

Matemática Discreta

Exercícios

29 de setembro de 2019

Sumário

1	Elementos de Lógica	3
2	Conjuntos e Inteiros	7
3	Aproximação Assintótica	8
3.1	Chão e Teto	9
4	Chão e Teto	11
4.1	Função integralizada	12
5	Indução	14
5.1	Descrições Recursivas	17
5.2	Recorrências	22
6	Recorrências	27
6.1	Funções Iteradas	27
6.2	Recorrências	27
6.3	Recorrências Lineares Homogêneas	31
6.4	Recorrências Lineares não Homogêneas	35
6.5	Somatórios	39
6.6	Algumas Aplicações	42

7 Fundamentos de Contagem	44
8 União e Produto Cartesiano	47
9 Sequências	48
10 Funções	52
10.1 Funções Injetoras (Arranjos)	53
10.2 Funções Bijetoras (Permutações)	53
10.3 Subconjuntos (Combinações)	55
11 Composições	57
12 Inclusão/Exclusão	59
13 Permutações sem Ponto Fixo	61
14 Funções Sobrejetoras	63
15 Partições	65

1 Elementos de Lógica

1[@]. Das proposições abaixo, indique as verdadeiras e as falsas.

- (a) “ $2 \leq 3$ ”.
- (b) “ $10 > 20$ ”.
- (c) “ $x^2 \leq x$ ”.

2[@]. Das proposições abaixo, indique as verdadeiras e as falsas.

- (a) $(1 < 2)$ e $(2 < 3) \implies (1 < 3)$,
- (b) $(1 < 2) \implies (10 < 30)$,
- (c) $1 > 2 \implies 2 < 3$,
- (d) $1 > 2 \implies 2 > 3$.

3[@]. Sejam P e Q os seguintes predicados.

$$P(x) : x \leq x^2,$$
$$Q(x, y) : x \leq y^2.$$

Das proposições abaixo, indique as verdadeiras e as falsas.

- (a) $P(2)$.
- (b) $P(1/2)$.
- (c) $Q(1, 1)$.
- (d) $R(t) = Q(1, t)$.

4[@]. Seja $P(x)$ o predicado “ $x \leq x^2$ ”.

Das proposições abaixo, indique as verdadeiras e as falsas.

- (a) $P(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$.
- (b) $P(x)$, para algum $x \in \mathbb{R}$.
- (c) $P(x)$, para todo $x \geq 1$.
- (d) $P(x)$, para algum $0 < x < 1$.

5^{*}. Prove que se A , B e C são proposições, então

- (a) $F \implies A$, ou seja, a partir de uma proposição falsa pode-se concluir qualquer coisa.
- (b) $(A \implies B) \equiv ((\text{não } B) \implies (\text{não } A))$, também conhecida como *contrapositiva* da implicação. Uma “prova de $A \implies B$ por contrapositiva” é uma prova de que $((\text{não } B) \implies (\text{não } A))$.
- (c) $(A \implies F) \equiv \text{não } A$, ou seja, uma implicação cujo conseqüente é falso só pode ser verdadeira se o antecedente é falso. Este é o princípio por baixo das “provas por contradição”.
- (d) $((A \implies B) \text{ ou } (A \implies C)) \equiv (A \implies (B \text{ ou } C))$ (distributividade da disjunção pela implicação).
- (e) $((A \implies B) \text{ e } (A \implies C)) \equiv (A \implies (B \text{ e } C))$ (distributividade da conjunção pela implicação).
- (f) $((B \implies A) \text{ ou } (C \implies A)) \equiv ((B \text{ e } C) \implies A)$ (outra distributividade).
- (g) $((B \implies A) \text{ e } (C \implies A)) \equiv ((B \text{ ou } C) \implies A)$ (outra distributividade).
- (h) $((A \implies B) \text{ e } (A \implies (\text{não } B))) \implies (\text{não } A)$ (outra maneira de expressar o princípio por baixo de uma prova por contradição).

6*. Considere os seguintes predicados.

$$\begin{aligned}
 I(x) &\equiv x \in \mathbb{Z}, \\
 P(f, x) &\equiv I(x) \implies I(f(x)), \\
 Q(f, x) &\equiv I(f(x)) \implies I(x).
 \end{aligned}$$

Dê um exemplo de função $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que

- (a) satisfaz o predicado $P(g, x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$.
- (b) não satisfaz o predicado $P(g, x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$.
- (c) satisfaz o predicado $\text{não } (P(g, x))$, para todo $x \in \mathbb{R}$.
- (d) satisfaz o predicado $Q(g, x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$.
- (e) não satisfaz o predicado $Q(g, x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$.
- (f) satisfaz o predicado $\text{não } (Q(g, x))$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

7*. Considere os seguintes predicados.

$$\begin{aligned}L(f) &\equiv \lim f(n) = 0, \\P(n, f, g, h) &\equiv f(n) = g(n)(1 + h(n)), \\B(f, g, h) &\equiv L(h) \text{ e } (P(n, f, g, h), \text{ para todo } n \in \mathbb{N}), \\A(f, g) &\equiv B(f, g, h), \text{ para algum } h: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Dê um exemplo de funções $f, g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ que

- (a) satisfazem $A(f, g)$.
- (b) não satisfazem $A(f, g)$.
- (c) satisfazem **não** $A(f, g)$.

8#. Seja $O(f)$ o seguinte predicado (onde $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$).

$$(((n \geq k \implies |f(n)| \leq c), \text{ para algum } k > 0), \text{ para algum } c > 0), \text{ para todo } n \geq k.$$

Avalie as seguintes proposições justificando cada uma, isto é, apresentando uma prova de se são verdadeiras ou falsas.

- (a) $O(n/(n-1))$,
- (b) $O(n)$,
- (c) $O(10 + 1/n)$,
- (d) $O(\log n)$,
- (e) $O(42)$.

9#. Considere os seguintes predicados.

$$\begin{aligned}P_1(f, g, c, n) &\equiv |f(n)| \leq c|g(n)|, \\P_2(f, g, c, k) &\equiv P_1(f, g, c, n), \text{ para todo } n \geq k, \\P_3(f, g, c) &\equiv P_2(f, g, c, k), \text{ para algum } k \in \mathbb{N}, \\O(f, g) &\equiv P_3(f, g, c), \text{ para algum } c \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Para cada par de funções $f, g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, classifique as proposições abaixo como verdadeiras ou falsas.

- (a) $O(f, g)$, para $f(n) = n$ e $g(n) = n^2$.
- (b) $O(g, f)$, para $f(n) = n$ e $g(n) = n^2$.
- (c) $O(f, g)$, para $f(n) = n/2$ e $g(n) = n$.
- (d) $O(g, f)$, para $f(n) = n/2$ e $g(n) = n$.

10#. Sejam $D(x, y, d)$ e $M(x, y)$ os seguintes predicados, respectivamente.

$$D(x, y, d): |x - y| < d,$$

$$M(x, y): x > y.$$

Use os predicados $D(x, y, d)$ e $M(x, y)$ para expressar os seguintes predicados.

$$L_1(f, a, l): \lim_{x \rightarrow a} f(x) = l.$$

$$L_2(f, l): \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = l.$$

$$L_3(f, a): \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty.$$

$$L_4(f): \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

2 Conjuntos e Inteiros

11[@]. Seja A um conjunto finito e seja $B \subseteq A$. Prove que

$$A = (A - B) \cup B,$$

12. Sejam A , B e C conjuntos finitos. Prove que

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C),$$

13[#]. Seja A um conjunto e seja $k \in \mathbb{N}$. Vamos denotar por $\binom{A}{k}$ o conjunto dos subconjuntos de k elementos de A , isto é,

$$\binom{A}{k} = \{S \subseteq A \mid |S| = k\}.$$

Dado $a \in A$, sejam

$$\begin{aligned} A^- &= \binom{A - \{a\}}{k}, \\ A^+ &= \binom{A - \{a\}}{k-1}, \\ \bar{A} &= \{S \cup \{a\} \mid S \in A^+\}. \end{aligned}$$

Prove que

$$\binom{A}{k} = A^- \cup \bar{A},$$

14. Dados $f, g: A \rightarrow \mathbb{C}$ e $X \subseteq A$ e $c \in \mathbb{C}$, é verdade que

(a)

$$\prod_{x \in X} c = c^{|X|}?$$

(b)

$$\prod_{x \in X} (f(x) + g(x)) = \prod_{x \in X} f(x) + \prod_{x \in X} g(x)?$$

(c)

$$\sum_{x \in X} f(x)g(x) = \left(\sum_{x \in X} f(x) \right) \left(\sum_{x \in X} g(x) \right)?$$

Justifique.

3 Aproximação Assintótica

15. Seja $P: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$P(n) = a_0n^0 + a_1n^1 + a_2n^2 + \dots + a_kn^k$$

um polinômio de grau k (e, portanto, $a_k \neq 0$).

Prove que $P(n) \approx a_kn^k$

16. Prove que

$$\binom{n}{k} \approx \frac{n^k}{k!}, \text{ para todo } 0 \leq k \leq n/2.$$

17. Prove que

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \approx \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

18. Prove que

$$\frac{5-3\sqrt{5}}{10} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{5+3\sqrt{5}}{10} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - 1 \approx \frac{5+3\sqrt{5}}{10} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

19^o. Prove que

(a)

$$\binom{n}{2} \approx \frac{n^2}{2}$$

(b)

$$\sum_{i=1}^n i \approx \frac{n^2}{2}$$

(c)

$$\log_b n! \approx n \log_b n, \text{ para todo } b > 1$$

(d)

$$\sum_{i=1}^n \log_b i \approx n \log_b n, \text{ para todo } b > 1$$

(e)

$$\lg n \approx \lfloor \lg n \rfloor \approx \lceil \lg n \rceil$$

20*. Seja $c \in \mathbb{C} - \{0, 1\}$ e seja

$$s(n) = \sum_{i=0}^n c^i.$$

Prove que

(a) se $c > 1$, então $s(n) \approx \frac{c^{n+1}}{c-1}$,

(b) se $c < 1$, então $s(n) \approx \frac{1}{1-c}$.

21#. Sejam $F, f, g, h: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ e $n_0 \in \mathbb{N}$ tais que $F(n) \approx f(n)$, $F(n) \approx h(n)$, e

$$f(n) \leq g(n) \leq h(n), \text{ para todo } n \geq n_0,$$

Prove que, neste caso,

$$F \approx f \approx g \approx h.$$

22#. Sejam $f, g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$. Prove que $f(n) \approx g(n)$ se e somente se existe $\varepsilon: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$f(n) = g(n)(1 + \varepsilon(n)),$$

e

$$\lim \varepsilon(n) = 0.$$

23#. Prove que \approx é uma relação de equivalência sobre o conjunto das funções $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$.

3.1 Chão e Teto

24. É verdade que $\lfloor f(n) \rfloor \approx f(n)$ para toda $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$? Justifique.

25. É verdade que $\sum_{i=1}^n \lfloor f(i) \rfloor \approx \sum_{i=1}^n f(i)$ para toda $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$? Justifique.

26#. A soma

$$\sum_{i=1}^n \lfloor \lg i \rfloor \tag{1}$$

aparece com certa frequência em aplicações ligadas à computação.

(a) Prove que, dado $k \in \mathbb{N}$, temos

$$\lfloor \lg i \rfloor = \lfloor \lg k \rfloor \text{ para todo } i \in [2^{\lfloor \lg k \rfloor} .. 2^{\lfloor \lg k \rfloor + 1} - 1].$$

(b) Use esta observação para agrupar convenientemente os termos em (1).

(c) Prove que¹

$$\sum_{i=1}^n \lfloor \lg i \rfloor = n \lfloor \lg n \rfloor - (2^{\lfloor \lg n \rfloor + 1} - \lfloor \lg n \rfloor - 2).$$

(d) Prove que

$$\sum_{i=1}^n \lfloor \lg i \rfloor \approx \sum_{i=1}^n \lg i.$$

(e) Prove que²

$$\sum_{i=1}^n \lfloor \lg i \rfloor \approx n \lg n.$$

(f) Prove que

$$\lg n! \approx n \lg n.$$

(g) As proposições acima podem ser generalizadas para logaritmos em outras bases além de 2? Como?

¹**Sugestão:** use o resultado do Exercício 32 e o fato de que $\sum_{i=0}^n i2^i = 2^{n+1}(n-1) + 2$.

²**Sugestão:** use o resultado do Exercício 32

4 Chão e Teto

27*. Prove que $\lceil x \rceil$ é o único inteiro que satisfaz

$$x \leq \lceil x \rceil < x + 1,$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

28*. Prove que

$$\lceil x \rceil + z = \lceil x + z \rceil.$$

para todo $x \in \mathbb{R}$ e todo $z \in \mathbb{Z}$.

29*. Sejam $n, m: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ dadas por

$$\begin{aligned} n(a, b) &= b - a + 1, \\ m(a, b) &= \left\lfloor \frac{a + b}{2} \right\rfloor, \end{aligned}$$

Prove que, para todo $a, b \in \mathbb{Z}$,

(a) $a + b$ é par se e somente se $n(a, b)$ é ímpar.

(b) $n(a, m(a, b)) = \left\lceil \frac{n(a, b)}{2} \right\rceil$.

(c) $n(m(a, b) + 1, b) = \left\lfloor \frac{n(a, b)}{2} \right\rfloor$.

(d) $n(a, m(a, b) - 1) = \left\lfloor \frac{n(a, b) - 1}{2} \right\rfloor$.

30*. Prove que, para todo $x \in \mathbb{R}$,

(a) $x - \lfloor x \rfloor \leq 1$.

(b) $\lceil x \rceil - x \leq 1$.

(c) $\lfloor x \rfloor = \lceil x \rceil$ se e somente se $x \in \mathbb{Z}$

(d) $\lceil x \rceil - \lfloor x \rfloor \in \{0, 1\}$.

31*. Prove que

$$\max \{k \in \mathbb{Z} \mid k < x\} = \lceil x - 1 \rceil,$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

32[ⓐ]. Prove que, para todo inteiro $n > 0$,

(a) $\frac{n}{2} < 2^{\lfloor \lg n \rfloor} \leq n \leq 2^{\lceil \lg n \rceil} < 2n$.

(b) $\frac{1}{2} < \frac{n}{2^{\lceil \lg n \rceil}} \leq 1 \leq \frac{n}{2^{\lfloor \lg n \rfloor}} < 2$

(c) $\lfloor \frac{n}{2^{\lfloor \lg n \rfloor}} \rfloor = 1$, para todo $n > 0$.

(d) $\lfloor \frac{n}{2^k} \rfloor = 0$ se e somente se $k > \lfloor \lg n \rfloor$.

(e) $\lfloor \lg n \rfloor > \lfloor \lg(n-1) \rfloor$ se e somente se n é potência de 2.

(f) $\lceil \lg n \rceil < \lceil \lg(n+1) \rceil$ se e somente se n é potência de 2.

(g) $\lceil \lg(n+1) \rceil = \lceil \lg n \rceil + 1$.

4.1 Função integralizada

33*. Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função crescente e contínua satisfazendo

$$f(x) \in \mathbb{Z} \implies x \in \mathbb{Z}, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Prove que

$$\lceil f(\lceil x \rceil) \rceil = \lceil f(x) \rceil, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

34[#]. Seja k um inteiro positivo e seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a função dada por

$$f(x) = \frac{x}{k}.$$

Prove que

(a) f uma função contínua.

(b) f uma função crescente.

(c) $f(x) \in \mathbb{Z} \implies x \in \mathbb{Z}$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

35[#]. Se $f: A \rightarrow B$ e $g: B \rightarrow C$ são funções contínuas, então $f \circ g: A \rightarrow C$ é uma função contínua.

36#. Sejam $A, B, C \subseteq \mathbb{R}$ e $f: A \rightarrow B$ e $g: B \rightarrow C$ funções crescentes. Prove que $f \circ g: A \rightarrow C$ é uma função crescente.

37#. Dizemos que uma função $f: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é integralizada se

$$f(x) \in \mathbb{Z} \implies x \in \mathbb{Z}, \text{ para todo } x \in A,$$

Sejam $A, B, C \subseteq \mathbb{R}$. Prove que se $f: A \rightarrow B$ e $g: B \rightarrow C$ são funções integralizadas, então $f \circ g: A \rightarrow C$ é uma função integralizada.

5 Indução

38[@]. Prove que

$$\sum_{i=0}^n c^i = \frac{c^{n+1} - 1}{c - 1},$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $c \in \mathbb{C} - \{0, 1\}$.

39*. Prove por indução que

$$\sum_{i=0}^n i2^i = 2^{n+1}(n - 1) + 2,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

40*. Dados $n, k \in \mathbb{N}$, o coeficiente binomial $\binom{n}{k}$ é definido da seguinte maneira

$$\binom{n}{k} := \begin{cases} 1, & \text{se } k = 0, \\ \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}, & \text{se } 1 \leq k \leq n, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Prove, por indução em n , que

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n.$$

41*. Prove por indução em n que, dados $x, y \in \mathbb{C}$,

$$\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^i y^{n-i} = (x + y)^n,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ e $n > 0$ ³.

Conclua a partir daí que

$$\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} = 2^n,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ e $n > 0$.

³**Sugestão:** Observe que $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$, $\binom{n}{n+1} = 0$ e $\binom{n}{-1} = 0$

42[@]. Prove por indução em n que

$$2^n < n!, \text{ para todo } n \geq 4.$$

43[@]. A *sequência de Fibonacci* é a função $F: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ dada por

$$F(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n \leq 1 \\ F(n-1) + F(n-2), & \text{se } n > 1. \end{cases}$$

(a) Prove por indução em n que

$$F(n) = \frac{\sqrt{5}}{5} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right), \text{ para todo } n \in \mathbb{N}$$

(b) Conclua que

$$F(n) \approx \frac{\sqrt{5}}{5} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n$$

44*. A *sequência de Fibonacci* é a função $F: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ dada por

$$F(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n \leq 1 \\ F(n-1) + F(n-2), & \text{se } n > 1. \end{cases}$$

Prove, por indução em n , que

(a) $\sum_{j=0}^n (F(j))^2 = F(n)F(n+1)$, para todo $n \in \mathbb{N}$

(b) $\sum_{j=0}^n F(2j) = F(2n+1) - 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$

(c) $\sum_{j=1}^n F(2j-1) = F(2n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$

(d) $F(n+1)F(n-1) - (F(n))^2 = (-1)^n$, para todo $n \in \mathbb{N}$

onde $F: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ é a *sequência de Fibonacci*⁴.

45*. Prove que

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} F(n+1) & F(n) \\ F(n) & F(n-1) \end{pmatrix}, \text{ para todo } n > 0,$$

onde F é a *sequência de Fibonacci* (cfr Exercício 44)⁵.

⁴Veja o Exercício 43

⁵Este é um dos algoritmos mais eficientes para o cálculo da *sequência de Fibonacci*.

46[@]. Prove por indução em n que se A_1, \dots, A_n e B são conjuntos, então

$$\left(\bigcup_{i=1}^n A_i \right) \cap B = \bigcup_{i=1}^n (A_i \cap B),$$

47*. Use o fato de que se A e B são conjuntos finitos e disjuntos entre si então

$$|A \cup B| = |A| + |B|,$$

para provar, por indução em n que, se A_1, \dots, A_n são conjuntos finitos dois a dois disjuntos entre si, então,

$$\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \sum_{i=1}^n |A_i|$$

48[@]. Prove, por indução em $|X|$ que, se X é um conjunto finito e $c \in \mathbb{C}$, então

$$\prod_{x \in X} c = c^{|X|}.$$

49*. Prove, por indução em $|X|$ que, se X é um conjunto finito e $c \in \mathbb{C}$, então

$$\sum_{x \in X} c = c|X|.$$

50*. Prove, por indução em $|X|$ que, que se $f, g: A \rightarrow \mathbb{C}$ e $X \subseteq A$ é um conjunto finito, então

$$\sum_{x \in X} (f(x) + g(x)) = \sum_{x \in X} f(x) + \sum_{x \in X} g(x).$$

51*. Prove, por indução em $|X|$ que, que se $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ e $X \subseteq A$ é um conjunto finito, e $c \in \mathbb{C}$, então

$$\sum_{x \in X} cf(x) = c \sum_{x \in X} f(x).$$

52. Prove por indução que qualquer valor maior ou igual a 4 reais pode ser obtido somente com cédulas de 2 e 5 reais.
53. Prove, por indução em n , que $n^2 - 1$ é divisível por 8 para todo $n \in \mathbb{N}$ ímpar.

5.1 Descrições Recursivas

54[@]. Seja $l: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ dada por

$$l(n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 1, \\ l(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) + 1, & \text{se } n > 1. \end{cases}$$

Prove por indução em n que

$$l(n) = \lfloor \lg n \rfloor + 1, \text{ para todo } n > 0.$$

55[@]. Sejam

$b(n)$: o número de dígitos 1 na representação binária de n .

e $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ a função dada por

$$f(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n = 0, \\ f(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) + (n \bmod 2) & \text{se } n > 0. \end{cases}$$

(a) Prove que o número de dígitos 1 na representação binária de n é $f(n)$, para todo $n \geq 0$.

(b) Prove que

$$f(n) \leq \lfloor \lg n \rfloor + 1, \text{ para todo } n > 0.$$

56*. Seja $M(n): \mathbb{N} - \{0\} \rightarrow \mathbb{N}$ dada por

$M(n) :=$ a posição do bit mais significativo na representação binária de n ,

sendo que os bits são contados da direita para a esquerda a partir de 0. Por exemplo, $M(1) = 0$ e $M(10) = 3$.

- (a) Proponha uma expressão recursiva para $M(n)$.
- (b) Prove que a expressão proposta está correta.

57*. Considere o Algoritmo $\text{Exp}(x, n)$ dado por

$\text{Exp}(x, n)$
Se $n = 0$ Devolva 1 $e \leftarrow \text{Exp}(x, \lfloor n/2 \rfloor)$ $e \leftarrow e \times e$ Se n é par Devolva e Devolva $x \times e$

- (a) Execute $\text{Exp}(2, n)$ para $n \in \{0, 1, 2, 5, 11, 15, 16, 20\}$ e, para cada execução, mostre o resultado do algoritmo e o número de multiplicações efetuadas.
- (b) Prove por indução em n que $\text{Exp}(x, n) = x^n$ para todo $x \neq 0$ e todo $n \in \mathbb{N}$.
- (c) Prove que a execução de $\text{Exp}(x, n)$ efetua $\lfloor \lg(n) \rfloor + b(n) + 1$ multiplicações para todo $x \neq 0$ e todo $n \in \mathbb{N}$, onde b é a função definida no Exercício 55.
- (d) Prove que a execução de $\text{Exp}(x, n)$ efetua no máximo $2(\lfloor \lg n \rfloor + 1)$ multiplicações para todo $x > 0$ e todo $n > 0$.

58*. Considere o Algoritmo $\text{Mínimo}(v, a, b)$ dado por

$\text{Mínimo}(v, a, b)$
Se $a = b$ Devolva a $m \leftarrow \lfloor \frac{a+b}{2} \rfloor$ $m_1 \leftarrow \text{Mínimo}(v, a, m)$ $m_2 \leftarrow \text{Mínimo}(v, m+1, b)$ Se $v[m_1] \leq v[m_2]$ Devolva m_1 Devolva m_2

Prove por indução em $b - a$ que, a execução de $\text{Mínimo}(v, a, b)$ faz $b - a$ comparações entre elementos de v sempre que $a \leq b$.

- 59*. Prove, por indução em n , que o seguinte algoritmo devolve $\prod_{i=1}^n i$, para todo $n \in \mathbb{N}$

Fatorial(n)
Se $n = 0$ Devolva 1 Devolva $n \times \text{Fatorial}(n - 1)$

- 60*. Prove, por indução em n , que o seguinte algoritmo devolve $3^n - 2^n$, para todo n natural.

A(n)
Se $n \leq 1$ Devolva n Devolva $5 \times A(n - 1) - 6 \times A(n - 2)$

- 61*. Considere o seguinte algoritmo

Multiplica(x, n)
Se $n = 0$ Devolva 0 Se n é par Devolva $\text{Multiplica}(x + x, \frac{n}{2})$ Devolva $\text{Multiplica}(x + x, \frac{n-1}{2}) + x$

- (a) Prove, por indução em n , que $\text{Multiplica}(x, n)$ devolve o valor de nx para todo $x \in \mathbb{C}$ e todo $n \in \mathbb{N}$.
- (b) Enuncie e prove um teorema estabelecendo um limite superior (em função de n) para o número de somas efetuadas por $\text{Multiplica}(x, n)$ ⁶.
- 62*. Combine as informações dos Exercícios 44, 45, 57 e 55 para propor um algoritmo para o cálculo de $F(n)$.
 Seja $s(n)$ o número de somas efetuadas pelo seu algoritmo para calcular $F(n)$.
- (a) Expresse $s(n)$ por meio de uma recorrência.
- (b) Resolva esta recorrência.

⁶**Sugestão:** compare este exercício com o Exercício 57.

- 63*. Considere o seguinte algoritmo de ordenação, conhecido como “ordenação por inserção”.

Ordena(v, a, b)

 Se $a \geq b$
 Devolva v
 Ordena($v, a, b - 1$)
 Insere(v, a, b)
 Devolva v

onde

Insere(v, a, b)

$p \leftarrow$ Busca($v[b], v, a, b - 1$)
 $i \leftarrow b$
 Enquanto $i \geq p + 1$
 Troca($v, i, i - 1$)
 $i \leftarrow i - 1$
 Devolva v

e

Busca(x, v, a, b)

 Se $a > b$
 Devolva $a - 1$

$m \leftarrow \lfloor \frac{a+b}{2} \rfloor$
 Se $x < v[m]$
 Devolva Busca($x, v, a, m - 1$)
 Devolva Busca($x, v, m + 1, b$)

- (a) Fazendo $n = b - a + 1$, prove que o número de comparações na execução de **Busca**(x, v, a, b) é no máximo $\lceil \lg n \rceil + 1$ para todo $n \geq 1$.
- (b) Use o resultado do Exercício 26 para estabelecer o número máximo de comparações na execução de **Ordena**(v, a, b) em função do valor de $n = b - a + 1$.

- 64*. Considere o problema de sortear um elemento de uma lista de tamanho desconhecido, isto é, deseja-se um algoritmo que recebe como entrada uma lista l de $n \geq 1$ itens e devolve como resposta um destes itens escolhido aleatoriamente de maneira que cada item da entrada l tenha

a mesma probabilidade $1/n$ de ser a resposta. A dificuldade é que o tamanho n da lista é desconhecido até que o último item seja lido e a lista não pode ser armazenada em memória.

Prove por indução em n que o seguinte algoritmo resolve este problema.

Escolhe(l)

$k \leftarrow 0$
 Enquanto a entrada l não acabou
 $k \leftarrow k + 1$
 $p \leftarrow$ próximo item de l
 $r \leftarrow$ um número aleatório uniformemente escolhido em $[1..k]$
 Se $r = k$
 $e \leftarrow p$
 Devolva e

65#. Proponha uma expressão recursiva para a função $B(n, k): \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ de tal forma que $B(n, k)$ represente o valor do k -ésimo bit na representação binária de n .

Prove que a expressão proposta está correta.

66#. Prove por indução em n que, se $0 \leq k \leq n$, então o seguinte algoritmo devolve $\frac{n!}{k!(n-k)!}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

$B(n, k)$

Se $k = 0$
 Devolva 1
 Devolva $\frac{n}{k} B(n - 1, k - 1)$

67. Uma certa aplicação financeira rende j por cento do capital aplicado por mês. O rendimento é creditado no próprio saldo da aplicação.

Proponha uma expressão recursiva para a função $C(n): \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ de tal forma que $C(n)$ represente o saldo da aplicação após ao final de n meses, a partir de uma aplicação inicial de valor s .

68. Sejam $f^-, f, f^+ : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ funções não-decrescentes satisfazendo, para

todo $n \geq 2$,

$$\begin{aligned}f^-(n) &= f^-(n-2) + f^-(n-2), \\f(n) &= f(n-1) + f(n-2), \\f^+(n) &= f^+(n-1) + f^+(n-1),\end{aligned}$$

e ainda

$$\begin{aligned}f^-(0) &\leq f(0) \leq f^+(0), \text{ e} \\f^-(1) &\leq f(1) \leq f^+(1).\end{aligned}$$

Prove por indução em n que

$$f^-(n) \leq f(n) \leq f^+(n), \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

5.2 Recorrências

69#. Sejam $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $s, m \in \mathbb{R}$ tais que

$$f(x) = s + mx, \text{ para todo } x \in \mathbb{R},$$

Prove que

$$f^n(x) = \begin{cases} x + sn, & \text{se } m = 1, \\ m^n x + s \frac{m^n - 1}{m - 1}, & \text{se } m \neq 1, \end{cases}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$ e todo $n \in \mathbb{N}$.

70#. Prove que

$$f^n(x) = \left\lfloor \frac{x}{k^n} \right\rfloor, \text{ para todo } n > 0,$$

onde $k \neq 0$ e $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é dada por

$$f(x) = \left\lfloor \frac{x}{k} \right\rfloor.$$

71#. Prove que

$$f^n(x) = \left\lfloor \sqrt[k^n]{x} \right\rfloor, \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

onde $k \in \mathbb{N}$ e $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é dada por

$$f(x) = \left\lfloor \sqrt[k]{x} \right\rfloor.$$

72#. Seja $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ satisfazendo

$$f(n) = f(n - 2) + 1, \text{ para todo } n > 1.$$

Prove, por indução em n , que

(a) $f(n) = f(n \bmod 2) + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

(b) $f(n) = (-1)^n c_{10} + c_{20} + c_{21}n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, onde

$$\begin{aligned} c_{10} &= \frac{f(0) - f(1)}{2} + \frac{1}{4}, \\ c_{20} &= \frac{f(0) + f(1)}{2} - \frac{1}{4}, \\ c_{21} &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

(c) $f(n) = f(4 + n \bmod 2) + \left\lceil \frac{k - 5}{2} \right\rceil$, para $n \geq 5$.

73#. Seja $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ satisfazendo

$$f(n) = f(n - 1) + 1, \text{ para todo } n \geq 1.$$

Prove, por indução em n , que

$$f(n) = f(0) + n, \text{ para todo } n \geq 0.$$

74#. Seja $a \in \mathbb{C}$ e seja $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ satisfazendo

$$f(n) = f(n - 1) + a, \text{ para todo } n \geq 1.$$

Prove⁷, por indução em n , que

$$f(n) = f(0) + na, \text{ para todo } n \geq 0.$$

75#. Sejam $f, s: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ satisfazendo

$$f(n) = f(n - 1) + s(n), \text{ para todo } n \geq 1.$$

⁷Observe que este exercício generaliza o Exercício 73.

Prove⁸, por indução em n que

$$f(n) = f(0) + \sum_{i=1}^n s(i), \text{ para todo } n \geq 0.$$

76#. Sejam $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ e $a \in \mathbb{C}$ tais que

$$f(n) = af(n-1), \text{ para todo } n \geq 1.$$

Prove por indução em n que

$$f(n) = a^n f(0), \text{ para todo } n \geq 0.$$

77#. Sejam $f, m: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ tais que

$$f(n) = m(n)f(n-1), \text{ para todo } n \geq 1.$$

Prove⁹, por indução em n , que

$$f(n) = f(0) \prod_{i=1}^n m(i), \text{ para todo } n \geq 0.$$

78#. Sejam $f, s, m: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ tais que

$$f(n) = m(n)f(n-1) + s(n), \text{ para todo } n \geq 1.$$

Prove (por indução em n) que¹⁰

$$f(n) = f(0) \prod_{i=1}^n m(i) + \sum_{j=1}^n \left(s(j) \prod_{i=j+1}^n m(i) \right), \text{ para todo } n \geq 0.$$

79#. Sejam $n_0 \in \mathbb{N}$, $h: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ e $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ tais que

$$\begin{aligned} h(n) &< n, \\ f(n) &= f(h(n)) + 1, \end{aligned}$$

⁸Observe que este exercício generaliza o Exercício 74.

⁹Observe que este exercício generaliza o Exercício 76.

¹⁰Observe que este exercício generaliza o Exercício 77.

para todo $n \geq n_0$,

Prove (por indução) que

$$f(n) = f(h^u(n)) + u, \text{ para todo } n \geq n_0,$$

onde

$$u = \min \{k \in \mathbb{N} \mid h^k(n) < n_0\}.$$

80#. Sejam $n_0 \in \mathbb{N}$, $h: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ e $f, s: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ tais que

$$\begin{aligned} h(n) &< n, \\ f(n) &= f(h(n)) + s(n), \end{aligned}$$

para todo $n \geq n_0$.

Prove (por indução) que

$$f(n) = f(h^u(n)) + \sum_{i=0}^{u-1} s(h^i(n)), \text{ para todo } n \geq n_0.$$

onde

$$u = \min \{k \in \mathbb{N} \mid h^k(n) < n_0\}.$$

81#. Sejam $n_0 \in \mathbb{N}$, $h: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ e $f, m: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ tais que

$$\begin{aligned} h(n) &< n, \\ f(n) &= m(n)f(h(n)), \end{aligned}$$

para todo $n \geq n_0$.

Prove (por indução em n) que, para todo $n \geq n_0$

$$f(n) = f(h^u(n)) \prod_{i=0}^{u-1} m(h^i(n)),$$

onde

$$u = \min \{k \in \mathbb{N} \mid h^k(n) < n_0\}.$$

82#. Sejam $n_0 \in \mathbb{N}$, $h: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ e $f, m, s: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ tais que

$$\begin{aligned} h(n) &< n, \\ f(n) &= m(n)f(h(n)) + s(n), \end{aligned}$$

para todo $n \geq n_0$.

Prove (por indução) que

$$f(n) = f(h^u(n)) \prod_{i=0}^{u-1} m(h^i(n)) + \sum_{i=0}^{u-1} s(h^i(n)) \prod_{j=0}^{i-1} m(h^j(n)), \text{ para todo } n \geq n_0,$$

onde

$$u = \min \{k \in \mathbb{N} \mid h^k(n) < n_0\}.$$

6 Recorrências

6.1 Funções Iteradas

83*. Para cada função $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ abaixo, dê uma expressão para a função h^n , onde $n \in \mathbb{N}$.

(a) $h(x) = x - 2$,

(b) $h(x) = x - s$, com $s \in \mathbb{R}$,

(c) $h(x) = 3x$

(d) $h(x) = mx$, com $m \in \mathbb{R}$,

(e) $h(x) = x/2$,

(f) $h(x) = \lceil x/k \rceil$, com $k \in \mathbb{Z}^+$,

(g) $h(x) = \lfloor \sqrt[k]{x} \rfloor$, com $k \in \mathbb{N}$,

6.2 Recorrências

84*. Resolva as seguintes recorrências.

(a) $f(n) = 2f\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + 6n - 1$, para todo $n > 1$,

(b) $f(n) = 2f\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + 3n + 2$, para todo $n > 1$,

(c) $f(n) = 6f\left(\left\lfloor \frac{n}{6} \right\rfloor\right) + 2n + 3$, para todo $n > 1$,

(d) $f(n) = 6f\left(\left\lfloor \frac{n}{6} \right\rfloor\right) + 3n - 1$, para todo $n > 1$,

(e) $f(n) = 4f\left(\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor\right) + 2n - 1$, para todo $n > 1$,

(f) $f(n) = 4f\left(\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor\right) + 3n - 5$, para todo $n > 1$,

(g) $f(n) = 3f\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + n^2 - n$, para todo $n > 1$,

(h) $f(n) = 3f\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + n^2 - 2n + 1$, para todo $n > 1$,

(i) $f(n) = 3f\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + n - 2$, para todo $n > 1$,

(j) $f(n) = 3f\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + 5n - 7$, para todo $n > 1$,

- (k) $f(n) = 4f\left(\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor\right) + n^2$, para todo $n > 1$,
- (l) $f(n) = 4f\left(\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor\right) + n^2 - 7n + 5$, para todo $n > 1$,
- (m) $f(n) = 4f\left(\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor\right) + \lfloor \sqrt{n} \rfloor + 1$, para todo $n > 3$,
- (n) $f(n) = 4f\left(\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor\right) + n^2 - 3n + 2$, para todo $n > 1$,
- (o) $f(n) = 2f\left(\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor\right) + n - 3$, para todo $n > 1$,
- (p) $f(n) = 6f\left(\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor\right) + n^2 - 2n + 1$, para todo $n > 1$,
- (q) $f(n) = 2f\left(\left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor\right) + n - 1$, para todo $n > 1$,
- (r) $f(n) = f\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right) + 1$, para todo $n > 1$,
- (s) $f(n) = 2f\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right) + 1$, para todo $n > 1$,
- (t) $f(n) = f\left(\left\lceil \frac{2n}{3} \right\rceil\right) + k$, para todo $n > 1$ e para todo $k \in \mathbb{N}$,

85*. Resolva as seguintes recorrências.

- (a) $f(n) = f(n - 1) + n$, para todo $n > 0$.
- (b) $f(n) = 2f(n - 1) + 1$, para todo $n > 0$
- (c) $f(n) = 2f(n - 1) + n^2$, para todo $n \geq 1$
- (d) $f(n) = 2f(n - 1) + n$, para todo $n > 1$,
- (e) $f(n) = 3f(n - 1) + 2$, para todo $n > 1$,
- (f) $f(n) = 3f(n - 1) - 15$, para todo $n > 1$,
- (g) $f(n) = f(n - 1) + n - 1$, para todo $n > 1$,
- (h) $f(n) = f(n - 1) + 2n - 3$, para todo $n > 1$,
- (i) $f(n) = 2f(n - 1) + n - 1$, para todo $n > 1$,
- (j) $f(n) = 2f(n - 1) + 3n + 1$, para todo $n > 1$,
- (k) $f(n) = 2f(n - 1) + n^2$, para todo $n > 1$,
- (l) $f(n) = f(n - 2) + 3n + 4$, para todo $n > 1$,
- (m) $f(n) = f(n - 2) + n$, para todo $n > 1$,
- (n) $f(n) = f(n - 3) + 5n - 9$, para todo $n > 3$,

- (o) $f(n) = 2f(n - 1) + n^2 - 2n + 1$, para todo $n > 1$,
- (p) $f(n) = 3f(n - 1) + n$, para todo $n \geq 1$.
- (q) $f(n) = 3f(n - 2) + n^2$, para todo $n \geq 2$.
- (r) $f(n) = 2f(n - 2) + 2n - 2$, para todo $n \geq 2$.
- (s) $f(n) = 2f(n - 3) + 3n - 2$, para todo $n \geq 3$.
- (t) $f(n) = 3f(n - 3) + 3n - 3$, para todo $n \geq 3$.

86*. Seja $f(n)$ o número de sequências binárias de comprimento n .

- (a) Descreva $f(n)$ como uma recorrência.
- (b) Resolva esta recorrência.

87*. Uma função $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ é uma *progressão aritmética* se existe $r \in \mathbb{C}$ tal que

$$f(i + 1) - f(i) = r \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

- (a) Expresse a função f como acima por meio de uma recorrência.
- (b) Resolva esta recorrência, obtendo assim uma expressão para o termo geral da progressão aritmética.

88[ⓐ]. Dado $q \in \mathbb{C}$, uma *progressão geométrica* de razão q é uma função $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ satisfazendo

$$\frac{f(n)}{f(n - 1)} = q, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

- (a) Expresse a função f acima por meio de uma recorrência.
- (b) Resolva esta recorrência.

89[ⓐ]. Seja $n \in \mathbb{N}$, resolva as seguintes recorrências

- (a) $f(n) = 2f(n - 1)$, para todo $n \geq 2$ e $f(n) = n$, para todo $n \leq 1$.
- (b) $f(n) = 2f(n - 2)$, para todo $n \geq 2$ e $f(n) = n$, para todo $n \leq 1$.

90[@]. O número de comparações no pior caso de uma execução do algoritmo MergeSort para um vetor de n elementos é dado pela recorrência

$$T(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n < 2, \\ T(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) + T(\lceil \frac{n}{2} \rceil) + n - 1, & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

Considere as seguintes recorrências.

$$T^-(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n < 2, \\ 2T^-(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) + n - 1, & \text{se } n \geq 2. \end{cases} \quad (2)$$

e

$$T^+(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n < 2, \\ 2T^+(\lceil \frac{n}{2} \rceil) + n - 1, & \text{se } n \geq 2. \end{cases} \quad (3)$$

- Prove que $T^-(n) \leq T(n) \leq T^+(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
- Resolva as recorrências.
- Use as soluções obtidas para provar que $T^-(n) \approx n \lg n$ e $T^+(n) \approx n \lg n$.
- Conclua que $T(n) \approx n \lg n$.

91[@]. O “Master Method” ou “Master Theorem”¹¹ é um método para obtenção de soluções assintóticas para recorrências que surgem naturalmente na análise de “algoritmos de divisão e conquista”.

Tais recorrências tem a forma geral

$$T(n) = aT(n/b) + f(n),$$

onde $a \geq 1$ e $b \geq 1$, a expressão n/b pode significar tanto $\lfloor n/b \rfloor$ como $\lceil n/b \rceil$ e $f()$ é uma função genérica. A recorrência do Exercício 90 é um exemplo de caso particular desta recorrência.

Sejam a , b e $f()$ como acima e sejam $n_0 \in \mathbb{N}$ e $T^+, T^- : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ tais que

$$\begin{aligned} T^-(n) &= aT^-(\lfloor n/b \rfloor) + f(n), \\ T^+(n) &= aT^+(\lceil n/b \rceil) + f(n), \end{aligned}$$

para todo $n \geq n_0$.

Resolva estas recorrências.

¹¹Popularizado com este nome por [Cormen, Leiserson, Rivest, and Stein \(2009\)](#).

92*. Resolva as seguintes recorrências.

- (a) $f(n) = nf(n-1) + n$, para todo $n > 1$,
- (b) $f(n) = f(\lfloor \sqrt{n} \rfloor) + n^2$, para todo $n > 1$,
- (c) $f(n) = 2f(\lfloor \sqrt[3]{n} \rfloor) + n$, para todo $n > 1$.

6.3 Recorrências Lineares Homogêneas

93#. Seja $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ o conjunto das funções $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$. Dados $f, g \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ e $z \in \mathbb{C}$, definimos $f + g \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ e $zf \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ como as funções dadas por

$$\begin{aligned}(f + g)(n) &= f(n) + g(n), \\ (zf)(n) &= zf(n).\end{aligned}$$

- (a) Prove que $(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}, +)$ é um grupo comutativo.
- (b) Prove que $(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}, +)$ é um espaço vetorial sobre \mathbb{C} .

94[ⓐ]. Sejam $r_1, r_2 \in \mathbb{C} - \{0\}$. Prove que as funções $f_1, f_2: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ dadas por

$$\begin{aligned}f_1(n) &= r_1^n, \\ f_2(n) &= r_2^n,\end{aligned}$$

são linearmente independentes em $(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}, +)$ se e somente se $r_1 \neq r_2$.

95#. Sejam¹² $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{C}$.

- (a) Prove que se $g, h: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ satisfazem a recorrência

$$f(n) = a_1f(n-1) + a_2f(n-2) + \dots + a_kf(n-k), \text{ para todo } n \geq k,$$

então a função $g + h$ também satisfaz a mesma recorrência para todo $n \geq k$.

- (b) Prove que se $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ satisfaz a recorrência

$$f(n) = a_1f(n-1) + a_2f(n-2) + \dots + a_kf(n-k), \text{ para todo } n \geq k,$$

então para todo $z \in \mathbb{C}$, a função zf também satisfaz a mesma recorrência para todo $n \geq k$.

¹²Este exercício usa a notação do Exercício 93

- (c) Prove que o conjunto das funções $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ que satisfazem a recorrência

$$f(n) = a_1 f(n-1) + a_2 f(n-2) + \dots + a_k f(n-k), \text{ para todo } n \geq k,$$

é um subespaço vetorial de $(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}, +)$.

96*. Resolva as seguintes recorrências.

- (a)

$$f(n) = \begin{cases} 3, & \text{se } n \leq 1, \\ 7, & \text{se } n = 2, \\ 3f(n-1) - f(n-2) + 3f(n-3), & \text{se } n \geq 3. \end{cases}$$

- (b)

$$2f(n) = 3f(n-1) - 3f(n-2) + f(n-3), \text{ para todo } n \geq 3,$$

com

$$f(n) = n, \text{ para todo } n < 3.$$

- (c)

$$f(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n \leq 1 \\ 3, & \text{se } n = 2 \\ 7f(n-1) - 16f(n-2) + 12f(n-3), & \text{se } n \geq 3. \end{cases}$$

- (d)

$$f(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n \leq 2 \\ 5f(n-1) - 7f(n-2) + 3f(n-3), & \text{se } n \geq 3. \end{cases}$$

- (e)

$$f(n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 0 \\ 4, & \text{se } n = 1 \text{ ou } n = 2, \\ 6f(n-1) - 12f(n-2) + 8f(n-3), & \text{se } n \geq 3. \end{cases}$$

(f)

$$f(n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 0 \\ \sqrt{5} + 2^n, & \text{se } n = 1 \text{ ou } n = 2 \\ 3f(n-1) - f(n-2) - 2f(n-3), & \text{se } n \geq 3. \end{cases}$$

(g)

$$f(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n = 0 \\ 2^n, & \text{se } n = 1 \text{ ou } n = 2 \\ 6f(n-1) - 11f(n-2) + 6f(n-3), & \text{se } n \geq 3. \end{cases}$$

(h)

$$f(n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 0 \\ 9, & \text{se } n = 1 \text{ ou } n = 2 \\ 9f(n-1) - 27f(n-2) + 27f(n-3), & \text{se } n \geq 3. \end{cases}$$

(i)

$$f(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n = 0 \\ 3^n, & \text{se } n = 1 \text{ ou } n = 2 \\ 10f(n-1) - 31f(n-2) + 30f(n-3), & \text{se } n \geq 3. \end{cases}$$

(j)

$$f(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n \leq 2 \\ 8f(n-1) - 21f(n-2) + 18f(n-3), & \text{se } n \geq 3. \end{cases}$$

(k)

$$f(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n \leq 1, \\ 5f(n-1) - 6f(n-2), & \text{se } n > 1. \end{cases}$$

(l)

$$f(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n \leq 1, \\ 4f(n-1) + 3f(n-2), & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

(m)

$$f(n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 0, \\ 2, & \text{se } n = 1, \\ 2f(n-1) + 4f(n-2), & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

(n)

$$f(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n \leq 1, \\ 2f(n-1) - f(n-2), & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

(o)

$$f(n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n \leq 1, \\ 2f(n-1) - f(n-2), & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

(p)

$$f(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n \leq 1, \\ f(n-1) - f(n-2), & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

(q)

$$f(n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n \leq 1 \\ 4f(n-1) - 4f(n-2), & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

(r)

$$f(n) = \begin{cases} 4n, & \text{se } n < 2, \\ 4f(n-2), & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

(s)

$$f(n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 0 \\ 6, & \text{se } n = 1 \\ 6f(n-1) - 9f(n-2), & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

(t)

$$f(n) = \begin{cases} 2n, & \text{se } n < 2, \\ f(n-2), & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

97*. Resolva as seguintes recorrências.

(a) ¹³

$$f(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n \leq 1, \\ nf(n-1) + n(n-1)f(n-2), & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

¹³**Sugestão:** Considere a função

$$g(n) = \frac{f(n)}{n!}.$$

(b) ¹⁴

$$f(n) = \begin{cases} n + 1, & \text{se } n \leq 1, \\ \sqrt{f(n-1)f(n-2)}, & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

(c) ¹⁵

$$f(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n = 0, \\ \sqrt{1 + f(n-1)^2}, & \text{se } n \geq 1. \end{cases}$$

(d) ¹⁶

$$f(n) = \begin{cases} n + 1, & \text{se } n \leq 1, \\ f(n-1)f(n-2), & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

6.4 Recorrências Lineares não Homogêneas

98[@]. Resolva as seguintes recorrências.

(a)

$$f(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n = 0, \\ f(n-1) + 1, & \text{se } n > 0. \end{cases}$$

(b)

$$f(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n = 0, \\ 2f(n-1) + 1, & \text{se } n > 0. \end{cases}$$

(c)

$$f(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n = 0, \\ f(n-1) + n, & \text{se } n > 0 \end{cases}$$

¹⁴**Sugestão:** Considere a função

$$g(n) = \lg f(n).$$

¹⁵**Sugestão:** Considere a função

$$g(n) = f(n)^2.$$

¹⁶**Sugestão:** Considere a função

$$g(n) = \lg f(n).$$

(d)

$$f(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n < 1, \\ 2f(n-1) + n, & \text{se } n \geq 1. \end{cases}$$

(e)

$$f(n) = 2f(n-1) + n^2, \text{ para todo } n \geq 1$$

(f)

$$f(n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n \leq 1, \\ 3f(n-2) + \frac{1}{3^n}, & \text{se } n > 1. \end{cases}$$

(g)

$$f(n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n \leq 1, \\ 2f(n-2) + \frac{1}{2^n}, & \text{se } n > 1. \end{cases}$$

(h)

$$f(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n < 1 \\ 2f(n-1) + 2n - 1, & \text{se } n \geq 1 \end{cases}$$

(i)

$$f(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n < 1 \\ f(n-1) + 2n - 1, & \text{se } n \geq 1 \end{cases}$$

(j)

$$f(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n < 1 \\ 2f(n-1) + n^2 + n, & \text{se } n \geq 1 \end{cases}$$

(k)

$$f(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n < 2, \\ f(n-1) + f(n-2) + 1, & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

(l)

$$f(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n < 2, \\ 7f(n-1) - 12f(n-2) + 2n, & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

(m)

$$f(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n < 2, \\ 5f(n-1) - 6f(n-2) + n \cdot 3^n, & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

$$(n) \quad f(n) = \begin{cases} 5n, & \text{se } n < 2, \\ 7f(n-1) - 10f(n-2) + n \cdot 5^n, & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

$$(o) \quad f(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n < 2, \\ 7f(n-1) - 10f(n-2) + n \cdot 5^n, & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

$$(p) \quad f(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n < 2, \\ 5f(n-1) - 6f(n-2) + n \cdot 5^n, & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

$$(q) \quad f(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n < 2, \\ 7f(n-1) - 10f(n-2) + n \cdot 3^n, & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

$$(r) \quad f(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n < 2, \\ 8f(n-1) - 15f(n-2) + n \cdot 2^n, & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

$$(s) \quad f(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n < 2, \\ f(n-1) + f(n-2) + 6n + 3, & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

$$(t) \quad f(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n < 2, \\ 5f(n-1) - 4f(n-2) + 2n \cdot 5^n + 2, & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

99*. O “**Triângulo de Cantor**”, (batizado em homenagem ao Georg Cantor), é uma “tabela infinita” triangular em que cada par $(i, j) \in \mathbb{N}^2$ ocupa uma posição de maneira que, para todo $n \in \mathbb{N}$, a n -ésima linha do triângulo é formada por todos os pares $(i, j) \in \mathbb{N}^2$ satisfazendo $i + j = n$.

As linhas, colunas e posições começam a contar a partir de 0, de cima para baixo e da esquerda para direita. Assim, por exemplo, $(0, 0)$ ocupa a posição 0 (linha 0, coluna 0); $(0, 1)$ ocupa a posição 1 (linha 1, coluna 0); $(1, 0)$ ocupa a posição 2 (linha 1, coluna 1); $(0, 2)$ ocupa a posição 3 (linha 2, coluna 0) e assim por diante. As 7 primeiras linhas do Triângulo de Cantor são

$(0, 0)$
 $(0, 1) \quad (1, 0)$
 $(0, 2) \quad (1, 1) \quad (2, 0)$
 $(0, 3) \quad (1, 2) \quad (2, 1) \quad (3, 0)$
 $(0, 4) \quad (1, 3) \quad (2, 2) \quad (3, 1) \quad (4, 0)$
 $(0, 5) \quad (1, 4) \quad (2, 3) \quad (3, 2) \quad (4, 1) \quad (5, 0)$
 $(0, 6) \quad (1, 5) \quad (2, 4) \quad (3, 3) \quad (4, 2) \quad (5, 1) \quad (6, 0)$

- (a) Seja $l(n)$ o número de pares na n -ésima linha do Triângulo de Cantor
- Descreva $l(n)$ como uma recorrência.
 - Resolva essa recorrência.
- (b) Seja $t(n)$ o número de pares no Triângulo de Cantor até a n -ésima
- Descreva $t(n)$ como uma recorrência.
 - Resolva essa recorrência.
- (c) Seja $p(i, j)$ a posição ocupada pelo par (i, j) no Triângulo de Cantor. Dê uma expressão não recorrente para $p(i, j)$.

100*. O seguinte algoritmo devolve o n -ésimo termo da sequência de Fibonacci.

$F(n)$

Se $n \leq 1$
 Devolva n
 Devolva $F(n - 1) + F(n - 2)$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $S(n)$ o número de somas efetuado na execução de $F(n)$.

- Expresse $S(n)$ por uma recorrência.
- Resolva essa recorrência.

101*. Para todo $n \geq 0$, um n -cubo é um diagrama composto por pontos e linhas que ligam pares de pontos entre si. O 0-cubo tem um ponto e nenhuma linha. Para todo $n > 0$, o n -cubo é o diagrama obtido desenhando-se lado a lado duas cópias do $(n - 1)$ -cubo e ligando cada ponto de uma das cópias ao seu correspondente na outra cópia por uma linha.

- (a) Descreva o número de pontos de um n -cubo através de uma recorrência.
- (b) Resolva esta recorrência.
- (c) Descreva o número de linhas de um n -cubo através de uma recorrência.
- (d) Resolva esta recorrência.

6.5 Somatórios

102[®]. Dê uma expressão livre de somatórios para $\sum_{i=0}^n i$.

103[®]. Dado $q \in \mathbb{C} - \{0\}$, uma *progressão geométrica*¹⁷ de razão q é uma função $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ satisfazendo

$$\frac{f(n+1)}{f(n)} = q, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Assim, a soma dos n termos iniciais de uma progressão geométrica é dada por

$$s(n) = \sum_{i=0}^{n-1} f(i).$$

- (a) Expresse a função f acima por meio de uma recorrência linear homogênea.
- (b) Resolva esta recorrência, obtendo assim uma expressão para o termo geral da progressão geométrica.
- (c) Dê uma expressão livre de somatórios para $s(n)$.

104[®]. Uma função $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ é uma *progressão aritmética*¹⁸ se existe $r \in \mathbb{C}$ tal que

$$f(i+1) - f(i) = r \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Assim, a soma dos n termos iniciais de uma progressão aritmética é dada por

$$s(n) = \sum_{i=0}^{n-1} f(i).$$

¹⁷cfr. Exercício 88

¹⁸cfr. Exercício 87

- (a) Expresse a função f acima por meio de uma recorrência linear não homogênea.
- (b) Resolva esta recorrência, obtendo assim uma expressão para o termo geral da progressão aritmética.
- (c) Dê uma expressão livre de somatórios para $s(n)$.

105[®]. Dê uma expressão¹⁹ livre de somatórios para $\sum_{i=0}^n i2^i$.

106^{*}. Calcule o valor dos seguintes somatórios.

(a)

$$\sum_{i=0}^n i^2.$$

(b)

$$\sum_{i=0}^n i^3.$$

(c)

$$\sum_{i=0}^n i(i-1).$$

(d)

$$\sum_{i=0}^n \frac{i}{2^i}.$$

(e)

$$\sum_{i=0}^n i^2 3^i.$$

(f)

$$\sum_{i=0}^n i 256^i.$$

(g)

$$\sum_{i=0}^n \frac{i^2}{5^i}.$$

¹⁹cfr. Exercício 39

(h)

$$\sum_{i=0}^n i2^{i-1}.$$

(i)

$$\sum_{i=0}^n i^2(i-1).$$

(j)

$$\sum_{i=0}^n i(2^i - i).$$

107*. A *média*²⁰ do número de comparações efetuadas na execução do algoritmo de busca binária em um vetor de n posições é dada por²¹

$$\begin{aligned}\mu(n) &= 1 \times \frac{1}{n} + 2 \times \frac{2}{n} + 3 \times \frac{4}{n} + 4 \times \frac{8}{n} + \dots \\ &\quad + \lfloor \lg n \rfloor \times \frac{2^{\lfloor \lg n \rfloor - 1}}{n} \\ &\quad + (\lfloor \lg n \rfloor + 1) \times \frac{(n - \sum_{i=1}^{\lfloor \lg n \rfloor} 2^{i-1})}{n}\end{aligned}$$

(a) Dê uma expressão livre de somatórios²² para $\mu(n)$.

(b) Conclua do item anterior que $\mu(n) \approx \lfloor \lg n \rfloor$.

108*. Dê uma expressão livre de somatórios para

$$s(n) = \sum_{i=0}^n F(i),$$

onde $F(n)$ é a sequência de Fibonacci²³.

²⁰Também chamada *número esperado* ou *esperança*.

²¹Assume-se aqui que a busca por qualquer dos n elementos do vetor é equiprovável e bem-sucedida.

²²**Sugestão:** use os resultados dos Exercícios 38 e 39

²³Veja o Exercício 44.

6.6 Algumas Aplicações

109[ⓐ]. Em muitas situações de cálculo numérico trabalha-se com matrizes triangulares inferiores, isto é, matrizes quadradas cujos elementos acima da diagonal principal são todos nulos. Nesses casos é comum representar uma matriz triangular inferior de n linhas por um vetor contendo somente as posições não-nulas da matriz, o que resulta numa economia de espaço de quase 50%.

Suponha que a matriz triangular inferior M , de n linhas indexadas de 1 a n , será representada por um vetor $v[0..N(n) - 1]$, onde $N(n)$ é o tamanho do vetor necessário para representar uma matriz triangular inferior de n linhas.

- (a) Descreva $N(n)$ através de uma recorrência.
- (b) Resolva esta recorrência.
- (c) Qual o índice de v que corresponde à posição $M[i, j]$?

110[ⓐ]. Uma *árvore binária* T é uma *árvore vazia*, denotada por λ ou é um par $(E(T), D(T))$ onde $E(T)$ e $D(T)$ são árvores binárias, chamadas respectivamente de *subárvore esquerda* e *subárvore direita* de T . Vamos denotar por \mathcal{B} o conjunto das árvores binárias.

O *tamanho* de uma árvore T é dada por

$$|T| = \begin{cases} 0, & \text{se } T = \lambda, \\ |E(T)| + |D(T)| + 1, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Uma *árvore trivial* é uma árvore de tamanho 1.

A *altura* de uma árvore T é dada por

$$h(T) = \begin{cases} 0, & \text{se } T = \lambda, \\ \max\{h(E(T)), h(D(T))\} + 1, & \text{se } T \neq \lambda. \end{cases}$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $h^+(n)$ a maior altura possível de uma árvore binária de tamanho n .

- (a) Expresse $h^+(n)$ como uma recorrência.
- (b) Resolva esta recorrência.

111[Ⓐ]. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $t^+(n)$ o maior tamanho possível de uma árvore binária²⁴ de altura n .

- (a) Expresse $t^+(n)$ como uma recorrência.
- (b) Resolva esta recorrência.

112[Ⓐ]. Seja *AVL* o conjunto das árvores binárias²⁵ T satisfazendo

$$E(T) \in \text{AVL e } D(T) \in \text{AVL.}$$

e

$$|h(E(T)) - h(D(T))| \leq 1.$$

Seja $t^-(n)$ o menor tamanho possível de uma árvore *AVL* de altura n .

- (a) Expresse $t^-(n)$ como uma recorrência.
- (b) Resolva esta recorrência.

113[Ⓐ]. Resolva a seguinte recorrência que expressa o número médio de comparações na execução do algoritmo *QuickSort*.

$$C(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n < 2, \\ \frac{(n+1)}{n}C(n-1) + \frac{2(n-1)}{n}, & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

²⁴Veja o Exercício 110.

²⁵Veja o Exercício 110.

7 Fundamentos de Contagem

114. Em se tratando de contagem, é interessante ter uma noção intuitiva de grandezas e das relações entre elas. No contexto das ciências exatas em geral, é usual expressar grandezas como potências de 10. No contexto da Ciência da Computação, entretanto, é mais natural expressar grandezas como potências de 2. Nas questões abaixo, n representa uma quantidade e o exercício consiste em determinar os valores de k e d para os quais

$$10^d \leq n < 10^{d+1},$$

$$2^k \leq n < 2^{k+1}.$$

- (a) Tempo, em segundos²⁶:

- i. n = uma hora.
- ii. n = um dia.
- iii. n = uma semana.
- iv. n = um mês.
- v. n = um ano.
- vi. n = sua idade.
- vii. n = tempo decorrido desde as 00h00:00 de 1 de janeiro de 1970²⁷.
- viii. n = um século.
- ix. n = um milênio.
- x. n = um milhão de anos.
- xi. n = idade estimada da Terra²⁸.
- xii. n = idade estimada da Via Láctea²⁹.
- xiii. n = idade estimada do universo observável³⁰.

- (b) Distância, em metros³¹:

- i. n = maior distância possível entre dois pontos na superfície da Terra³².

²⁶veja <http://en.wikipedia.org/wiki/Second>

²⁷veja [http://en.wikipedia.org/wiki/Date_\(Unix\)](http://en.wikipedia.org/wiki/Date_(Unix))

²⁸veja http://en.wikipedia.org/wiki/Earth_Age

²⁹veja http://en.wikipedia.org/wiki/Milky_Way

³⁰veja http://en.wikipedia.org/wiki/Age_of_the_Universe

³¹veja <http://en.wikipedia.org/wiki/Metre>

³²veja <http://en.wikipedia.org/wiki/Earth>

- ii. n = distância da Terra ao Sol³³.
 - iii. n = um ano-luz.
 - iv. n = diâmetro estimado da Via Láctea³⁴.
- (c) Velocidade, em metros por segundo:
- i. n = de um homem.
 - ii. n = de um animal.
 - iii. n = de um veículo terrestre.
 - iv. n = de um veículo aquático.
 - v. n = de um veículo aéreo.
 - vi. n = da Terra em relação ao Sol³⁵.
 - vii. n = da luz³⁶.
- (d) Massa, em gramas:
- i. n = de um homem.
 - ii. n = de um carro.
 - iii. n = de um elefante adulto³⁷.
 - iv. n = de um Boeing-737.
 - v. n = água na Terra³⁸.
 - vi. n = da Terra³⁹.
 - vii. n = do Sol⁴⁰.
 - viii. n = da Via Láctea⁴¹.
 - ix. n = da Lua⁴².
 - x. n = do universo observável⁴³.
- (e) Volume, em litros:
- i. n = de um homem.
 - ii. n = de um carro.

³³veja <http://en.wikipedia.org/wiki/Earth>

³⁴veja http://en.wikipedia.org/wiki/Milky_Way

³⁵veja <http://en.wikipedia.org/wiki/Earth>

³⁶veja <http://en.wikipedia.org/wiki/Earth>

³⁷veja <http://en.wikipedia.org/wiki/Elephant>

³⁸veja <http://en.wikipedia.org/wiki/Hydrosphere>

³⁹veja <http://en.wikipedia.org/wiki/Earth>

⁴⁰veja <http://en.wikipedia.org/wiki/Sun>

⁴¹veja http://en.wikipedia.org/wiki/Milky_Way

⁴²veja <http://en.wikipedia.org/wiki/Moon>

⁴³veja http://en.wikipedia.org/wiki/Mass_of_the_observable_universe

- iii. $n =$ da água oceânica na Terra⁴⁴.
- iv. $n =$ da Terra⁴⁵.
- v. $n =$ da Lua⁴⁶.
- vi. $n =$ do Sol⁴⁷.
- vii. $n =$ do universo observável⁴⁸.

(f) Outras quantidades:

- i. $n =$ população de Curitiba.
- ii. $n =$ população do Paraná.
- iii. $n =$ população do Brasil.
- iv. $n =$ população da Terra.
- v. $n =$ número de estrelas no universo observável⁴⁹.
- vi. $n =$ número estimado de átomos no universo observável⁵⁰.
- vii. $n =$ produto interno bruto brasileiro em reais.
- viii. $n =$ dívida interna brasileira em reais.
- ix. $n =$ número de células nervosas no corpo humano.

115#. Prove que a composição de funções bijetoras é uma bijeção.

⁴⁴veja <http://en.wikipedia.org/wiki/Ocean>

⁴⁵veja <http://en.wikipedia.org/wiki/Earth>

⁴⁶veja <http://en.wikipedia.org/wiki/Moon>

⁴⁷veja <http://en.wikipedia.org/wiki/Sun>

⁴⁸veja http://en.wikipedia.org/wiki/Observable_universe

⁴⁹veja http://en.wikipedia.org/wiki/Observable_universe

⁵⁰veja http://en.wikipedia.org/wiki/Observable_universe

8 União e Produto Cartesiano

116[#]. Sabendo que se A e B são conjuntos finitos, então

$$|A \times B| = |A||B|,$$

prove por indução em n que se A_1, \dots, A_n são conjuntos finitos então,

$$\left| \prod_{i=1}^n A_i \right| = \prod_{i=1}^n |A_i|$$

117[@]. Quantos divisores naturais tem o número 72?

118^{*}. Quantos divisores naturais tem o número 360?

119[#]. Prove que o número de divisores naturais de um inteiro $n \in \mathbb{N}$ é

$$\prod_{i=1}^k (m_i + 1),$$

onde

$$\prod_{i=1}^k p_i^{m_i},$$

é a decomposição de n em fatores primos.

9 Sequências

- 120[@]. Um “bit” é um elemento de $\{0, 1\}$.
Se um “byte” é uma sequência de 8 “bits”, quantos valores diferentes pode assumir um “byte”?
- 121[@]. Um teclado convencional tem 47 “teclas que geram caracteres”. Cada tecla pode gerar dois caracteres, conforme combinada ou não com a tecla “shift”. Chamaremos de *caracteres convencionais* os caracteres que podem ser gerados desta maneira.
Uma *senha convencional* é uma sequência de caracteres convencionais. Considere um sistema de quebra de senhas à base de “força bruta”, isto é, que tenta todas as senhas possíveis, e suponha que o sistema é capaz de testar 1 (uma) senha por segundo.
- (a) Qual o menor tamanho n que deve ter uma senha convencional para garantir que tal sistema não seja capaz de testar todas as senhas possíveis em um dia?
 - (b) Se o sistema atacante for um milhão de vezes mais rápido, para quanto mudará este valor?
- 122[@]. Qual o maior valor de n tal que é possível gravar em um dvd (4 700 372 992 bytes) todos os possíveis arquivos de tamanho até n ?
- 123*. Quantos resultados possíveis existem para uma sequência de
- (a) n lançamentos consecutivos de uma moeda?
 - (b) até n lançamentos consecutivos de uma moeda?
- 124*. Quantos resultados possíveis existem para uma sequência de
- (a) n lançamentos consecutivos de um dado?
 - (b) até n lançamentos consecutivos de um dado?
- 125*. O Dicionário Houaiss da Língua Portuguesa registra 228 500 verbetes utilizando o alfabeto de 26 letras. O mais longo deles tem 46 letras.

Supondo que todas as palavras de até 46 letras sejam equiprováveis, qual a probabilidade de uma palavra de até 46 letras escolhida uniformemente ao acaso estar registrada no Houaiss?

- 126*. Um *palíndromo* sobre um conjunto A é uma sequência (a_1, \dots, a_k) de elementos de A que “permanece a mesma quando lida na ordem reversa”, isto é, que satisfaz

$$a_i = a_{k-i+1}, \text{ para todo } 1 \leq i \leq k.$$

- (a) Enumere todos os palíndromos de tamanho 4 sobre $\{a, b, c\}$.
(b) Enumere todos os palíndromos de tamanho 5 sobre $\{a, b, c\}$.
(c) Qual o número de palíndromos de tamanho k sobre um conjunto de n elementos?
- 127*. Um protocolo de comunicação usa três tipos de pacotes de dados, T_1 , T_2 e T_3 , diferenciados por um campo inicial. Os pacotes do tipo T_1 tem, 4 bits de dados após o campo inicial (identificação do tipo); os pacotes do tipo T_2 tem 8 bits de dados; e os pacotes do tipo T_3 tem 10 bits de dados. Qual o número de pacotes distintos que existem neste protocolo?
- 128*. O endereço de um dispositivo na InterNet (endereço IP) é um número de 4 *bytes*.

- (a) Qual o número de endereços IP possíveis?
(b) Dos endereços possíveis, as seguintes faixas de endereços são reservadas para redes locais:
- 10.0.0.0 a 10.255.255.255
 - 172.16.0.0 a 172.31.255.255
 - 192.168.0.0 a 192.168.255.255
 - 169.254.0.0 a 169.254.255.255

Qual o número de endereços IP não-reservados na rede?

- 129*. Interfaces de rede recebem uma identificação do fabricante conhecida como *endereço MAC* que é um número de 48 bits⁵¹. Se a inclusão

⁵¹Atualmente é um número de 64 bits, o que já é usado por tecnologias como *Fire Wire*, *IPv6*, *802.15.4*).

digital for um sucesso absoluto, quantas interfaces de rede poderiam ser dadas a cada habitante do planeta?

- 130*. Em um jantar foram servidos 2 tipos de entrada (pães com patês e salada), 3 tipos de massa (espaguete, talharim e nhoque), 4 tipos de molho (bolonhesa, pesto, branco e funghi), e 2 tipos de sobremesa (sorvete e salada de frutas). Sabendo que nenhum convidado escolheu a mesma combinação, e que todos que escolheram a salada não escolheram nhoque, qual o número máximo de convidados?
- 131*. Uma *data* é uma sequência de 8 dígitos da forma $d_1d_2m_1m_2a_1a_2a_3a_4$, onde d_1d_2 , m_1m_2 e $a_1a_2a_3a_4$ são dígitos representando o dia, mês e ano, respectivamente. Por exemplo, 25122012 e 14071889 são datas e 31022013 e 48151623 não são.
- (a) Desconsiderando os anos bissextos, quantas das sequências de 8 dígitos são datas válidas?
 - (b) Qual a probabilidade de uma sequência de 8 dígitos escolhida uniformemente ao acaso ser uma data?
 - (c) Se um gerador aleatório gera uma sequência de 8 dígitos a cada segundo (independente e uniformemente), qual é a probabilidade de não ter gerado nenhuma data ao final de um minuto?
- 132*. A licença de um veículo no Brasil é uma cadeia composta por 3 letras seguida de 4 dígitos. Quantos veículos licenciados pode haver simultaneamente no Brasil? Compare com a resposta do exercício 114(f)iii.
- 133*. Os números de telefone no Brasil podem ser números de 8 dígitos, sendo que o primeiro não pode ser 0 ou de 9 dígitos, sendo o primeiro necessariamente um 9.
- (a) Quantos números de telefone são possíveis no Brasil?
 - (b) Existem mais números de telefone ou licenças de veículo⁵² possíveis?
- 134*. Um certo monitor de computador tem resolução de 640 por 480 *pixels* com resolução de cor de 32 bits (também conhecido como “truecolor”,

⁵²Veja o Exercício 132

isto é, cada *pixel* pode assumir 2^{32} cores diferentes). Sua frequência de varredura (isto é, a frequência com que a imagem exibida pode ser modificada) é de 60 Hz. Quanto tempo, no mínimo, levaria o monitor⁵³ para exibir todas as imagens possíveis?

⁵³Estes parâmetros são mais ou menos os mesmos em se tratando de um televisor convencional.

10 Funções

- 135[@]. De quantas maneiras diferentes é possível distribuir k bolas distintas por n urnas distintas?
- 136[@]. Quantos circuitos combinacionais funcionalmente diferentes com e entradas e s saídas são possíveis?
- 137[@]. De quantas maneiras diferentes podem acontecer os aniversários de um grupo de n pessoas?
- 138[#]. Deduza que existem n^k funções $[k] \rightarrow [n]$ através dos seguintes passos.
- Defina $f(k, n) :=$ número de funções $[k] \rightarrow [n]$.
 - Observe que cada função $f: [k] \rightarrow [n]$ corresponde a um par (x, g) onde $x \in [n]$ corresponde à imagem de k por f e $g: [k-1] \rightarrow [n]$ corresponde às imagens de $1, \dots, k-1$ por f .
 - Use esta observação para descrever $f(k, n)$ por meio de uma recorrência.
 - Resolva esta recorrência.
- 139^{*}. As letras do código MORSE são formadas por uma sequência de traços (-) e pontos (.), sendo permitidas repetições. Observe alguns exemplos utilizando quantidades distintas de símbolos:
- 3 símbolos: (- , . , -)
 - 4 símbolos: (. , . , - , .)
 - 5 símbolos: (- , - , . , - , .)
- Nessas condições, determine quantas letras poderiam ser representadas utilizando-se, no máximo, 8 símbolos?
- 140^{*}. (VUNESP-04) Um certo tipo de código usa apenas dois símbolos, o número zero (0) e o número (1) e, considerando esses símbolos como letras, podem-se formar palavras. Por exemplo: 0, 01, 00, 001 e 110 são algumas palavras de uma, duas e três letras desse código. O número máximo de palavras com cinco letras ou menos, que podem ser formadas com esse código é:

10.1 Funções Injetoras (Arranjos)

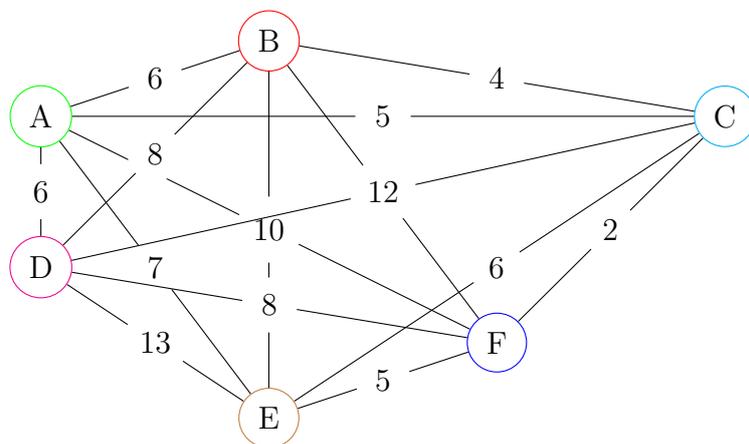
- 141*. (VITA-SP) Considere os números de dois a seis algarismos distintos formados utilizando-se apenas 1, 2, 4, 5, 7 e 8. Quantos desses números são ímpares e começam com um dígito par?
- 142*. (VUDESC) O número de anagramas de quatro letras, começando com a letra **G** que pode ser formado com a palavra PORTUGAL é:
- 143*. (VUFPR) Dentre todos os números de quatro algarismos distintos formados com algarismo pertencentes ao conjunto $\{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, quantos são divisíveis por 2?
- 144*. (UFCE) Qual é a quantidade de números inteiros formados por três algarismos distintos, escolhidos dentre 1, 3, 5, 7 e 9 e que são maiores que 200 e menores que 800.

10.2 Funções Bijetoras (Permutações)

- 145[®]. Colocando todos os números obtidos pelas permutações dos dígitos de $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ em ordem crescente, qual o lugar ocupado pelo número 43521?
- 146*. Um clube resolve fazer uma Semana de Cinema. Para isso, os organizadores escolhem sete filmes, que serão exibidos um por dia. Porém, ao elaborar a programação, eles decidem que três desses filmes, que são de ficção científica, devem ser exibidos em dias consecutivos. Qual o número de maneiras diferentes que se pode fazer a programação.
- 147*. Sobre uma mesa estão dispostos livros distintos, sendo 4 de algoritmos, 2 de arquitetura e 5 de cálculo. Todos esses livros são empilhados sobre a mesa de tal forma que aqueles que tratam do mesmo assunto estejam juntos. Considerando-se a sequência de livros que é formada em cada pilha, o número exato de maneiras com que isso pode ser realizado é igual a:

148[@]. Dois meninos e três meninas formarão uma roda dando-se as mãos. De quantos modos diferentes poderão formar a roda de modo que os dois meninos não fiquem juntos?

149^{*}. (ENEM) João mora na cidade **A** e precisa visitar cinco clientes, localizados em cidades diferentes da sua, conforme ilustra a figura abaixo. Cada trajeto possível pode ser representado por uma sequência de 7 letras. Por exemplo, o trajeto **ABCDEF A**, informa que ele sairá da cidade **A**, visitando as cidades **B**, **C**, **D**, **E** e **F** nesta ordem, voltando para a cidade **A**. Além disso, o número indicado entre as letras informa o custo do deslocamento entre as cidades.



Como João quer economizar, ele precisa determinar qual o trajeto de menor custo para visitar os cinco clientes. Examinando a figura, percebe que precisa considerar somente parte das sequências, pois os trajetos **ABCDEF A** e **AFEDCBA** tem o mesmo custo. Ele gasta 1min20s para examinar uma sequência e descartar sua simétrica, conforme apresentado. O tempo mínimo necessário para João verificar todas as sequências possíveis no problema é de

150^{*}. Uma família é composta por seis pessoas: o pai, a mãe e quatro filhos. Num restaurante, essa família vai ocupar uma mesa redonda. Em quantas disposições diferentes essas pessoas podem se sentar em torno da mesa de modo que o pai e a mãe fiquem juntos?

151[#]. De quantos modos distintos 5 pessoas podem sentar-se em volta de uma mesa:

- (a) circular?
- (b) quadrada?
- (c) retangular?

152^{*}. (VUFU-MG (1996)) Quer-se colocar as bandeiras de oito países em uma praça de forma octagonal, de modo que as bandeiras fiquem nos vértices do octógono e que as bandeiras de Brasil e Portugal ocupem vértices consecutivos. Pode-se fazer isso de quantas maneiras?

10.3 Subconjuntos (Combinações)

153[@]. A *mega-sena* é uma loteria onde são sorteados 6 dentre os números de 1 a 60, sendo todos os resultados possíveis equiprováveis.

Para cada $k \geq 6$, uma *k-aposta* é uma escolha de k dentre os números de 1 a 60. Ganha-se a loteria com uma *k-aposta* se 6 dentre os k números que compõem esta *k-aposta* são os sorteados. Uma *aposta simples* é uma 6-aposta.

- (a) Quantos são os resultados possíveis de um sorteio da *mega-sena*?
- (b) Qual a chance de ganhar a *mega-sena* com uma aposta simples?
- (c) Quantas vezes maior a chance de ganhar a *mega-sena* com uma 7-aposta, comparada com a chance de ganhar com uma aposta simples?
- (d) Em geral, quantas vezes maior a chance de ganhar a *mega-sena* com uma k -aposta, comparada com a chance de ganhar com uma aposta simples?

154[#]. Seja A um conjunto finito e seja $k \in \mathbb{N}$. Prove que

$$\binom{A}{k} \sim \binom{A}{|A| - k}.$$

155^{*}. Numa formatura de 55 alunos de Ciência da Computação, cada aluno cumprimentou cada um de seus colegas exatamente uma vez, parabenizando-o por ter se formado. Quantos cumprimentos foram trocados?

156#. Prove⁵⁴ que

$$\binom{n}{k} \sim \binom{n}{n-k},$$

para todo $n, k \in \mathbb{N}$.

157#. Quantas são as sequências binárias de n dígitos com

- exatamente k dígitos 1s?
- pelo menos k dígitos 1s?
- no máximo k dígitos 1s?

158*. Numa sala⁵⁵ há 5 lugares e 7 pessoas. De quantas modos diferentes essas pessoas podem ocupar a sala, sendo que até 5 podem ficar sentadas e o resto em pé?

159*. De quantas maneiras⁵⁶ podem ser escolhidos 3 números naturais distintos de 1 a 30 de modo que sua soma seja par?

160*. Ao final de um campeonato de futebol⁵⁷, somaram-se as pontuações das equipes, obtendo-se um total de 35 pontos. Cada equipe jogou com todos os adversários apenas uma vez. Determine quantos empates houve no campeonato, sabendo que cada vitória valia 3 pontos, cada empate valia 1 ponto e que derrotas não pontuavam.

161#. Prove que

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n,$$

usando resultados de contagem.

162*. Considere um baralho de 52 cartas divididas igualmente entre os 4 naipes (ouros, espadas, copas e paus).

⁵⁴**Sugestão:** use o Exercício 154

⁵⁵Questão de vestibular da PUC-SP; contribuição de Gabriel Gugik

⁵⁶Questão de vestibular da UNICAMP; contribuição de Gabriel Gugik

⁵⁷Questão de vestibular da IME (2004); contribuição de Gabriel Gugik

- (a) Qual é a probabilidade de, numa mão de 10 cartas, exatamente 2 delas serem de espadas?
- (b) Dentre todas as $\binom{52}{8}$ mãos possíveis de 8 cartas, quantas delas têm exatamente 2 cartas de cada naipe?
- 163*. Uma urna contém a bolas azuis e v bolas vermelhas todas distintas entre si. De quantas maneiras é possível retirar desta urna uma amostra de n bolas com exatamente k bolas azuis?
- 164*. Dado $n \in \mathbb{N}$, um *grafo de n vértices* é um conjunto $G \subseteq \binom{[n]}{2}$. Cada elemento de $[n]$ é chamado de *vértice* de G e cada $\{u, v\} \in G$ é chamado de *aresta* de G . Em cada item, explique o raciocínio que leva à resposta.
- (a) Quantos diferentes grafos de n vértices existem?
- (b) Quantos diferentes grafos de n vértices com m arestas existem?
- (c) Uma *descrição* de um grafo G é uma sequência de $2|G| + 1$ inteiros. O primeiro inteiro é o número de vértices de G . Cada um dos $|G|$ pares de inteiros seguintes representa uma aresta de G . Por exemplo as sequências $(3, 1, 2, 2, 3)$, $(3, 2, 1, 2, 3)$ e $(3, 2, 3, 1, 2)$ são três descrições diferentes do grafo $G = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}\}$ de 3 vértices. Quantas descrições diferentes tem um mesmo grafo G de n vértices e m arestas?

11 Composições

- 165*. Quantas composições admite um inteiro n ?
- 166*. Quantas composições fracas admite um inteiro n ?
- 167*. De quantas maneiras é possível distribuir k bolas idênticas por n urnas distintas, de maneira que cada urna tenha pelo menos m bolas?
- 168*. De quantas maneiras é possível distribuir k bolas idênticas por n urnas distintas, de maneira que cada urna u tenha pelo menos $m(u)$ bolas?

169#. Em função dos valores de k e n , quantas soluções inteiras não negativas (ou seja, $x_i \geq 0$, para todo $i \in [k]$) distintas admitem as seguintes equações.

$$(a) \sum_{i=1}^k x_i = n.$$

$$(b) \sum_{i=1}^k x_i \leq n.$$

170#. Seja $k, n \in \mathbb{N}$ e $k \leq n$ de quantas maneiras distintas podemos escrever n como sendo uma *combinação linear* de k inteiros positivos ($x_i \in \mathbb{N}$ e $x_i < n$, com $i \in [k]$) multiplicados por constantes também inteiras positivas ($a_i \in \mathbb{N}$ e $a_i < n$, com $i \in [k]$), isto é

$$\sum_{i=1}^k a_i x_i = n.$$

171#. Num certo país, as moedas são só de dois tipos: 2 e 5 centavos. De quantas maneiras é possível trocar

- (a) 12 centavos
- (b) 20 centavos
- (c) 92 centavos
- (d) N centavos

por moedas de 2 e/ou de 5 centavos?

12 Inclusão/Exclusão

172[®]. Quantos são os inteiros positivos menores ou iguais a 1000 que são divisíveis por 3 ou por 5 ou por 7?

Generalize o raciocínio dando uma expressão para o número de inteiros positivos menores ou iguais a n que são divisíveis por pelo menos um dentre d_1, d_2, \dots, d_k .

173*. Quantos são os inteiros positivos menores ou iguais a 2001 que são múltiplos de 3 ou 4 mas não são de 5?

174*. Quantos são os inteiros positivos menores ou iguais a 10 000 que são múltiplos de 4 ou 6 ou 10?

175*. Qual o número de inteiros positivos menores ou iguais a 1000 que são ímpares ou quadrados de inteiros?

Generalize a resposta dando uma expressão para o número de inteiros positivos menores ou iguais a n que são ímpares ou quadrados de inteiros. Explique o raciocínio que leva à resposta.

176*. Qual o número de soluções inteiras de⁵⁸

$$x_1 + x_2 + x_3 = 12, 0 \leq x_i \leq 5?$$

177#. Usando o princípio da Inclusão/Exclusão e o fato de que os números compostos (i.e., $a = b.c$, com $a, b, c \in \mathbb{N} - 1$ não é composto nem primo) menores ou iguais a n são divisíveis por algum número primo menor ou igual a k tal que $k = \lfloor \sqrt{n} \rfloor$, determine:

(a) O número de primos que são menores ou iguais a 111

(b) O número de primos menores ou iguais à n

⁵⁸**Sugestão:** Para cada $i \in [3]$, considere o conjunto

$$G_i := \{(x_1, x_2, x_3) \in S \mid x_i > 5\},$$

onde S é o conjunto das soluções inteiras não negativas de $x_1 + x_2 + x_3 = 12$.

178#. Em um jogo, um dado de 6 faces numeradas é jogado 5 vezes e o jogador ganha se o resultado da última jogada for igual ao de pelo menos uma das jogadas anteriores. Qual é a probabilidade de ganhar neste jogo?⁵⁹

179#. Uma classe tem $2n$ estudantes agrupados em n duplas⁶⁰.

(a) Mostre que existem $(2n)!/(2^n n!)$ maneiras de agrupar os $2n$ estudantes em n duplas.

(b) Considere um agrupamento inicial dos $2n$ estudantes em n duplas. De quantas maneiras pode-se reagrupar os estudantes de forma que cada dupla esteja quebrada (ou seja, de forma que cada dupla seja diferente)?

180#. A *função totiente de Euler*⁶¹ (ou *função ϕ de Euler*) é a função que, dado $n \in \mathbb{N}$ conta o número de inteiros positivos menores que n e sem divisores em comum com n , isto é

$$\phi(n) := |\{k \in [n] \mid \text{mdc}(k, n) = 1\}|.$$

Por exemplo, $\phi(12) = 4$ pois há quatro inteiros positivos, 1, 5, 7 e 11 que são menores ou iguais a 12 e sem divisores em comum com 12. Convencionou-se que $\phi(1) = 1$.

Use o Princípio de Inclusão–Exclusão para verificar que

$$\phi(n) = n \prod_{i=1}^k \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)$$

onde p_1, \dots, p_k são os primos distintos que dividem n .

⁶²: Se p é primo, então nenhum inteiro menor que p tem divisor em comum com p e, portanto, $\phi(p) = p - 1$. Se p é primo e $e \geq 1$, então $\phi(p^e)$ é o número de termos da sequência $(1, 2, 3, \dots, p, p + 1, \dots, 2p, \dots, p^e)$ que não são divisíveis por p . Os números divisíveis por p nesta sequência são $p, 2p, 3p, \dots, p^e$. Assim

$$\phi(p^e) = p^e - p^{e-1} = p^e \left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

⁵⁹Extraído e adaptado de (Tuffley, 2009, ex. 4)

⁶⁰Extraído e adaptado de (Tuffley, 2009, ex. 8)

⁶¹Extraído e adaptado de (Tuffley, 2009, ex. 9)

⁶²**Sugestão:** Extraído de (Andreescu and Feng, 2004, p. 124, exemplo 6.6)

13 Permutações sem Ponto Fixo

181. (a) Qual o número de permutações sobre um conjunto de n elementos com exatamente um ponto fixo?
(b) Mostre que o número de permutações sem ponto fixo e o número de permutações com exatamente um ponto fixo sobre um conjunto de n elementos difere de um para todo $n \in \mathbb{N}$ ⁶³.
182. De quantas maneiras podemos arranjar os inteiros $1, 2, 3, \dots, 10$ de forma que nenhum dos cinco primeiros (i.e. $1, 2, 3, 4, 5$) apareçam em suas posições naturais/originais⁶⁴?
183. (a) Quantas permutações sobre $[n]$ existem de forma que i nunca é seguido de $i + 1$ para nenhum $1 \leq i < n$?⁶⁵
(b) Como essa resposta muda, se incluirmos a restrição de que n não pode ser seguido de 1?
184. Qual o número de permutações sobre um conjunto finito de n elementos com exatamente k pontos fixos?
185. Suponha que numa disciplina de pós-graduação, a avaliação final é realizada por meio da entrega de um relatório técnico, em forma de artigo científico, sobre um trabalho prático desenvolvido com os conhecimentos adquiridos ao longo da disciplina. O professor desta disciplina quer desenvolver em seus alunos/estudantes a capacidade de avaliação de artigos científicos e propõe que a avaliação dos relatórios seja feita pelos próprios alunos.
Considerando que a turma é composta de apenas 5 alunos, de quantas maneiras distintas o professor pode distribuir os relatórios técnicos aos alunos de forma que um mesmo autor não avalie o seu artigo.
186. Para a palavra UFPR, podemos formar quantos anagramas de forma que cada letra não apareça em sua posição original.

⁶³Adaptado de (Andreescu and Feng, 2004, p. 140, ex. 6.3)

⁶⁴Extraído de (Tuffley, 2009, ex. 4)

⁶⁵Extraído e adaptado de (Tuffley, 2009, ex. 9)

187. Considere uma palavra formada por uma sequência de n letras A seguida de mais m letras B, quantos anagramas podemos formar dessa palavra de forma que nenhuma letra esteja em sua posição original.

14 Funções Sobrejetoras

188. Em um curso de Matemática Discreta, existem 8 estudantes que serão divididos em grupos de trabalho, de forma que cada grupo tenha pelo menos um aluno, para estudar 3 projetos diferentes. De quantas maneiras eles podem ser distribuídos?
189. Dado $n \in \mathbb{N}$, quantas funções $[n] \rightarrow [n]$ não são injetoras nem sobrejetoras?
190. Quantos programas distintos composto por 10 linhas de código podemos construir usando as instruções `store`, `load`, `jump` e `add` de forma que cada instrução seja utilizada pelo menos uma vez?
191. Em processamento de imagens, a tarefa de atribuir a cada *pixel* (*picture element*) p da imagem um rótulo (ou região) l , de forma que todos os rótulos sejam usados pelo menos uma vez, é conhecida como *segmentação da imagem* e pode ser descrita por uma função $S: P \rightarrow L$, onde $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ é o conjunto de pontos da imagem e $L = \{l_1, l_2, \dots, l_m\}$. No caso particular em que $m = 2$ (por exemplo, rótulo “branco” e “preto”), o processo também é conhecido por binarização ou *thresholding* da imagem.
- (a) Como descrito acima, a função de segmentação S é uma injeção, sobrejeção, bijeção, ou nenhuma das anteriores?
 - (b) De quantas maneiras distintas podemos segmentar uma imagem com $n = 9$ pixels em $m = 2$ regiões/rótulos?
 - (c) E se a restrição de uso de todos os rótulos disponíveis fosse removida, a função de segmentação se tornaria uma injeção, sobrejeção, bijeção, ou nenhuma das anteriores? Neste caso, qual seria o número de funções possíveis considerando os tamanhos dos conjuntos de **191b**
192. Seja $S([m], [n])$ o conjunto das funções sobrejetoras $f: [m] \rightarrow [n]$ e a

sua cardinalidade determinada por

$$\begin{aligned} & 0, & \text{se } m < n, \\ \sum_{i=0}^n (-1)^{n-i} \binom{n}{i} i^m, & \text{se } m \geq n. \end{aligned}$$

E seja $I([m], [n])$ o conjunto das funções injetoras $f: [m] \rightarrow [n]$ e a sua cardinalidade determinada por

$$\begin{aligned} & 0, & \text{se } m < n, \\ \frac{n!}{(n-m)!}, & \text{se } m \geq n. \end{aligned}$$

Prove que $|S([m], [n])| = |I([m], [n])|$, se $m = n$ para todo $n > 0$.

193. Prove que

$$\sum_{i=0}^n (-1)^{n-i} \binom{n}{i} i^n = n!.$$

15 Partições

194. Em um curso de Matemática Discreta, existem 5 estudantes que serão divididos em 2 grupos de trabalho, de forma que cada grupo tenha pelo menos um aluno, para estudar um mesmo problema⁶⁶. De quantas maneiras eles podem ser distribuídos?

⁶⁶Exercício similar à 188, mas não idêntico

Referências

Titu Andreescu and Zuming Feng. *A Path to Combinatorics for Undergraduates: Counting Strategies*. Springer, 2004.

Thomas H. Cormen, Charles E. Leiserson, Ronald L. Rivest, and Clifford Stein. *Introduction to Algorithms*. MIT Press, 3 edition, 2009. ISBN 978-0-262-03384-8. URL <http://mitpress.mit.edu/catalog/item/default.asp?ttype=2&tid=11866>.

Chris Tuffley. The principle of inclusion-exclusion, 2009. URL http://www.mathsolympiad.org.nz/wp-content/uploads/2009/02/inclusion-exclusion.pdf&ei=sj2DU73XL6m0sQTL24CwCQ&usg=AFQjCNEh4U_iyB_WDYPDzSAYj_3MFZrIIQ&sig2=9YLp0YGfZI4Mv80QsoHNNA.