

# Matemática Discreta

## Exercícios

3 de agosto de 2017

## Sumário

### 1 Elementos de Lógica

2

Os exercícios estão classificados de acordo com a seguinte legenda.

- : exercícios de interesse marginal: complementam o assunto de alguma forma mas podem ser ignorados sem comprometer o entendimento.
- @: exercícios programados para discussão em aula: procure fazê-los antes de serem discutidos em aula.
- \*: exercícios prioritários: na impossibilidade de fazer todos, dê prioridade a estes.
- #: exercícios mais difíceis e/ou trabalhosos: não comece por estes.

# 1 Elementos de Lógica

1<sup>@</sup>. Das proposições abaixo, indique as verdadeiras e as falsas.

- (a) “ $2 \leq 3$ ”.
- (b) “ $10 > 20$ ”.
- (c) “ $x^2 \leq x$ ”.

2<sup>@</sup>. Das proposições abaixo, indique as verdadeiras e as falsas.

- (a)  $(1 < 2) \text{ e } (2 < 3) \implies (1 < 3)$ ,
- (b)  $(1 < 2) \implies (10 < 30)$ ,
- (c)  $1 > 2 \implies 2 < 3$ ,
- (d)  $1 > 2 \implies 2 > 3$ .

3<sup>@</sup>. Sejam  $P$  e  $Q$  os seguintes predicados.

$$P(x) : x \leq x^2,$$
$$Q(x, y) : x \leq y^2.$$

Das proposições abaixo, indique as verdadeiras e as falsas.

- (a)  $P(2)$ .
- (b)  $P(1/2)$ .
- (c)  $Q(1, 1)$ .
- (d)  $R(t) = Q(1, t)$ .

4<sup>@</sup>. Seja  $P(x)$  o predicado “ $x \leq x^2$ ”.

Das proposições abaixo, indique as verdadeiras e as falsas.

- (a)  $P(x)$ , para todo  $x \in \mathbb{R}$ .
- (b)  $P(x)$ , para algum  $x \in \mathbb{R}$ .
- (c)  $P(x)$ , para todo  $x \geq 1$ .
- (d)  $P(x)$ , para algum  $0 < x < 1$ .

5<sup>\*</sup>. Prove que se  $A$ ,  $B$  e  $C$  são proposições, então

- (a)  $F \implies A$ , ou seja, a partir de uma proposição falsa pode-se concluir qualquer coisa.
- (b)  $(A \implies B) \equiv ((\text{não } B) \implies (\text{não } A))$ , também conhecida como *contrapositiva* da implicação. Uma “prova de  $A \implies B$  por contrapositiva” é uma prova de que  $((\text{não } B) \implies (\text{não } A))$ .
- (c)  $(A \implies F) \equiv \text{não } A$ , ou seja, uma implicação cujo conseqüente é falso só pode ser verdadeira se o antecedente é falso. Este é o princípio por baixo das “provas por contradição”.
- (d)  $((A \implies B) \text{ ou } (A \implies C)) \equiv (A \implies (B \text{ ou } C))$  (distributividade da disjunção pela implicação).
- (e)  $((A \implies B) \text{ e } (A \implies C)) \equiv (A \implies (B \text{ e } C))$  (distributividade da conjunção pela implicação).
- (f)  $((B \implies A) \text{ ou } (C \implies A)) \equiv ((B \text{ e } C) \implies A)$  (outra distributividade).
- (g)  $((B \implies A) \text{ e } (C \implies A)) \equiv ((B \text{ ou } C) \implies A)$  (outra distributividade).
- (h)  $((A \implies B) \text{ e } (A \implies (\text{não } B))) \implies (\text{não } A)$  (outra maneira de expressar o princípio por baixo de uma prova por contradição).

6\*. Considere os seguintes predicados.

$$\begin{aligned}
 I(x) &\equiv x \in \mathbb{Z}, \\
 P(f, x) &\equiv I(x) \implies I(f(x)), \\
 Q(f, x) &\equiv I(f(x)) \implies I(x).
 \end{aligned}$$

Dê um exemplo de função  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  que

- (a) satisfaz o predicado  $P(g, x)$ , para todo  $x \in \mathbb{R}$ .
- (b) não satisfaz o predicado  $P(g, x)$ , para todo  $x \in \mathbb{R}$ .
- (c) satisfaz o predicado  $\text{não } (P(g, x))$ , para todo  $x \in \mathbb{R}$ .
- (d) satisfaz o predicado  $Q(g, x)$ , para todo  $x \in \mathbb{R}$ .
- (e) não satisfaz o predicado  $Q(g, x)$ , para todo  $x \in \mathbb{R}$ .
- (f) satisfaz o predicado  $\text{não } (Q(g, x))$ , para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

7#. Considere os seguintes predicados.

$$\begin{aligned}L(f) &\equiv \lim f(n) = 0, \\P(n, f, g, h) &\equiv f(n) = g(n)(1 + h(n)), \\B(f, g, h) &\equiv L(h) \text{ e } (P(n, f, g, h), \text{ para todo } n \in \mathbb{N}), \\A(f, g) &\equiv B(f, g, h), \text{ para algum } h: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Dê um exemplo de funções  $f, g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  que

- (a) satisfazem  $A(f, g)$ .
- (b) não satisfazem  $A(f, g)$ .
- (c) satisfazem **não**  $A(f, g)$ .

8#. Seja  $O(f)$  o seguinte predicado (onde  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ ).

$$(((n \geq k \implies |f(n)| \leq c), \text{ para algum } k > 0), \text{ para algum } c > 0), \text{ para todo } n \geq k.$$

Avalie as seguintes proposições justificando cada uma, isto é, apresentando uma prova de se são verdadeiras ou falsas.

- (a)  $O(n/(n-1))$ ,
- (b)  $O(n)$ ,
- (c)  $O(10 + 1/n)$ ,
- (d)  $O(\log n)$ ,
- (e)  $O(42)$ .

9#. Considere os seguintes predicados.

$$\begin{aligned}P_1(f, g, c, n) &\equiv |f(n)| \leq c|g(n)|, \\P_2(f, g, c, k) &\equiv P_1(f, g, c, n), \text{ para todo } n \geq k, \\P_3(f, g, c) &\equiv P_2(f, g, c, k), \text{ para algum } k \in \mathbb{N}, \\O(f, g) &\equiv P_3(f, g, c), \text{ para algum } c \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Para cada par de funções  $f, g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ , classifique as proposições abaixo como verdadeiras ou falsas.

- (a)  $O(f, g)$ , para  $f(n) = n$  e  $g(n) = n^2$ .
- (b)  $O(g, f)$ , para  $f(n) = n$  e  $g(n) = n^2$ .
- (c)  $O(f, g)$ , para  $f(n) = n/2$  e  $g(n) = n$ .
- (d)  $O(g, f)$ , para  $f(n) = n/2$  e  $g(n) = n$ .

10#. Sejam  $D(x, y, d)$  e  $M(x, y)$  os seguintes predicados, respectivamente.

$$D(x, y, d): |x - y| < d,$$

$$M(x, y): x > y.$$

Use os predicados  $D(x, y, d)$  e  $M(x, y)$  para expressar os seguintes predicados.

$$L_1(f, a, l): \lim_{x \rightarrow a} f(x) = l.$$

$$L_2(f, l): \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = l.$$

$$L_3(f, a): \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty.$$

$$L_4(f): \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

## Referências