e $z \in \mathbb{C}$, definimos $f + g \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ e $zf \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ como as funções dadas por

$$\begin{aligned} (f+g)(n) &= f(n) + g(n), \\ (zf)(n) &= zf(n). \end{aligned}$$

(a) Prove que $(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}, +)$ é um grupo comutativo.

(b) Prove que $(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}, +)$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$.

91. Sejam $r_1, r_2 \in \mathbb{C} - \{0\}$. Prove que as funções $f_1, f_2 \colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ dadas por

$$\begin{aligned} f_1(n) &= r_1^n, \\ f_2(n) &= r_2^n, \end{aligned}$$

são linearmente independentes em $(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}, +)$ se e somente se $r_1 \neq r_2$.

92. Sejam[12] $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{C}$.

(a) Prove que se $g, h \colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ satisfazem a recorrência

$$f(n) = a_1 f(n-1) + a_2 f(n-2) + \ldots + a_k f(n-k), \text{ para todo } n \geq k,$$

então a função $g + h$ também satisfaz a mesma recorrência para todo $n \geq k$.

(b) Prove que se $f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ satisfaz a recorrência

$$f(n) = a_1 f(n-1) + a_2 f(n-2) + \ldots + a_k f(n-k), \text{ para todo } n \geq k,$$

então para todo $z \in \mathbb{C}$, a função zf também satisfaz a mesma recorrência para todo $n \geq k$.

[12]Este exercício usa a notação do Exercício 90

(c) Prove que o conjunto das funções $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ que satisfazem a recorrência

$$f(n) = a_1 f(n-1) + a_2 f(n-2) + \ldots + a_k f(n-k), \text{ para todo } n \geq k,$$

é um subespaço vetorial de $(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}, +)$.

93. Resolva as seguintes recorrências.

(a)

$$f(n) = \begin{cases} 3, & \text{se } n \leq 1, \\ 7, & \text{se } n = 2, \\ 3f(n-1) - f(n-2) + 3f(n-3), & \text{se } n \geq 3. \end{cases}$$

(b)

$$f(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n \leq 1, \\ 5f(n-1) - 6f(n-2), & \text{se } n > 1. \end{cases}$$

(c)

$$f(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n \leq 1, \\ 4f(n-1) + 3f(n-2), & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

(d)

$$f(n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 0, \\ 2, & \text{se } n = 1, \\ 2f(n-1) + 4f(n-2), & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

(e)

$$f(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n \leq 1, \\ 2f(n-1) - f(n-2), & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

(f)

$$f(n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n \leq 1, \\ 2f(n-1) - f(n-2), & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

(g)

$$f(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n \leq 1, \\ f(n-1) - f(n-2), & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

(h)

$$2f(n) = 3f(n-1) - 3f(n-2) + f(n-3), \text{ para todo } n \geq 3,$$

com

$$f(n) = n, \text{ para todo } n < 3.$$

94. Resolva as seguintes recorrências.

(a)

$$f(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n \leq 1, \\ nf(n-1) + n(n-1)f(n-2), & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

[13]

(b)

$$f(n) = \begin{cases} n+1, & \text{se } n \leq 1, \\ \sqrt{f(n-1)f(n-2)}, & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

[14]

(c)

$$f(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n = 0, \\ \sqrt{1 + f(n-1)^2}, & \text{se } n \geq 1. \end{cases}$$

[15]

(d)

$$f(n) = \begin{cases} n+1, & \text{se } n \leq 1, \\ f(n-1)f(n-2), & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

[13]**Sugestão:** Considere a função

$$g(n) = \frac{f(n)}{n!}.$$

[14]**Sugestão:** Considere a função

$$g(n) = \lg f(n).$$

[15]**Sugestão:** Considere a função

$$g(n) = f(n)^2.$$

[16]

95. Resolva as seguintes recorrências.

(a)

$$f(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n = 0, \\ f(n-1) + 1, & \text{se } n > 0. \end{cases}$$

(b)

$$f(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n = 0, \\ 2f(n-1) + 1, & \text{se } n > 0. \end{cases}$$

(c)

$$f(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n = 0, \\ f(n-1) + n, & \text{se } n > 0 \end{cases}$$

(d)

$$f(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n < 1, \\ 2f(n-1) + n, & \text{se } n \geq 1. \end{cases}$$

(e)

$$f(n) = 2f(n-1) + n^2, \text{ para todo } n \geq 1$$

(f)

$$f(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n < 2, \\ f(n-1) + f(n-2) + 1, & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

(g)

$$f(n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n \leq 1, \\ 3f(n-2) + \frac{1}{3^n}, & \text{se } n > 1. \end{cases}$$

(h)

$$f(n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n \leq 1, \\ 2f(n-2) + \frac{1}{2^n}, & \text{se } n > 1. \end{cases}$$

[16]**Sugestão:** Considere a função

$$g(n) = \lg f(n).$$

96. Em muitas situações de cálculo numérico trabalha-se com matrizes triangulares inferiores, isto é, matrizes quadradas cujos elementos acima da diagonal principal são todos nulos. Nesses casos é comum representar uma matriz triangular inferior de n linhas por um vetor contendo somente as posições não-nulas da matriz, o que resulta numa economia de espaço de quase 50%.

    Suponha que a matriz triangular inferior M, de n linhas indexadas de 1 a n, será representada por um vetor $v[0..N(n)-1]$, onde $N(n)$ é o tamanho do vetor necessário para representar uma matriz triangular inferior de n linhas.

    (a) Descreva $N(n)$ através de uma recorrência.
    (b) Resolva esta recorrência.
    (c) Qual o índice de v que corresponde à posição $M[i,j]$?

97. O **"Triângulo de Cantor"**, (batizado em homenagem ao Georg Cantor), é uma "tabela infinita" triangular em que cada par $(i,j) \in \mathbb{N}^2$ ocupa uma posição de maneira que, para todo $n \in \mathbb{N}$, a n-ésima linha do triângulo é formada por todos os pares $(i,j) \in \mathbb{N}^2$ satisfazendo $i + j = n$.

    As linhas, colunas e posições começam a contar a partir de 0, de cima para baixo e da esquerda para direita. Assim, por exemplo, $(0,0)$ ocupa a posição 0 (linha 0, coluna 0); $(0,1)$ ocupa a posição 1 (linha 1, coluna 0); $(1,0)$ ocupa a posição 2 (linha 1, coluna 1); $(0,2)$ ocupa a posição 3 (linha 2, coluna 0) e assim por diante. As 7 primeiras linhas do Triângulo de Cantor são

$$\begin{array}{lllllll}
(0,0) & & & & & & \\
(0,1) & (1,0) & & & & & \\
(0,2) & (1,1) & (2,0) & & & & \\
(0,3) & (1,2) & (2,1) & (3,0) & & & \\
(0,4) & (1,3) & (2,2) & (3,1) & (4,0) & & \\
(0,5) & (1,4) & (2,3) & (3,2) & (4,1) & (5,0) & \\
(0,6) & (1,5) & (2,4) & (3,3) & (4,2) & (5,1) & (6,0)
\end{array}$$

    (a) Seja $l(n)$ o número de pares na n-ésima linha do Triângulo de Cantor
        i. Descreva $l(n)$ como uma recorrência.
        ii. Resolva essa recorrência.

(b) Seja $t(n)$ o número de pares no Triângulo de Cantor até a n-ésima

   i. Descreva $t(n)$ como uma recorrência.

   ii. Resolva essa recorrência.

(c) Seja $p(i, j)$ a posição ocupada pelo par (i, j) no Triângulo de Cantor. Dê uma expressão não recorrente para $p(i, j)$.

98. O seguinte algoritmo devolve o n-ésimo termo da sequência de Fibonacci.

```
F(n)
-----------------------------
 Se n ≤ 1
    Devolva n
 Devolva F(n − 1) + F(n − 2)
```

Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $S(n)$ o número de somas efetuado na execução de $\mathsf{F}(n)$.

(a) Expresse $S(n)$ por uma recorrência.

(b) Resolva essa recorrência.

99. Para todo $n \geq 0$, um n-cubo é um diagrama composto por pontos e linhas que ligam pares de pontos entre si. O 0-cubo tem um ponto e nenhuma linha. Para todo $n > 0$, o n-cubo é o diagrama obtido desenhando-se lado a lado duas cópias do $(n-1)$-cubo e ligando cada ponto de uma das cópias ao seu correspondente na outra cópia por uma linha.

(a) Descreva o número de pontos de um n-cubo através de uma recorrência.

(b) Resolva esta recorrência.

(c) Descreva o número de linhas de um n-cubo através de uma recorrência.

(d) Resolva esta recorrência.

100. Dê uma expressão livre de somatórios para $\sum_{i=0}^{n} i$.

101. Dado $q \in \mathbb{C} - \{0\}$, uma *progressão geométrica*[17] de razão q é uma função $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ satisfazendo

$$\frac{f(n+1)}{f(n)} = q, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Assim, a soma dos n termos iniciais de uma progressão geométrica é dada por

$$s(n) = \sum_{i=0}^{n-1} f(i).$$

(a) Expresse a função f acima por meio de uma recorrência linear homogênea.

(b) Resolva esta recorrência, obtendo assim uma expressão para o termo geral da progressão geométrica.

(c) Dê uma expressão livre de somatórios para $s(n)$.

102. Uma função $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ é uma *progressão aritmética*[18] se existe $r \in \mathbb{C}$ tal que

$$f(i+1) - f(i) = r \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Assim, a soma dos n termos iniciais de uma progressão aritmética é dada por

$$s(n) = \sum_{i=0}^{n-1} f(i).$$

(a) Expresse a função f acima por meio de uma recorrência linear não homogênea.

(b) Resolva esta recorrência, obtendo assim uma expressão para o termo geral da progressão aritmética.

(c) Dê uma expressão livre de somatórios para $s(n)$.

103. Dê uma expressão[19] livre de somatórios para $\sum_{i=0}^{n} i2^i$.

104. Calcule o valor dos seguintes somatórios.

[17] cfr. Exercício 85

[18] cfr. Exercício 81

[19] cfr. Exercício 52

(a)

$$\sum_{i=0}^{n} i^2.$$

(b)

$$\sum_{i=0}^{n} i^3.$$

(c)

$$\sum_{i=0}^{n} i(i-1).$$

(d)

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{i}{2^i}.$$

(e)

$$\sum_{i=0}^{n} i^2 3^i.$$

(f)

$$\sum_{i=0}^{n} i256^i.$$

105. A *média*[20] do número de comparações efetuadas na execução do algoritmo de busca binária em um vetor de n posições é dada por[21]

$$\begin{aligned}\mu(n) = 1 \times \frac{1}{n} + 2 \times \frac{2}{n} + 3 \times \frac{4}{n} + 4 \times \frac{8}{n} + \dots \\ + \lfloor \lg n \rfloor \times \frac{2^{\lfloor \lg n \rfloor - 1}}{n} \\ + (\lfloor \lg n \rfloor + 1) \times \frac{(n - \sum_{i=1}^{\lfloor \lg n \rfloor} 2^{i-1})}{n}\end{aligned}$$

(a) Dê uma expressão livre de somatórios[22] para $\mu(n)$.

(b) Conclua do item anterior que $\mu(n) \approx \lfloor \lg n \rfloor$.

[20]Também chamada *número esperado* ou *esperança*.

[21]Assume-se aqui que a busca por qualquer dos n elementos do vetor é equiprovável e bem-sucedida.

[22]**Sugestão:** use os resultados dos Exercícios 37 e 52

106. Dê uma expressão livre de somatórios para

$$s(n) = \sum_{i=0}^{n} F(i),$$

onde $F(n)$ é a sequência de Fibonacci[23].

107. Uma *árvore binária* T é uma *árvore vazia*, denotada por λ ou é um par $(E(T), D(T))$ onde $E(T)$ e $D(T)$ são árvores binárias, chamadas respectivamente de *subárvore esquerda* e *subárvore direita* de T. Vamos denotar por $\mathcal{B}$ o conjunto das árvores binárias.

O *tamanho* de uma árvore T é dada por

$$|T| = \begin{cases} 0, & \textsf{se } T = \lambda, \\ |E(T)| + |D(T)| + 1, & \text{caso contrário .} \end{cases}$$

Uma *árvore trivial* é uma árvore de tamanho 1.

A *altura* de uma árvore T é dada por

$$h(T) = \begin{cases} 0, & \textsf{se } T = \lambda, \\ \max\{h(E(T)), h(D(T))\} + 1, & \textsf{se } T \neq \lambda. \end{cases}$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $h^+(n)$ a maior altura possível de uma árvore binária de tamanho n.

(a) Expresse $h^+(n)$ como uma recorrência.

(b) Resolva esta recorrência.

108. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $t^+(n)$ o maior tamanho possível de uma árvore binária[24] de altura n.

(a) Expresse $t^+(n)$ como uma recorrência.

(b) Resolva esta recorrência.

[23] Veja o Exercício 42.
[24] Veja o Exercício 107.

109. Seja AVL o conjunto das árvores binárias[25] T satisfazendo

$$E(T) \in \mathsf{AVL} \text{ e } D(T) \in \mathsf{AVL}.$$

e

$$|h(E(T)) - h(D(T))| \leq 1.$$

Seja $t^{-}(n)$ o menor tamanho possível de uma árvore AVL de altura n.

(a) Expresse $t^{-}(n)$ como uma recorrência.

(b) Resolva esta recorrência.

110. Resolva a seguinte recorrência que expressa o número médio de comparações na execução do algoritmo $\mathsf{QuickSort}$.

$$C(n) = \begin{cases} 0, & \mathsf{se}\ n < 2, \\ \frac{(n+1)}{n} C(n-1) + \frac{2(n-1)}{n}, & \mathsf{se}\ n \geq 2. \end{cases}$$

[25] Veja o Exercício 107.

7 Fundamentos de Contagem

111. Em se tratando de contagem, é interessante ter uma noção intuitiva de grandezas e das relações entre elas. No contexto das ciências exatas em geral, é usual expressar grandezas como potências de 10. No contexto da Ciência da Computação, entretanto, é mais natural expressar grandezas como potências de 2. Nas questões abaixo, n representa uma quantidade e o exercício consiste em determinar os valores de k e d para os quais

$$10^d \leq n < 10^{d+1},$$

$$2^k \leq n < 2^{k+1}.$$

(a) Tempo, em segundos[26]:

i. $n =$ uma hora.
ii. $n =$ um dia.
iii. $n =$ uma semana.
iv. $n =$ um mês.
v. $n =$ um ano.
vi. $n =$ sua idade.
vii. $n =$ tempo decorrido desde as 00h00:00 de 1 de janeiro de 1970[27].
viii. $n =$ um século.
ix. $n =$ um milênio.
x. $n =$ um milhão de anos.
xi. $n =$ idade estimada da Terra[28].
xii. $n =$ idade estimada da Via Láctea[29].
xiii. $n =$ idade estimada do universo observável[30].

(b) Distância, em metros[31]:

i. $n =$ maior distância possível entre dois pontos na superfície da Terra[32].

[26] veja http://en.wikipedia.org/wiki/Second
[27] veja http://en.wikipedia.org/wiki/Date_(Unix)
[28] veja http://en.wikipedia.org/wiki/Earth_Age
[29] veja http://en.wikipedia.org/wiki/Milky_Way
[30] veja http://en.wikipedia.org/wiki/Age_of_the_Universe
[31] veja http://en.wikipedia.org/wiki/Metre
[32] veja http://en.wikipedia.org/wiki/Earth

ii. $n =$ distância da Terra ao Sol[33].

iii. $n =$ um ano-luz.

iv. $n =$ diâmetro estimado da Via Láctea[34].

(c) Velocidade, em metros por segundo:

i. $n =$ de um homem.

ii. $n =$ de um animal.

iii. $n =$ de um veículo terrestre.

iv. $n =$ de um veículo aquático.

v. $n =$ de um veículo aéreo.

vi. $n =$ da Terra em relação ao Sol[35].

vii. $n =$ da luz[36].

(d) Massa, em gramas:

i. $n =$ de um homem.

ii. $n =$ de um carro.

iii. $n =$ de um elefante adulto[37].

iv. $n =$ de um Boeing-737.

v. $n =$ água na Terra[38].

vi. $n =$ da Terra[39].

vii. $n =$ do Sol[40].

viii. $n =$ da Via Láctea[41].

ix. $n =$ da Lua[42].

x. $n =$ do universo observável[43].

(e) Volume, em litros:

i. $n =$ de um homem.

ii. $n =$ de um carro.

---

[33] veja http://en.wikipedia.org/wiki/Earth
[34] veja http://en.wikipedia.org/wiki/Milky_Way
[35] veja http://en.wikipedia.org/wiki/Earth
[36] veja http://en.wikipedia.org/wiki/Earth
[37] veja http://en.wikipedia.org/wiki/Elephant
[38] veja http://en.wikipedia.org/wiki/Hydrosphere
[39] veja http://en.wikipedia.org/wiki/Earth
[40] veja http://en.wikipedia.org/wiki/Sun
[41] veja http://en.wikipedia.org/wiki/Milky_Way
[42] veja http://en.wikipedia.org/wiki/Moon
[43] veja http://en.wikipedia.org/wiki/Mass_of_the_observable_universe

iii. $n =$ da água oceânica na Terra[44].
iv. $n =$ da Terra[45].
v. $n =$ da Lua[46].
vi. $n =$ do Sol[47].
vii. $n =$ do universo observável[48].

(f) Outras quantidades:

i. $n =$ população de Curitiba.
ii. $n =$ população do Paraná.
iii. $n =$ população do Brasil.
iv. $n =$ população da Terra.
v. $n =$ número de estrelas no universo observável[49].
vi. $n =$ número estimado de átomos no universo observável[50].
vii. $n =$ produto interno bruto brasileiro em reais.
viii. $n =$ dívida interna brasileira em reais.
ix. $n =$ número de células nervosas no corpo humano.

112. Prove que a composição de funções bijetoras é uma bijeção.

[44] veja http://en.wikipedia.org/wiki/Ocean
[45] veja http://en.wikipedia.org/wiki/Earth
[46] veja http://en.wikipedia.org/wiki/Moon
[47] veja http://en.wikipedia.org/wiki/Sun
[48] veja http://en.wikipedia.org/wiki/Observable_universe
[49] veja http://en.wikipedia.org/wiki/Observable_universe
[50] veja http://en.wikipedia.org/wiki/Observable_universe

8 União e Produto Cartesiano

113. Sabendo que se A e B são conjuntos finitos, então

$$|A \times B| = |A||B|,$$

prove por indução em n que se $A_1, \ldots, A_n$ são conjuntos finitos então,

$$\left|\prod_{i=1}^{n} A_i\right| = \prod_{i=1}^{n} |A_i|$$

114. Quantos divisores naturais tem o número 72?

115. Quantos divisores naturais tem o número 360?

116. Prove que o número de divisores naturais de um inteiro $n \in \mathbb{N}$ é

$$\prod_{i=1}^{k} (m_i + 1),$$

onde

$$\prod_{i=1}^{k} p_i^{m_i},$$

é a decomposição de n em fatores primos.

9 Sequências

117. Um "bit" é um elemento de $\{0, 1\}$.

     Se um "byte" é uma sequência de 8 "bits", quantos valores diferentes pode assumir um "byte"?

118. Um teclado convencional tem 47 "teclas que geram caracteres". Cada tecla pode gerar dois caracteres, conforme combinada ou não com a tecla "shift". Chamaremos de *caracteres convencionais* os caracteres que podem ser gerados desta maneira.

     Uma *senha convencional* é uma sequência de caracteres convencionais.

     Considere um sistema de quebra de senhas à base de "força bruta", isto é, que tenta todas as senhas possíveis, e suponha que o sistema é capaz de testar 1 (uma) senha por segundo.

     (a) Qual o menor tamanho n que deve ter uma senha convencional para garantir que tal sistema não seja capaz de testar todas as senhas possíveis em um dia?
     (b) Se o sistema atacante for um milhão de vezes mais rápido, para quanto mudará este valor?

119. Qual o maior valor de n tal que é possível gravar em um dvd (4 700 372 992 bytes) todos os possíveis arquivos de tamanho até n?

120. Quantos resultados possíveis existem para uma sequência de

     (a) n lançamentos consecutivos de uma moeda?
     (b) até n lançamentos consecutivos de uma moeda?

121. Quantos resultados possíveis existem para uma sequência de

     (a) n lançamentos consecutivos de um dado?
     (b) até n lançamentos consecutivos de um dado?

122. O Dicionário Houaiss da Língua Portuguesa registra 228 500 verbetes utilizando o alfabeto de 26 letras. O mais longo deles tem 46 letras.

Supondo que todas as palavras de até 46 letras sejam equiprováveis, qual a probabilidade de uma palavra de até 46 letras escolhida uniformemente ao acaso estar registrada no Houaiss?

123. Um *palíndromo* sobre um conjunto A é uma sequência $(a_1, \ldots, a_k)$ de elementos de A que "permanece a mesma quando lida na ordem reversa", isto é, que satisfaz

$$a_i = a_{k-i+1}, \text{ para todo } 1 \leq i \leq k.$$

(a) Enumere todos os palíndromos de tamanho 4 sobre $\{a, b, c\}$.

(b) Enumere todos os palíndromos de tamanho 5 sobre $\{a, b, c\}$.

(c) Qual o número de palíndromos de tamanho k sobre um conjunto de n elementos?

124. Um protocolo de comunicação usa três tipos de pacotes de dados, T_1, T_2 e T_3, diferenciados por um campo inicial. Os pacotes do tipo T_1 tem, 4 bits de dados após o campo inicial (identificação do tipo); os pacotes do tipo T_2 tem 8 bits de dados; e os pacotes do tipo T_3 tem 10 bits de dados. Qual o número de pacotes distintos que existem neste protocolo?

125. O endereço de um dispositivo na InterNet (endereço IP) é um número de 4 *bytes*.

(a) Qual o número de endereços IP possíveis?

(b) Dos endereços possíveis, as seguintes faixas de endereços são reservadas para redes locais:

- 10.0.0.0 a 10.255.255.255
- 172.16.0.0 a 172.31.255.255
- 192.168.0.0 a 192.168.255.255
- 169.254.0.0 a 169.254.255.255

Qual o número de endereços IP não-reservados na rede?

126. Interfaces de rede recebem uma identificação do fabricante conhecida como *endereço MAC* que é um número de 48 bits[51]. Se a inclusão digital for um sucesso absoluto, quantas intefaces de rede poderiam ser dadas a cada habitante do planeta?

127. Em um jantar foram servidos 2 tipos de entrada (pães com patês e salada), 3 tipos de massa (espaguete, talharim e nhoque), 4 tipos de molho (bolonhesa, pesto, branco e funghi), e 2 tipos de sobremesa (sorvete e salada de frutas). Sabendo que nenhum convidado escolheu a mesma combinação, e que todos que escolheram a salada não escolheram nhoque, qual o número máximo de convidados?

128. Uma *data* é uma sequência de 8 dígitos da forma $d_1 d_2 m_1 m_2 a_1 a_2 a_3 a_4$, onde $d_1 d_2$, $m_1 m_2$ e $a_1 a_2 a_3 a_4$ são dígitos representando o dia, mês e ano, respectivamente. Por exemplo, 25122012 e 14071889 são datas e 31022013 e 48151623 não são.

    (a) Desconsiderando os anos bissextos, quantas das sequências de 8 dígitos são datas válidas?

    (b) Qual a probabilidade de uma sequência de 8 dígitos escolhida uniformemente ao acaso ser uma data?

    (c) Se um gerador aleatório gera uma sequência de 8 dígitos a cada segundo (independente e uniformemente), qual é a probabilidade de não ter gerado nenhuma data ao final de um minuto?

129. A licença de um veículo no Brasil é uma cadeia composta por 3 letras seguida de 4 dígitos. Quantos veículos licenciados pode haver simultaneamente no Brasil? Compare com a resposta do exercício 111(f)iii.

130. Os números de telefone no Brasil podem ser números de 8 dígitos, sendo que o primeiro não pode ser 0 ou de 9 dígitos, sendo o primeiro necessariamente um 9.

    (a) Quantos números de telefone são possíveis no Brasil?

    (b) Existem mais números de telefone ou licenças de veículo[52] possíveis?

[51] Atualmente é um número de 64 bits, o que já é usado por tecnologias como *FireWire*, *IPv6*, *802.15.4*).

[52] Veja o Exercício 129

131. Um certo monitor de computador tem resolução de 640 por 480 *pixels* com resolução de cor de 32 bits (também conhecido como "truecolor", isto é, cada *pixel* pode assumir 2^{32} cores diferentes). Sua frequência de varredura (isto é, a frequência com que a imagem exibida pode ser modificada) é de 60 Hz. Quanto tempo, no mínimo, levaria o monitor[53] para exibir todas as imagens possíveis?

[53] Estes parâmetros são mais ou menos os mesmos em se tratando de um televisor convencional.

10 Funções

132. De quantas maneiras diferentes é possível distribuir k bolas distintas por n urnas distintas?

133. Quantos circuitos combinacionais funcionalmente diferentes com e entradas e s saídas são possíveis?

134. De quantas maneiras diferentes podem acontecer os aniversários de um grupo de n pessoas?

135. Deduza que existem n^k funções $[k] \to [n]$ através dos seguintes passos.

    (a) Defina $f(k, n) :=$ número de funções $[k] \to [n]$.
    (b) Observe que cada função $f\colon [k] \to [n]$ corresponde a um par (x, g) onde $x \in [n]$ corresponde à imagem de k por f e $g\colon [k-1] \to [n]$ corresponde às imagens de $1, \ldots k-1$ por f.
    (c) Use esta observação para descrever $f(k, n)$ por meio de uma recorrência.
    (d) Resolva esta recorrência.

136. As letras do código MORSE são formadas por uma sequência de traços (–) e pontos (.), sendo permitidas repetições. Observe alguns exemplos utilizando quantidades distintas de símbolos:

    - 3 símbolos: (– , . , –)
    - 4 símbolos: (. , . , – , .)
    - 5 símbolos: (– , – , . , – , .)

    Nessas condições, determine quantas letras poderiam ser representadas utilizando-se, no máximo, 8 símbolos?

137. (VUNESP-04) Um certo tipo de código usa apenas dois símbolos, o número zero (0) e o número (1) e, considerando esses símbolos como letras, podem-se formar palavras. Por exemplo: 0, 01, 00, 001 e 110 são algumas palavras de uma, duas e três letras desse código. O número máximo de palavras com cinco letras ou menos, que podem ser formadas com esse código é:

10.1 Funções Injetoras (Arranjos)

138. (VITA-SP) Considere os números de dois a seis algarismos distintos formados utilizando-se apenas 1, 2, 4, 5, 7 e 8. Quantos desses números são ímpares e começam com um dígito par?

139. (VUDESC) O número de anagramas de quatro letras, começando com a letra **G** que pode ser formado com a palavra PORTUGAL é:

140. (VUFPR) Dentre todos os números de quatro algarismos distintos formados com algarismo pertencentes ao conjunto {3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}, quantos são divisíveis por 2?

141. (UFCE) Qual é a quantidade de números inteiros formados por três algarismos distintos, escolhidos dentre 1, 3, 5, 7 e 9 e que são maiores que 200 e menores que 800.

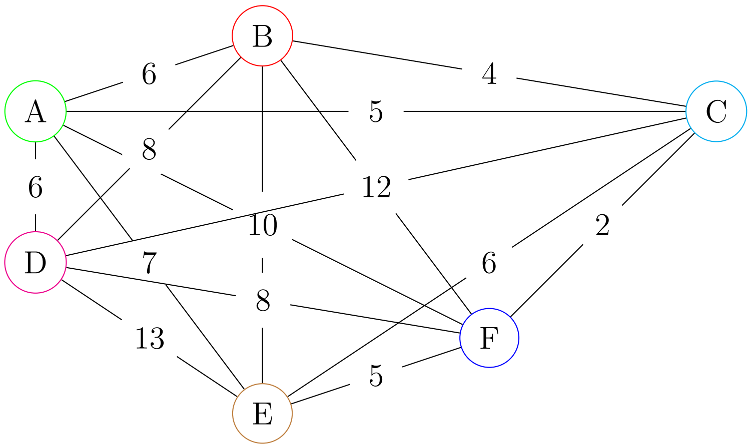
10.2 Funções Bijetoras (Permutações)

142. Colocando todos os números obtidos pelas permutações dos dígitos de $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ em ordem crescente, qual o lugar ocupado pelo número $43\,521$?

143. Um clube resolve fazer uma Semana de Cinema. Para isso, os organizadores escolhem sete filmes, que serão exibidos um por dia. Porém, ao elaborar a programação, eles decidem que três desses filmes, que são de ficção científica, devem ser exibidos em dias consecutivos. Qual o número de maneiras diferentes que se pode fazer a programação.

144. Sobre uma mesa estão dispostos livros distintos, sendo 4 de algoritmos, 2 de arquitetura e 5 de cálculo. Todos esses livros são empilhados sobre a mesa de tal forma que aqueles que tratam do mesmo assunto estejam juntos. Considerando-se a sequência de livros que é formada em cada pilha, o número exato de maneiras com que isso pode ser realizado é igual a:

145. (ENEM) João mora na cidade **A** e precisa visitar cinco clientes, localizados em cidades diferentes da sua, conforme ilustra a figura abaixo. Cada trajeto possível pode ser representado por uma sequência de 7 letras. Por exemplo, o trajeto **ABCDEFA**, informa que ele sairá da cidade **A**, visitante as cidades **B**, **C**, **D**, **E** e **F** nesta ordem, voltando para a cidade **A**. Além disso, o número indicado entre as letras informa o custo do deslocamente entre as cidades.



Como João quer economizar, ele precisa determinar qual o trajeto de menor custo para visitar os cinco clientes. Examinando a figura, percebe que precisa considerar somente parte das sequências, pois os trajetos **ABCDEFA** e **AFEDCBA** tem o mesmo custo. Ele gasta 1mim20s para examinar uma sequência e descartar sua simétrica, conforme apresentado. O tempo mínimo necessário para João verificar todas as sequências possíveis no problema é de

146. Uma família é composta por seis pessoas: o pai, a mãe e quatro filhos. Num restaurante, essa família vai ocupar uma mesa redonda. Em quantas disposições diferentres essas pessoas podem se sentar em torno da mesa de modo que o pai e a mãe fiquem juntos?

147. Dois meninos e três meninas formarão uma roda dando-se as mãos. De quantos modos diferentes poderão formar a roda de modo que os dois meninos não fiquem juntos?

148. De quantos modos distintos 5 pessoas podem sentar-se em volta de uma mesa:

    (a) circular?

    (b) quadrada?

    (c) retangular?

149. (VUFU-MG (1996)) Quer-se colocar as bandeiras de oito países em uma praça de forma octagonal, de modo que as bandeiras fiquem nos vértices do octógono e que as bandeiras de Brasil e Portugal ocupem vértices consecutivos. Pode-se fazer isso de quantas maneiras?

10.3 Subconjuntos (Combinações)

150. A mega–sena é uma loteria onde são sorteados 6 dentre os números de 1 a 60, sendo todos os resultados possíveis equiprováveis.

    Para cada $k \geq 6$, uma *k-aposta* é uma escolha de k dentre os números de 1 a 60. Ganha-se a loteria com uma k–aposta se 6 dentre os k números que compõem esta k–aposta são os sorteados. Uma *aposta simples* é uma 6-aposta.

    (a) Quantos são os resultados possíveis de um sorteio da mega-sena?

    (b) Qual a chance de ganhar a mega-sena com uma aposta simples?

    (c) Quantas vezes maior a chance de ganhar a mega-sena com uma 7–aposta, comparada com a chance de ganhar com uma aposta simples?

    (d) Em geral, quantas vezes maior a chance de ganhar a mega-sena com uma k–aposta, comparada com a chance de ganhar com uma aposta simples?

151. Seja A um conjunto finito e seja $k \in \mathbb{N}$. Prove que

$$\binom{A}{k} \sim \binom{A}{|A| - k}.$$

152. Numa formatura de 55 alunos de Ciência da Computação, cada aluno cumprimentou cada um de seus colegas exatamente uma vez, parabenizando-o por ter se formado. Quantos cumprimentos foram trocados?

153. Prove[54] que

$$\binom{n}{k} \sim \binom{n}{n-k},$$

para todo $n, k \in \mathbb{N}$.

154. Quantas são as sequências binárias de n dígitos com exatamente k dígitos 1?

155. Numa sala[55] há 5 lugares e 7 pessoas. De quantas modos diferentes essas pessoas podem ocupar a sala, sendo que até 5 podem ficar sentadas e o resto em pé?

156. De quantas maneiras[56] podem ser escolhidos 3 números naturais distintos de 1 a 30 de modo que sua soma seja par?

157. Ao final de um campeonato de futebol[57], somaram-se as pontuações das equipes, obtendo-se um total de 35 pontos. Cada equipe jogou com todos os adversários apenas uma vez. Determine quantos empates houve no campeonato, sabendo que cada vitória valia 3 pontos, cada empate valia 1 ponto e que derrotas não pontuavam.

158. Prove que

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n,$$

usando resultados de contagem.

159. Considere um baralho de 52 cartas divididas igualmente entre os 4 naipes (ouros, espadas, copas e paus).

[54] **Sugestão:** use o Exercício 151

[55] Questão de vestibular da PUC-SP; contribuição de Gabriel Gugik

[56] Questão de vestibular da UNICAMP; contribuição de Gabriel Gugik

[57] Questão de vestibular da IME (2004); contribuição de Gabriel Gugik

(a) Qual é a probabilidade de, numa mão de 10 cartas, exatamente 2 delas serem de espadas?

(b) Dentre todas as $\binom{52}{8}$ mãos possíveis de 8 cartas, quantas delas têm exatamente 2 cartas de cada naipe?

160. Uma urna contém a bolas azuis e v bolas vermelhas todas distintas entre si. De quantas maneiras é possível retirar desta urna uma amostra de n bolas com exatamente k bolas azuis?

161. Dado $n \in \mathbb{N}$, um *grafo de n vértices* é um conjunto $G \subseteq \binom{[n]}{2}$. Cada elemento de $[n]$ é chamado de *vértice* de G e cada $\{u, v\} \in G$ é chamado de *aresta* de G. Em cada item, explique o raciocínio que leva à resposta.

(a) Quantos diferentes grafos de n vértices existem?

(b) Quantos diferentes grafos de n vértices com m arestas existem?

(c) Uma *descrição* de um grafo G é uma sequência de $2|G| + 1$ inteiros. O primeiro inteiro é o número de vértices de G. Cada um dos $|G|$ pares de inteiros seguintes representa uma aresta de G. Por exemplo as sequências $(3, 1, 2, 2, 3)$, $(3, 2, 1, 2, 3)$ e $(3, 2, 3, 1, 2)$ são três descrições diferentes do grafo $G = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}\}$ de 3 vértices. Quantas descrições diferentes tem um mesmo grafo G de n vértices e m arestas?

11 Composições

162. Quantas composições admite um inteiro n?

163. Quantas composições fracas admite um inteiro n?

164. De quantas maneiras é possível distribuir k bolas idênticas por n urnas distintas, de maneira que cada urna tenha pelo menos m bolas?

165. De quantas maneiras é possível distribuir k bolas idênticas por n urnas distintas, de maneira que cada urna u tenha pelo menos $m(u)$ bolas?

166. Em função dos valores de k e n, quantas soluções inteiras não negativas (ou seja, $x_i \geq 0$, para todo $i \in [k]$) distintas admitem as seguintes equações.

(a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} x_i = n.$

(b) $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} x_i \leq n.$

167. Seja $k, n \in \mathbb{N}$ e $k \leq n$ de quantas maneiras distintas podemos escrever n como sendo uma *combinação linear* de k inteiros positivos ($x_i \in \mathbb{N}$ e $x_i < n$, com $i \in [k]$) multiplicados por constantes também inteiras positivas ($a_i \in \mathbb{N}$ e $a_i < n$, com $i \in [k]$), isto é

$$\sum_{i=1}^{k} a_i x_i = n.$$

168. Num certo país, as moedas são só de dois tipos: 2 e 5 centavos. De quantas maneiras é possível trocar

(a) 12 centavos

(b) 20 centavos

(c) 92 centavos

(d) N centavos

por moedas de 2 e/ou de 5 centavos?

12 Inclusão/Exclusão

169. Quantos são os inteiros positivos menores ou iguais a 1000 que são divisíveis por 3 ou por 5 ou por 7?

     Generalize o raciocínio dando uma expressão para o número de inteiros positivos menores ou iguais a n que são divisíveis por pelo menos um dentre $d_1, d_2, \ldots, d_k$.

170. Quantos são os inteiros positivos menores ou iguais a 2001 que são múltiplos de 3 ou 4 mas não são de 5?

171. Qual o número de inteiros positivos menores ou iguais a 1000 que são ímpares ou quadrados de inteiros?

     Generalize a resposta dando uma expressão para o número de inteiros positivos menores ou iguais a n que são ímpares ou quadrados de inteiros. Explique o raciocínio que leva à resposta.

172. Qual o número de soluções inteiras de[58]

$$x_1 + x_2 + x_3 = 12, 0 \leq x_i \leq 5?$$

173. Usando o princípio da Inclusão/Exclusão e o fato de que os números compostos (i.e., $a = b.c$, com $a, b, c \in \mathbb{N} - 1$ não é composto nem primo) menores ou iguais a n são divisíveis por algum número primo menor ou igual a k tal que $k = \lfloor \sqrt{n} \rfloor$, determine:

     (a) O número de primos que são menores ou iguais a 111

     (b) O número de primos menores ou iguais à n

[58]**Sugestão:** Para cada $i \in [3]$, considere o conjunto

$$G_i := \{(x_1, x_2, x_3) \in S \mid x_i > 5\},$$

onde S é o conjunto das soluções inteiras não negativas de $x_1 + x_2 + x_3 = 12$.

174. Em um jogo, um dado de 6 faces numeradas é jogado 5 vezes e o jogador ganha se o resultado da última jogada for igual ao de pelo menos uma das jogadas anteriores. Qual é a probabilidade de ganhar neste jogo?[59]

175. Uma classe tem $2n$ estudantes agrupados em n duplas[60].

   (a) Mostre que existem $(2n)!/(2^n n!)$ maneiras de agrupar os $2n$ estudantes em n duplas.

   (b) Considere um agrupamento inicial dos $2n$ estudantes em n duplas. De quantas maneiras pode-se reagrupar os estudantes de forma que cada dupla esteja quebrada (ou seja, de forma que cada dupla seja diferente)?

176. A *função tociente de Euler*[61] (ou *função ϕ de Euler*) é a função que, dado $n \in \mathbb{N}$ conta o número de inteiros positivos menores que n e sem divisores em comum com n, isto é

$$\phi(n) := |\{k \in [n] \mid \mathsf{mdc}(k, n) = 1\}| .$$

Por exemplo, $\phi(12) = 4$ pois há quatros inteiros positivos, 1, 5, 7 e 11 que são menores ou iguais a 12 e sem divisores em comum com 12. Convenciona-se que $\phi(1) = 1$.

Use o Princípio de Inclusão–Exclusão para verificar que

$$\phi(n) = n \prod_{i=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)$$

onde $p_1, \ldots, p_k$ são os primos distintos que dividem n.

[62]: Se p é primo, então nenhum inteiro menor que p tem divisor em comum com p e, portanto, $\phi(p) = p-1$. Se p é primo e $e \geq 1$, então $\phi(p^e)$ é o número de termos da sequência $(1, 2, 3, \ldots, p, p+1, \ldots, 2p, \ldots, p^e)$ que não são divisíveis por p. Os números divisíveis por p nesta sequência são $p, 2p, 3p, \ldots, p^e$. Assim

$$\phi(p^e) = p^e - p^{e-1} = p^e \left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

[59]Extraído e adaptado de (Tuffley, 2009, ex. 4)
[60]Extraído e adaptado de (Tuffley, 2009, ex. 8)
[61]Extraído e adaptado de (Tuffley, 2009, ex. 9)
[62]**Sugestão:** Extraído de (Andreescu and Feng, 2004, p. 124, exemplo 6.6)

13 Permutações sem Ponto Fixo

177. (a) Qual o número de permutações sobre um conjunto de n elementos com exatamente um ponto fixo?

 (b) Mostre que o número de permutações sem ponto fixo e o número de permutações com extamente um ponto fixo sobre um conjunto de n elementos difere de um para todo $n \in \mathbb{N}$[63].

178. De quantas maneiras podemos arranjar os inteiros $1, 2, 3, \ldots, 10$ de forma que nenhum dos cinco primeiros (i.e. 1,2,3,4,5) apareçam em suas posições naturais/originais[64]?

179. (a) Quantas permutações sobre $[n]$ existem de forma que i nunca é seguido de $i + 1$ para nenhum $1 \leq i < n$?[65]

 (b) Como essa resposta muda, se incluirmos a restrição de que n não pode ser seguido de 1?

180. Suponha que numa disciplina de pós-graduação, a avaliação final é realizada por meio da entrega de um relatório técnico, em forma de artigo científico, sobre um trabalho prático desenvolvido com os conhecimentos adquiridos ao longo da disciplina. O professor desta disciplina quer desenvolver em seus alunos/estudantes a capacidade de avaliação de artigos científicos e propõe que a avaliação dos relatórios seja feita pelos próprios alunos.

 Considerando que a turma é composta de apenas 5 alunos, de quantas maneiras distintas o professor pode distribuir os relatórios técnicos aos alunos de forma que um mesmo autor não avalie o seu artigo.

181. Para a palavra UFPR, podemos formar quantos anagramas de forma que cada letra não apareça em sua posição original.

---

[63] Adaptado de (Andreescu and Feng, 2004, p. 140, ex. 6.3)
[64] Extraído de (Tuffley, 2009, ex. 4)
[65] Extraído e adaptado de (Tuffley, 2009, ex. 9)

182. Considere uma palavra formada por uma sequência de n letras A seguida de mais m letras B, quantos anagramas podemos formar dessa palavra de forma que nenhuma letra esteja em sua posição original.

14 Funções Sobrejetoras

183. Em um curso de Matemática Discreta, existem 8 estudantes que serão divididos em grupos de trabalho, de forma que cada grupo tenha pelo menos um aluno, para estudar 3 projetos diferentes. De quantas maneiras eles podem ser distribuídos?

184. Dado $n \in \mathbb{N}$, quantas funções $[n] \to [n]$ não são injetoras nem sobrejetoras?

185. Quantos programas distintos composto por 10 linhas de código podemos construir usando as instruções `store`, `load`, `jump` e `add` de forma que cada instrução seja utilizada pelo menos uma vez?

186. Em processamento de imagens, a tarefa de atribuir a cada *pixel* (*picture element*) p da imagem um rótulo (ou região) l, de forma que todos os rótulos sejam usados pelo menos uma vez, é conhecida como *segmentação da imagem* e pode ser descrita por uma função $S\colon P \to L$, onde $P = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ é o conjunto de pontos da imagem e $L = \{l_1, l_2, \ldots, l_m\}$. No caso particular em que $m = 2$ (por exemplo, rótulo "branco" e "preto") , o processo também é conhecido por binarização ou *thresholding* da imagem.

    (a) Como descrito acima, a função de segmentação S é uma injeção, sobrejeção, bijeção, ou nenhuma das anteriores?

    (b) De quantas maneiras distintas podemos segmentar uma imagem com $n = 9$ pixels em $m = 2$ regiões/rótulos?

    (c) E se a restrição de uso de todos os rótulos disponíveis fosse removida, a função de segmentação se tornaria uma injeção, sobrejação, bijeção, ou nenhuma das anteriores? Neste caso, qual seria o número de funções possíveis considerando os tamanhos dos conjuntos de 186b

187. Seja $S([m], [n])$ o conjunto das funções sobrejetoras $f\colon [m] \to [n]$ e a

sua cardinalidade determinada por

$$\begin{array}{rl} 0, & \textsf{se } m < n, \\ \displaystyle\sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \binom{n}{i} i^m, & \textsf{se } m \geq n. \end{array}$$

E seja $I([m],[n])$ o conjunto das funções injetoras $f\colon [m] \to [n]$ e a sua cardinalidade determinada por

$$\begin{array}{rl} 0, & \textsf{se } m < n, \\ \dfrac{n!}{(n-m)!}, & \textsf{se } m \geq n. \end{array}$$

Prove que $|S([m],[n])| = |I([m],[n])|$, se $m = n$ para todo $n > 0$.

188. Prove que

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \binom{n}{i} i^n = n!.$$

Referências

Titu Andreescu and Zuming Feng. *A Path to Combinatorics for Undergraduates: Counting Strategies*. Springer, 2004.

Thomas H. Cormen, Charles E. Leiserson, Ronald L. Rivest, and Clifford Stein. *Introduction to Algorithms*. MIT Press, 3 edition, 2009. ISBN 978-0-262-03384-8. URL http://mitpress.mit.edu/catalog/item/default.asp?ttype=2&tid=11866.

Chris Tuffley. The principle of inclusion-exclusion, 2009. URL http://www.mathsolympiad.org.nz/wp-content/uploads/2009/02/inclusion-exclusion.pdf&ei=sj2DU73XL6m0sQTL24CwCQ&usg=AFQjCNEh4U_iyB_WDYPDzSAYj_3MFZrIIQ&sig2=9YLp0YGfZI4Mv8OQsoHNNA.