Matemática Discreta

Exercícios

3 de julho de 2018

Sumário

1 Elementos de Lógica 3

2 Conjuntos e Inteiros 7

3 Aproximação Assintótica 8

4 Piso e Teto 12

5 Indução 16

5.1 Descrições Recursivas 22

6 Recorrências 27

6.1 Funções Iteradas 27

6.2 Recorrências 31

6.3 Recorrências Lineares Homogêneas 35

6.4 Recorrências Lineares não Homogêneas 40

6.5 Somatórios 44

6.6 Algumas Aplicações 46

7 Fundamentos de Contagem 49

8 União e Produto Cartesiano 52

9 Sequências **54**

10 Funções **58**
10.1 Funções Injetoras (Arranjos) 59
10.2 Funções Bijetoras (Permutações) 59
10.3 Subconjuntos (Combinações) 61

11 Composições **64**

12 Inclusão/Exclusão **66**

13 Permutações sem Ponto Fixo **68**

14 Funções Sobrejetoras e Partições **70**

Os exercícios estão classificados de acordo com a seguinte legenda.

-: exercícios de interesse marginal: complementam o assunto de alguma forma mas podem ser ignorados sem comprometer o entendimento.

@: exercícios programados para discussão em aula: procure fazê-los antes de serem discutidos em aula.

$\star$: exercícios prioritários: na impossibilidade de fazer todos, dê prioridade a estes.

#: exercícios mais difíceis e/ou trabalhosos: não comece por estes.

1 Elementos de Lógica

$1^{@}$. Das proposições abaixo, indique as verdadeiras e as falsas.

(a) "$2 \leq 3$".
(b) "$10 > 20$".
(c) "$x^2 \leq x$".

$2^{@}$. Das proposições abaixo, indique as verdadeiras e as falsas.

(a) $(1 < 2)$ e $(2 < 3) \implies (1 < 3)$,
(b) $(1 < 2) \implies (10 < 30)$,
(c) $1 > 2 \implies 2 < 3$,
(d) $1 > 2 \implies 2 > 3$.

$3^{@}$. Sejam P e Q os seguintes predicados.

$$\begin{aligned} P(x) &: x \leq x^2, \\ Q(x,y) &: x \leq y^2. \end{aligned}$$

Das proposições abaixo, indique as verdadeiras e as falsas.

(a) $P(2)$.
(b) $P(1/2)$.
(c) $Q(1,1)$.
(d) $R(t) = Q(1,t)$.

$4^{@}$. Seja $P(x)$ o predicado "$x \leq x^2$".

Das proposições abaixo, indique as verdadeiras e as falsas.

(a) $P(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$.
(b) $P(x)$, para algum $x \in \mathbb{R}$.
(c) $P(x)$, para todo $x \geq 1$.
(d) $P(x)$, para algum $0 < x < 1$.

$5^{\star}$. Prove que se A, B e C são proposições, então

(a) $F \implies A$, ou seja, a partir de uma proposição falsa pode-se concluir qualquer coisa.

(b) $(A \implies B) \equiv ((\text{ não } B) \implies (\text{ não } A))$, também conhecida como *contrapositiva* da implicação. Uma "prova de $A \implies B$ por contrapositiva" é uma prova de que $((\text{ não } B) \implies (\text{ não } A))$.

(c) $(A \implies F) \equiv \text{ não } A$, ou seja, uma implicação cujo consequente é falso só pode ser verdadeira se o antecedente é falso. Este é o princípio por baixo das "provas por contradição".

(d) $((A \implies B) \text{ ou } (A \implies C)) \equiv (A \implies (B \text{ ou } C))$ (distributividade da disjunção pela implicação).

(e) $((A \implies B) \text{ e } (A \implies C)) \equiv (A \implies (B \text{ e } C))$ (distributividade da conjunção pela implicação).

(f) $((B \implies A) \text{ ou } (C \implies A)) \equiv ((B \text{ e } C) \implies A)$ (outra distributividade).

(g) $((B \implies A) \text{ e } (C \implies A)) \equiv ((B \text{ ou } C) \implies A)$ (outra distributividade).

(h) $((A \implies B) \text{ e } (A \implies (\text{ não } B))) \implies (\text{ não } A)$ (outra maneira de expressar o princípio por baixo de uma prova por contradição).

6⋆. Considere os seguintes predicados.

$$\begin{aligned} I(x) &\equiv x \in \mathbb{Z}, \\ P(f,x) &\equiv I(x) \implies I(f(x)), \\ Q(f,x) &\equiv I(f(x)) \implies I(x). \end{aligned}$$

Dê um exemplo de função $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que

(a) satisfaz o predicado $P(g,x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

(b) não satisfaz o predicado $P(g,x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

(c) satisfaz o predicado não $(P(g,x)$, para todo $x \in \mathbb{R})$.

(d) satisfaz o predicado $Q(g,x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

(e) não satisfaz o predicado $Q(g,x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

(f) satisfaz o predicado não $(Q(g,x)$, para todo $x \in \mathbb{R})$.

$7^{\#}$. Considere os seguintes predicados.

$$\begin{aligned}
L(f) &\equiv \lim f(n) = 0, \\
P(n, f, g, h) &\equiv f(n) = g(n)(1 + h(n)), \\
B(f, g, h) &\equiv L(h) \text{ e } (P(n, f, g, h), \text{ para todo } n \in \mathbb{N}), \\
A(f, g) &\equiv B(f, g, h), \text{ para algum } h\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Dê um exemplo de funções $f, g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ que

(a) satisfazem $A(f, g)$.

(b) não satisfazem $A(f, g)$.

(c) satisfazem não $A(f, g)$.

$8^{\#}$. Seja $O(f)$ o seguinte predicado (onde $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$).

$$(((n \geq k \implies |f(n)| \leq c), \text{ para algum } k > 0), \text{ para algum } c > 0), \text{ para todo } n \geq k.$$

Avalie as seguintes proposições justificando cada uma, isto é, apresentando uma prova de se são verdadeiras ou falsas.

(a) $O(n/(n-1))$,

(b) $O(n)$,

(c) $O(10 + 1/n)$,

(d) $O(\log n)$,

(e) $O(42)$.

$9^{\#}$. Considere os seguintes predicados.

$$\begin{aligned}
P_1(f, g, c, n) &\equiv |f(n)| \leq c|g(n)|, \\
P_2(f, g, c, k) &\equiv P_1(f, g, c, n), \text{ para todo } n \geq k, \\
P_3(f, g, c) &\equiv P_2(f, g, c, k), \text{ para algum } k \in \mathbb{N}, \\
O(f, g) &\equiv P_3(f, g, c), \text{ para algum } c \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Para cada par de funções $f, g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, classifique as proposições abaixo como verdadeiras ou falsas.

(a) $O(f, g)$, para $f(n) = n$ e $g(n) = n^2$.

(b) $O(g, f)$, para $f(n) = n$ e $g(n) = n^2$.

(c) $O(f, g)$, para $f(n) = n/2$ e $g(n) = n$.

(d) $O(g, f)$, para $f(n) = n/2$ e $g(n) = n$.

$10^{\#}$. Sejam $D(x, y, d)$ e $M(x, y)$ os seguintes predicados, respectivamente.

$D(x, y, d)$**:** $|x - y| < d$,

$M(x, y)$**:** $x > y$.

Use os predicados $D(x, y, d)$ e $M(x, y)$ para expressar os seguintes predicados.

$L_1(f, a, l)$**:** $\lim_{x \to a} f(x) = l$.

$L_2(f, l)$**:** $\lim_{x \to \infty} f(x) = l$.

$L_3(f, a)$**:** $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$.

$L_4(f)$**:** $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$

2 Conjuntos e Inteiros

11[@]. Seja A um conjunto finito e seja $B \subseteq A$. Prove que

$$A = (A - B) \cup B,$$

12. Sejam A, B e C conjuntos finitos. Prove que

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C),$$

13[#]. Seja A um conjunto e seja $k \in \mathbb{N}$. Vamos denotar por $\binom{A}{k}$ o conjunto dos subconjuntos de k elementos de A, isto é,

$$\binom{A}{k} = \{S \subseteq A \mid |S| = k\}.$$

Dado $a \in A$, sejam

$$\begin{aligned} A^- &= \binom{A - \{a\}}{k}, \\ A^+ &= \binom{A - \{a\}}{k-1}, \\ \overline{A} &= \left\{S \cup \{a\} \mid S \in A^+\right\}. \end{aligned}$$

Prove que

$$\binom{A}{k} = A^- \cup \overline{A},$$

14. Dados $f, g\colon A \to \mathbb{C}$ e $X \subseteq A$ e $c \in \mathbb{C}$, é verdade que

(a)
$$\prod_{x \in X} c = c|X|?$$

(b)
$$\prod_{x \in X} (f(x) + g(x)) = \prod_{x \in X} f(x) + \prod_{x \in X} g(x)?$$

(c)
$$\sum_{x \in X} f(x)g(x) = \left(\sum_{x \in X} f(x)\right)\left(\sum_{x \in X} g(x)\right)?$$

Justifique.

3 Aproximação Assintótica

15[@]. A *Série Harmônica* é a série dada por

$$H(n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}.$$

A diferença $H(n) - \ln n$ converge e seu limite é conhecido como *constante de Euler–Mascheroni*, isto é,

$$\lim H(n) - \ln n = \gamma = 0.5772156649015328606065120900824024310421593359399 2\ldots$$

Prove que

$$H(n) \approx \ln n.$$

16[@]. Prove que

(a) Prove que

$$\binom{n}{2} \approx \frac{n^2}{2}$$

(b)

$$\sum_{i=1}^{n} i \approx \frac{n^2}{2}$$

(c) A partir da aproximação de Stirling,

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n,$$

prove que

$$\log_b n! \approx n \log_b n, \ \text{para todo } b > 1.$$

(d) Use o resultado do Exercício 24c para provar que

$$\sum_{i=1}^{n} \log_b i \approx n \log_b n, \ \text{para todo } b > 1$$

(e)

$$\lg n \approx \lfloor \lg n \rfloor \approx \lceil \lg n \rceil$$

17@. Prove que

$$\binom{n}{2} \approx \frac{n^2}{2}$$

18@. A partir da aproximação de Stirling,

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n,$$

prove que

$$\log_b n! \approx n \log_b n, \text{ para todo } b > 1.$$

19@. Use o resultado do Exercício 24c para provar que

$$\sum_{i=1}^{n} \log_b i \approx n \log_b n, \text{ para todo } b > 1$$

20. A partir da aproximação de Taylor

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i!} \approx e^x, \text{ para todo } x \in \mathbb{C},$$

conclua que

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \frac{1}{i!} \approx \frac{1}{e}.$$

21. Seja $P\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ dado por

$$P(n) = a_0 n^0 + a_1 n^1 + a_2 n^2 + \ldots + a_k n^k,$$

com $a_k \neq 0$, um polinômio de grau k.

Prove que

$$P(n) \approx a_k n^k.$$

22. Prove que

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \approx \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

23. Prove que

$$\frac{5-3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n+\frac{5+3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-1 \approx \frac{5+3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

24. Prove que

(a) Prove que

$$\binom{n}{2} \approx \frac{n^2}{2}$$

(b)

$$\sum_{i=1}^{n} i \approx \frac{n^2}{2}$$

(c) A partir da aproximação de Stirling,

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n,$$

prove que

$$\log_b n! \approx n \log_b n, \text{ para todo } b > 1.$$

(d) Use o resultado do Exercício 24c para provar que

$$\sum_{i=1}^{n} \log_b i \approx n \log_b n, \text{ para todo } b > 1$$

(e)

$$\lg n \approx \lfloor \lg n \rfloor \approx \lceil \lg n \rceil$$

25*. Seja $c \in \mathbb{C} - \{0, 1\}$ e seja

$$s(n) = \sum_{i=0}^{n} c^i.$$

Prove que

(a) se $c > 1$, então $s(n) \approx \frac{c^{n+1}}{c-1}$,

(b) se $0 < c < 1$, então $s(n) \approx \frac{1}{1-c}$.

26$^{\#}$. Sejam $F, f, g, h\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ e $n_0 \in \mathbb{N}$ tais que $F(n) \approx f(n)$, $F(n) \approx h(n)$, e

$$f(n) \leq g(n) \leq h(n), \text{ para todo } n \geq n_0,$$

Prove que, neste caso,

$$F \approx f \approx g \approx h.$$

27$^{\#}$. Sejam $f, g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Prove que $f(n) \approx g(n)$ se e somente se existe $\varepsilon\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ tal que

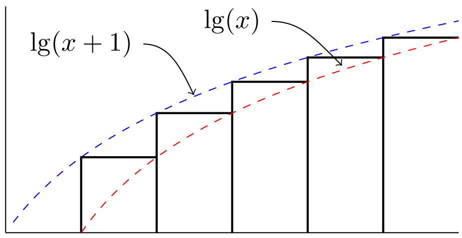
$$f(n) = g(n)(1 + \varepsilon(n)),$$

e

$$\lim \varepsilon(n) = 0.$$

28$^{\#}$. Prove que $\approx$ é uma relação de equivalência sobre o conjunto das funções $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

29$^{\#}$. A partir da observação de que



$$\int_1^n \log_b(x)dx \leq \sum_{i=1}^{n} \log_b i \leq \int_0^n \log_b(x+1)dx.$$

prove que

$$\sum_{i=1}^{n} \log_b i \approx n \log_b n.$$

4 Piso e Teto

30. É verdade que $\lfloor f(n) \rfloor \approx f(n)$ para toda $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$? Justifique.

31. É verdade que $\sum_{i=1}^{n} \lfloor f(i) \rfloor \approx \sum_{i=1}^{n} f(i)$ para toda $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$? Justifique.

32$^{\#}$. A soma

$$\sum_{i=1}^{n} \lfloor \lg i \rfloor \tag{1}$$

aparece com certa frequência em aplicações ligadas à computação.

(a) Prove que, dado $k \in \mathbb{N}$, temos

$$\lfloor \lg i \rfloor = k \text{ para todo } i \in [2^k..2^{k+1} - 1].$$

(b) Use esta observação para agrupar convenientemente os termos em (1).

(c) Prove que[1]

$$\sum_{i=1}^{n} \lfloor \lg i \rfloor = n \lfloor \lg n \rfloor - \left(2^{\lfloor \lg n \rfloor + 1} - \lfloor \lg n \rfloor - 2\right).$$

(d) Prove que

$$\sum_{i=1}^{n} \lfloor \lg i \rfloor \approx \sum_{i=1}^{n} \lg i.$$

(e) Prove que[2]

$$\sum_{i=1}^{n} \lfloor \lg i \rfloor \approx n \lg n.$$

(f) Prove que

$$\lg n! \approx n \lg n.$$

(g) As proposições acima podem ser generalizadas para logaritmos em outras bases além de 2? Como?

[1]**Sugestão:** use o resultado do Exercício 39 e o fato de que $\sum_{i=0}^{n} i2^i = 2^{n+1}(n-1)+2$.
[2]**Sugestão:** use o resultado do Exercício 39

33*. Prove que $\lceil x \rceil$ é o único inteiro que satisfaz

$$x \leq \lceil x \rceil < x + 1,$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

34*. Prove que

$$\lceil x \rceil + z = \lceil x + z \rceil .$$

para todo $x \in \mathbb{R}$ e todo $z \in \mathbb{Z}$.

35*. Prove que, para todo $n \in \mathbb{N}$,

- $\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$
- $\left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$

36*. Sejam $n, m\colon \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ dadas por

$$\begin{aligned} n(a,b) &= b - a + 1, \\ m(a,b) &= \left\lfloor \frac{a+b}{2} \right\rfloor, \end{aligned}$$

Prove que, para todo $a, b \in \mathbb{Z}$,

(a) $a + b$ é par se e somente se $n(a,b)$ é ímpar.

(b) $n(a, m(a,b)) = \left\lceil \frac{n(a,b)}{2} \right\rceil$.

(c) $n(m(a,b) + 1, b) = \left\lfloor \frac{n(a,b)}{2} \right\rfloor$.

(d) $n(a, m(a,b) - 1) = \left\lfloor \frac{n(a,b) - 1}{2} \right\rfloor$.

[3]

37*. Prove que, para todo $x \in \mathbb{R}$,

[3] **Sugestão:** Use o Exercício 35

(a) $x - \lfloor x \rfloor < 1$.

(b) $\lceil x \rceil - x < 1$.

(c) $\lfloor x \rfloor = \lceil x \rceil$ se e somente se $x \in \mathbb{Z}$

(d) $\lceil x \rceil - \lfloor x \rfloor \in \{0, 1\}$.

38⋆. Prove que

$$\max \{k \in \mathbb{Z} \mid k < x\} = \lceil x - 1 \rceil,$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

39@. Prove que, para todo inteiro $n > 0$,

(a) $\frac{n}{2} < 2^{\lfloor \lg n \rfloor} \leq n \leq 2^{\lceil \lg n \rceil} < 2n$.

(b) $\frac{1}{2} < \frac{n}{2^{\lceil \lg n \rceil}} \leq 1 \leq \frac{n}{2^{\lfloor \lg n \rfloor}} < 2$

(c) $\left\lfloor \frac{n}{2^{\lfloor \lg n \rfloor}} \right\rfloor = 1, \text{ para todo } n > 0.$

(d) $\left\lfloor \frac{n}{2^x} \right\rfloor = 0$ se e somente se $x > \lg n$.

(e) $\lfloor \lg n \rfloor > \lfloor \lg(n-1) \rfloor$ se e somente se n é potência de 2.

(f) $\lceil \lg n \rceil < \lceil \lg(n+1) \rceil$ se e somente se n é potência de 2.

(g) $\lceil \lg(n+1) \rceil = \lfloor \lg n \rfloor + 1$.

40⋆. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função crescente e contínua satisfazendo

$$f(x) \in \mathbb{Z} \implies x \in \mathbb{Z}, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Prove que

$$\lceil f(\lceil x \rceil) \rceil = \lceil f(x) \rceil, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

41#. Seja k um inteiro positivo e seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função dada por

$$f(x) = \frac{x}{k}.$$

Prove que

(a) f uma função contínua.

(b) f uma função crescente.

(c) $f(x) \in \mathbb{Z} \implies x \in \mathbb{Z}$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

42*. Prove que

(a)

$$\sum_{i=0}^{\lfloor \lg n \rfloor - 1} 2^i \left\lfloor \frac{n}{2^i} \right\rfloor - 2^{\lfloor \lg n \rfloor} + 1 \approx n \lg n$$

(b)

$$\sum_{i=0}^{\lfloor \lg n \rfloor} 2^i \left\lceil \frac{n}{2^i} \right\rceil - 2^{\lfloor \lg n \rfloor + 1} + 1 \approx n \lg n$$

43⁻. Se $f\colon A \to B$ e $g\colon B \to C$ são funções contínuas, então $f \circ g\colon A \to C$ é uma função contínua.

44⁻. Sejam $A, B, C \subseteq \mathbb{R}$ e $f\colon A \to B$ e $g\colon B \to C$ funções crescentes. Prove que $f \circ g\colon A \to C$ é uma função crescente.

45⁻. Sejam $A, B, C \subseteq \mathbb{R}$ e sejam $f\colon A \to B$ e $g\colon B \to C$ funções contínuas e crescentes satisfazendo

$$f(x) \in \mathbb{Z} \implies x \in \mathbb{Z}, \text{ para todo } x \in A, \text{ e}$$
$$g(x) \in \mathbb{Z} \implies x \in \mathbb{Z}, \text{ para todo } x \in B.$$

Prove que

$$\begin{aligned} \lfloor f \circ g(\lfloor x \rfloor) \rfloor &= \lfloor f \circ g(x) \rfloor, \text{ e} \\ \lceil f \circ g(\lceil x \rceil) \rceil &= \lceil f \circ g(x) \rceil, \end{aligned}$$

para todo $x \in A$.

46⁻. Dizemos que uma função $f\colon A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é integralizada se

$$f(x) \in \mathbb{Z} \implies x \in \mathbb{Z}, \text{ para todo } x \in A,$$

Sejam $A, B, C \subseteq \mathbb{R}$. Prove que se $f\colon A \to B$ e $g\colon B \to C$ são funções integralizadas, então $f \circ g\colon A \to C$ é uma função integralizada.

5 Indução

47@. Prove que

$$\sum_{i=0}^{n} c^i = \frac{c^{n+1}-1}{c-1},$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $c \in \mathbb{C} - \{0,1\}$.

48⋆. Prove por indução que

$$\sum_{i=0}^{n} i2^i = 2^{n+1}(n-1)+2,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

49⋆. Dados $n, k \in \mathbb{N}$, o coeficiente binomial $\binom{n}{k}$ é definido da seguinte maneira

$$\binom{n}{k} := \begin{cases} 1, & \text{se } k = 0, \\ \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}, & \text{se } 1 \leq k \leq n, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Prove, por indução em n que, se $0 \leq k \leq n$, então

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

50⋆. Prove por indução em n que, dados $x, y \in \mathbb{C}$,

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i y^{n-i} = (x+y)^n,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ e $n > 0$ [4].

Conclua a partir daí que

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ e $n > 0$.

[4] **Sugestão:** Use a definição de $\binom{n}{k}$ dada no Exercício 49

51[@]. Prove por indução em n que

$$2^n < n!, \text{ para todo } n \geq 4.$$

52[@]. A *sequência de Fibonacci* é a função $F\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dada por

$$F(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n \leq 1 \\ F(n-1) + F(n-2), & \text{se } n > 1. \end{cases}$$

(a) Prove por indução em n que

$$F(n) = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right), \text{ para todo } n \in \mathbb{N}$$

(b) Conclua que

$$F(n) \approx \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

53*. Prove, por indução em n, que

(a) $\sum_{j=0}^{n} \big(F(j)\big)^2 = F(n)F(n+1), \text{ para todo } n \in \mathbb{N}$

(b) $\sum_{j=0}^{n} F(2j) = F(2n+1) - 1, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}$

(c) $\sum_{j=1}^{n} F(2j-1) = F(2n), \text{ para todo } n \in \mathbb{N}$

(d) $F(n+1)F(n-1) - \big(F(n)\big)^2 = (-1)^n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}$

onde $F : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ é a *sequência de Fibonacci*[5].

54*. Prove que

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} F(n+1) & F(n) \\ F(n) & F(n-1) \end{pmatrix}, \text{ para todo } n > 0,$$

onde F é a sequência de Fibonacci (cfr Exercício 53)[6].

[5] Veja o Exercício 52

[6] Este é um dos algoritmos mais eficientes para o cálculo da sequência de Fibonacci.

55*. O número de comparações no pior caso de uma execução do algoritmo MergeSort para um vetor de n elementos é dado pela função

$$T(n) = \begin{cases} 0, & \textsf{se } n < 2, \\ T\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + T\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right) + n - 1, & \textsf{se } n \geq 2. \end{cases}$$

Prove que $T^-(n) \leq T(n) \leq T^+(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, onde T^+ e T^- são as seguintes funções.

$$T^-(n) = \begin{cases} 0, & \textsf{se } n < 2, \\ 2T^-\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + n - 1, & \textsf{se } n \geq 2, \end{cases}$$

$$T^+(n) = \begin{cases} 0, & \textsf{se } n < 2, \\ 2T^+\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right) + n - 1, & \textsf{se } n \geq 2. \end{cases}$$

56⁻. Dados $n_1, \ldots, n_k$ O *coeficiente multinomial* é definido por

$$\binom{n_1 + \ldots + n_k}{n_1, \ldots, n_k} := \frac{(n_1 + \ldots + n_k)!}{n_1! n_2! \ldots n_k!}.$$

Observe que o coeficiente multinomial é uma generalização do coeficiente binomial, pois

$$\binom{n}{n_1} = \binom{n}{n_1, n - n_1}.$$

Prove por indução em k que

$$\binom{n_1 + \ldots + n_k}{n_1, \ldots, n_k} = \binom{n_1 + \ldots + n_{k-1}}{n_1, \ldots, n_{k-1}} \binom{n_1 + \ldots + n_k}{n_k}, \ \textsf{para todo } k \geq 2.$$

57*. Prove que

$$\sum_{i=0}^{n} c^i = \frac{c^{n+1} - 1}{c - 1},$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $c \in \mathbb{C} - \{0, 1\}$.

58*. Use o fato de que se A e B são conjuntos finitos e disjuntos entre si então

$$|A \cup B| = |A| + |B|,$$

para provar, por indução em n que, se $A_1, \ldots, A_n$ são conjuntos finitos dois a dois disjuntos entre si, então,

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i|$$

59@. Prove por indução em n que se $A_1, \ldots, A_n$ e B são conjuntos, então

$$\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \cap B = \bigcup_{i=1}^{n} (A_i \cap B),$$

60@. Prove, por indução em $|X|$ que, se X é um conjunto finito e $c \in \mathbb{C}$, então

$$\prod_{x \in X} c = c^{|X|}.$$

61⋆. Prove, por indução em $|X|$ que, se X é um conjunto finito e $c \in \mathbb{C}$, então

$$\sum_{x \in X} c = c|X|.$$

62⋆. Prove, por indução em $|X|$ que, que se $f, g\colon A \to \mathbb{C}$ e $X \subseteq A$ é um conjunto finito, então

$$\sum_{x \in X} (f(x) + g(x)) = \sum_{x \in X} f(x) + \sum_{x \in X} g(x).$$

63⋆. Prove, por indução em $|X|$ que, que se $f\colon A \to \mathbb{C}$ e $X \subseteq A$ é um conjunto finito, e $c \in \mathbb{C}$, então

$$\sum_{x \in X} cf(x) = c \sum_{x \in X} f(x).$$

64⋆. Prove por indução que qualquer valor maior ou igual a 4 reais pode ser obtido somente com cédulas de 2 e 5 reais.

65*. Prove, por indução em n, que $n^2 - 1$ é divisível por 8 para todo $n \in \mathbb{N}$ ímpar.

66*. Considere o seguinte algoritmo, conhecido pelo nome de "busca binária".

```
Busca(x, v, a, b)
-----------------------------
  Se a > b
      Devolva a − 1

  m ← ⌊(a+b)/2⌋
  Se x = v[m]
      Devolva m
  Se x < v[m]
      Devolva Busca(x, v, a, m − 1)
  Devolva Busca(x, v, m + 1, b)
```

Fazendo $n = b-a+1$, prove que o número de comparações na execução de Busca(x, v, a, b) é no máximo $\lfloor \lg n \rfloor + 1$ para todo $n \geq 1$.

67*. Sejam $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $s, m \in \mathbb{R}$ tais que

$$f(x) = s + mx, \text{ para todo } x \in \mathbb{R},$$

Prove que

$$f^n(x) = \begin{cases} x + sn, & \text{se } m = 1, \\ m^n x + s\frac{m^n-1}{m-1}, & \text{se } m \neq 1, \end{cases}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$ e todo $n \in \mathbb{N}$.

68$^\#$. Seja $f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ satisfazendo

$$f(n) = f(n-1) + 1, \text{ para todo } n \geq 1.$$

Prove, por indução em n, que

$$f(n) = f(0) + n, \text{ para todo } n \geq 0.$$

69$^\#$. Seja $a \in \mathbb{C}$ e seja $f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ satisfazendo

$$f(n) = f(n-1) + a, \text{ para todo } n \geq 1.$$

Prove[7], por indução em n, que

$$f(n) = f(0) + na, \text{ para todo } n \geq 0.$$

70#. Sejam $f, s \colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ satisfazendo

$$f(n) = f(n-1) + s(n), \text{ para todo } n \geq 1.$$

Prove[8], por indução em n que

$$f(n) = f(0) + \sum_{i=1}^{n} s(i), \text{ para todo } n \geq 0.$$

71#. Sejam $f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ e $a \in \mathbb{C}$ tais que

$$f(n) = af(n-1), \text{ para todo } n \geq 1.$$

Prove por indução em n que

$$f(n) = a^n f(0), \text{ para todo } n \geq 0.$$

72#. Sejam $f, m \colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ tais que

$$f(n) = m(n)f(n-1), \text{ para todo } n \geq 1.$$

Prove[9], por indução em n, que

$$f(n) = f(0)\prod_{i=1}^{n} m(i), \text{ para todo } n \geq 0.$$

73#. Sejam $f, s, m \colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ tais que

$$f(n) = m(n)f(n-1) + s(n), \text{ para todo } n \geq 1.$$

Prove (por indução em n) que[10]

$$f(n) = f(0)\prod_{i=1}^{n} m(i) + \sum_{j=1}^{n}\left(s(j)\prod_{i=j+1}^{n} m(i)\right), \text{ para todo } n \geq 0.$$

[7] Observe que este exercício generaliza o Exercício 68.
[8] Observe que este exercício generaliza o Exercício 69.
[9] Observe que este exercício generaliza o Exercício 71.
[10] Observe que este exercício generaliza o Exercício 72.

5.1 Descrições Recursivas

74[@]. Sejam $l, f\colon \mathbb{N} - \{0\} \to \mathbb{N}$ dadas por

$l(n)$: tamanho (número de dígitos) na representação binária de n,

e

$$f(n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 1, \\ f\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + 1, & \text{se } n > 1. \end{cases}$$

Prove que

$$l(n) = f(n), \text{ para todo } n > 0.$$

75[@]. Seja $l\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dada por

$$l(n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 1, \\ l\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + 1, & \text{se } n > 1. \end{cases}$$

Prove por indução em n que

$$l(n) = \lfloor \lg n \rfloor + 1, \text{ para todo } n > 0.$$

76[@]. Sejam

$b(n)$: o número de dígitos 1 na representação binária de n.

e $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ a função dada por

$$f(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n = 0, \\ f\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + (n \bmod 2) & \text{se } n > 0. \end{cases}$$

(a) Prove que o número de dígitos 1 na representação binária de n é $f(n)$, para todo $n \geq 0$.

(b) Prove que

$$f(n) \leq \lfloor \lg n \rfloor + 1, \text{ para todo } n > 0.$$

77*. Seja $M(n)\colon \mathbb{N} - \{0\} \to \mathbb{N}$ dada por

$M(n) :=$ a posição do bit mais significativo na representação binária de n,

sendo que os bits são contados da direita para a esquerda a partir de 0. Por exemplo, $M(1) = 0$ e $M(10) = 3$.

(a) Proponha uma expressão recursiva para $M(n)$.

(b) Prove que a expressão proposta está correta.

78*. Considere o Algoritmo $\mathsf{Exp}(x, n)$ dado por

```
Exp(x,n)
---------------------------
Se n = 0
    Devolva 1
e ← Exp(x, ⌊n/2⌋)
e ← e × e
Se n é par
    Devolva e
Devolva x × e
```

(a) Execute $\mathsf{Exp}(2, n)$ para $n \in \{0, 1, 2, 5, 11, 15, 16, 20\}$ e, para cada execução, mostre o resultado do algoritmo e o número de multiplicações efetuadas.

(b) Prove por indução em n que $\mathsf{Exp}(x, n) = x^n$ para todo $x \neq 0$ e todo $n \in \mathbb{N}$.

(c) Prove que a execução de $\mathsf{Exp}(x, n)$ efetua $\lfloor \lg(n) \rfloor + b(n) + 1$ multiplicações para todo $x \neq 0$ e todo $n \in \mathbb{N}$, onde b é a função definida no Exercício 76.

(d) Prove que a execução de $\mathsf{Exp}(x, n)$ efetua no máximo $2(\lfloor \lg n \rfloor + 1)$ multiplicações para todo $x > 0$ e todo $n > 0$.

79*. Considere o Algoritmo Mínimo(v, a, b) dado por

```
Minimo(v,a,b)
---------------------------------
  Se a = b
      Devolva a
  m ← ⌊(a+b)/2⌋
  m_1 ← Mínimo(v, a, m)
  m_2 ← Mínimo(v, m + 1, b)
  Se v[m_1] ≤ v[m_2]
      Devolva m_1
  Devolva m_2
```

Prove por indução em $n := b - a$ que, a execução de Mínimo(v, a, b) faz $b - a$ comparações entre elementos de v sempre que $a \leq b$.

80*. Prove, por indução em n, que o seguinte algoritmo devolve $\prod_{i=1}^{n} i$, para todo $n \in \mathbb{N}$

```
Fatorial(n)
---------------------------------
  Se n = 0
      Devolva 1
  Devolva n × Fatorial(n − 1)
```

81*. Prove, por indução em n, que o seguinte algoritmo devolve $3^n - 2^n$, para todo n natural.

```
A(n)
---------------------------------
  Se n ≤ 1
      Devolva n
  Devolva 5 × A(n − 1) − 6 × A(n − 2)
```

82*. Considere o seguinte algoritmo

```
Multiplica(x,n)
---------------------------------
  Se n = 0
      Devolva 0
  Se n é par
      Devolva Multiplica(x + x, n/2)
  Devolva Multiplica(x + x, (n−1)/2) + x
```

(a) Prove, por indução em n, que $\mathsf{Multiplica}(x, n)$ devolve o valor de nx para todo $x \in \mathbb{C}$ e todo $n \in \mathbb{N}$.

(b) Enuncie e prove um teorema estabelecendo um limite superior (em função de n) para o número de somas efetuadas por $\mathsf{Multiplica}(x, n)$[11].

83*. (a) Combine as informações dos Exercícios 54, 76 e 78 para propor um algoritmo para o cálculo de $F(n)$.

(b) Dê uma expressão para o número $s(n)$ de somas efetuadas pelo seu algoritmo para calcular $F(n)$.

(c) Compare o resultado obtido com o número de somas efetuadas pelo algoritmo do Exercício 89.

84*. Considere o seguinte algoritmo de ordenação, conhecido como "ordenação por inserção".

```
Ordena(v, a, b)
---------------------
  Se a ≥ b
      Devolva v
  Ordena(v, a, b − 1)
  Insere(v, a, b)
  Devolva v
```

onde $\mathsf{Busca}(x, v, a, b)$ é o algoritmo do Exercício **??**, e

```
Insere(v, a, b)
---------------------
  p ← Busca(v[b], v, a, b − 1)
  i ← b
  Enquanto i ≥ p + 1
      Troca(v, i, i − 1)
      i ← i − 1
  Devolva v
```

e $\mathsf{Troca}(v, a, b)$ troca os valores de $v[a]$ e $v[b]$ entre si.

Use o resultado do Exercício 32 para estabelecer o número máximo de comparações na execução de $\mathsf{Ordena}(v, a, b)$ em função do valor de $n = b - a + 1$.

[11] **Sugestão:** compare este exercício com o Exercício 78.

85$^{\#}$. Proponha uma expressão recursiva para a função $B(n,k)\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ de tal forma que $B(n,k)$ represente o valor do k-ésimo bit na representação binária de n.

Prove que a expressão proposta está correta.

86$^{\#}$. Prove por indução em n que, se $0 \leq k \leq n$, então o seguinte algoritmo devolve $\frac{n!}{k!(n-k)!}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

```
B(n, k)
-----------------------------
  Se k = 0
      Devolva 1
  Devolva nB(n−1, k−1)/k
```

87. Uma certa aplicação financeira rende j por cento do capital aplicado por mês. O rendimento é creditado no próprio saldo da aplicação.

Proponha uma expressão recursiva para a função $C(n)\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ de tal forma que $C(n)$ represente o saldo da aplicação após ao final de n meses, a partir de uma aplicação inicial de valor s.

88. Sejam $f^-, f, f^+\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ funções não-decrescentes satisfazendo, para todo $n \geq 2$,

$$\begin{aligned} f^-(n) &= f^-(n-2) + f^-(n-2), \\ f(n) &= f(n-1) + f(n-2), \\ f^+(n) &= f^+(n-1) + f^+(n-1), \end{aligned}$$

e ainda

$$\begin{aligned} f^-(0) \leq f(0) \leq f^+(0), &\text{ e} \\ f^-(1) \leq f(1) \leq f^+(1). \end{aligned}$$

Prove por indução em n que

$$f^-(n) \leq f(n) \leq f^+(n), \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

89[@]. O seguinte algoritmo devolve o n-ésimo termo da sequência de Fibonacci.

```
F(n)
-----------------------------
Se n ≤ 1
    Devolva n
Devolva F(n − 1) + F(n − 2)
```

Prove que o número de somas na execução de $F(n)$ é pelo menos $F(n)$, para todo $n \geq 2$.

6 Recorrências

6.1 Funções Iteradas

90[@]. Para cada uma das funções $f(x)$ abaixo, dê uma expressão para $f^n(n)$. Em cada caso, prove por indução em n que sua resposta está correta.

(a) $f(x) = x + 1$.

(b) $f(x) = x + 2$.

(c) $f(x) = x + 3$.

(d) $f(x) = x + s$.

(e) $f(x) = 2x$.

(f) $f(x) = 3x$.

(g) $f(x) = mx$.

(h) $f(x) = s + mx$.

91*. Para cada função $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ abaixo, dê uma expressão para a função h^n, onde $n \in \mathbb{N}$.

(a) $h(x) = x - 2$,

(b) $h(x) = x - s$, com $s \in \mathbb{R}$,

(c) $h(x) = 3x$

(d) $h(x) = mx$, com $m \in \mathbb{R}$,

(e) $h(x) = x/2$,

(f) $h(x) = \lceil x/k \rceil$, com $k \in \mathbb{Z}^+$,

(g) $h(x) = \lfloor \sqrt[k]{x} \rfloor$, com $k \in \mathbb{N}$,

92*. Prove que
$$f^n(x) = \left\lfloor \frac{x}{k^n} \right\rfloor, \text{ para todo } n > 0,$$
onde $k \neq 0$ e $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dada por
$$f(x) = \left\lfloor \frac{x}{k} \right\rfloor.$$

93*. Prove que
$$f^n(x) = \left\lfloor \sqrt[(k^n)]{x} \right\rfloor, \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$
onde $k \in \mathbb{N}$ e $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dada por
$$f(x) = \left\lfloor \sqrt[k]{x} \right\rfloor.$$

94#. Seja $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ satisfazendo
$$f(n) = f(n-2) + 1, \text{ para todo } n > 1.$$

Prove, por indução em n, que

(a) $f(n) = f(n \bmod 2) + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

(b) $f(n) = (-1)^n c_{10} + c_{20} + c_{21} n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, onde
$$\begin{aligned} c_{10} &= \frac{f(0) - f(1)}{2} + \frac{1}{4}, \\ c_{20} &= \frac{f(0) + f(1)}{2} - \frac{1}{4}, \\ c_{21} &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

(c) $f(n) = f(4 + n \bmod 2) + \left\lceil \frac{k-5}{2} \right\rceil$, para $n \geq 5$.

95#. Sejam $n_0 \in \mathbb{N}$, $h\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ e $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ tais que
$$\begin{aligned} h(n) &< n, \\ f(n) &= f(h(n)) + 1, \end{aligned}$$

para todo $n \geq n_0$,

Prove (por indução) que

$$f(n) = f(h^u(n)) + u, \text{ para todo } n \geq n_0,$$

onde

$$u = \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid h^k(n) < n_0\right\}.$$

96$^{\#}$. Sejam $n_0 \in \mathbb{N}$, $h\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ e $f, s\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ tais que

$$\begin{aligned} h(n) &< n, \\ f(n) &= f(h(n)) + s(n), \end{aligned}$$

para todo $n \geq n_0$.

Prove (por indução) que

$$f(n) = f(h^u(n)) + \sum_{i=0}^{u-1} s(h^i(n)), \text{ para todo } n \geq n_0.$$

onde

$$u = \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid h^k(n) < n_0\right\}.$$

97$^{\#}$. Sejam $n_0 \in \mathbb{N}$, $h\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ e $f, m\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ tais que

$$\begin{aligned} h(n) &< n, \\ f(n) &= m(n) f(h(n)), \end{aligned}$$

para todo $n \geq n_0$.

Prove (por indução em n) que, para todo $n \geq n_0$

$$f(n) = f(h^u(n)) \prod_{i=0}^{u-1} m(h^i(n)),$$

onde

$$u = \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid h^k(n) < n_0\right\}.$$

98$^{\#}$. Sejam $n_0 \in \mathbb{N}$, $h\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ e $f, m, s\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ tais que

$$\begin{aligned} h(n) &< n, \\ f(n) &= m(n) f(h(n)) + s(n), \end{aligned}$$

para todo $n \geq n_0$.

Prove (por indução) que

$$f(n) = f(h^u(n)) \prod_{i=0}^{u-1} m(h^i(n)) + \sum_{i=0}^{u-1} s(h^i(n)) \prod_{j=0}^{i-1} m(h^j(n)), \text{ para todo } n \geq n_0,$$

onde

$$u = \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid h^k(n) < n_0\right\}.$$

6.2 Recorrências

99[@]. Resolva a seguinte recorrência.

$$f(n) = f(n-2) + 1, \text{ para todo } n \geq 2.$$

100[@]. Resolva a seguinte recorrência.

$$f(n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 1, \\ f\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + 1, & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

101[@]. Resolva a seguinte recorrência.

$$f(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n = 0, \\ f\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + (n \bmod 2) & \text{se } n \geq 1. \end{cases}$$

102⋆. Resolva as seguintes recorrências.

(a) $f(n) = 2f\left(\left\lfloor \dfrac{n}{2} \right\rfloor\right) + 6n - 1, \text{ para todo } n > 1,$

(b) $f(n) = 2f\left(\left\lfloor \dfrac{n}{2} \right\rfloor\right) + 3n + 2, \text{ para todo } n > 1,$

(c) $f(n) = 6f\left(\left\lfloor \dfrac{n}{6} \right\rfloor\right) + 2n + 3, \text{ para todo } n > 1,$

(d) $f(n) = 6f\left(\left\lfloor \dfrac{n}{6} \right\rfloor\right) + 3n - 1, \text{ para todo } n > 1,$

(e) $f(n) = 4f\left(\left\lfloor \dfrac{n}{3} \right\rfloor\right) + 2n - 1, \text{ para todo } n > 1,$

(f) $f(n) = 4f\left(\left\lfloor \dfrac{n}{3} \right\rfloor\right) + 3n - 5, \text{ para todo } n > 1,$

(g) $f(n) = 3f\left(\left\lfloor \dfrac{n}{2} \right\rfloor\right) + n^2 - n, \text{ para todo } n > 1,$

(h) $f(n) = 3f\left(\left\lfloor \dfrac{n}{2} \right\rfloor\right) + n^2 - 2n + 1, \text{ para todo } n > 1,$

(i) $f(n) = 3f\left(\left\lfloor \dfrac{n}{2} \right\rfloor\right) + n - 2, \text{ para todo } n > 1,$

(j) $f(n) = 3f\left(\left\lfloor \dfrac{n}{2} \right\rfloor\right) + 5n - 7, \text{ para todo } n > 1,$

(k) $f(n) = 4f\left(\left\lfloor \dfrac{n}{3} \right\rfloor\right) + n^2, \text{ para todo } n > 1,$

(l) $f(n) = 4f\left(\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor\right) + n^2 - 7n + 5,$ para todo $n > 1,$

(m) $f(n) = 4f\left(\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor\right) + \lfloor \sqrt{n} \rfloor + 1,$ para todo $n > 3,$

(n) $f(n) = 4f\left(\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor\right) + n^2 - 3n + 2,$ para todo $n > 1,$

(o) $f(n) = 2f\left(\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor\right) + n - 3,$ para todo $n > 1,$

(p) $f(n) = 6f\left(\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor\right) + n^2 - 2n + 1,$ para todo $n > 1,$

(q) $f(n) = 2f\left(\left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor\right) + n - 1,$ para todo $n > 1,$

(r) $f(n) = f\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right) + 1,$ para todo $n > 1,$

(s) $f(n) = 2f\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right) + 1,$ para todo $n > 1,$

(t) $f(n) = f\left(\left\lceil \frac{2n}{3} \right\rceil\right) + k,$ para todo $n > 1$ e para todo $k \in \mathbb{N},$

103*. Resolva as seguintes recorrências.

(a) $f(n) = f(n-1) + n,$ para todo $n > 0.$

(b) $f(n) = 2f(n-1) + 1,$ para todo $n > 0$

(c) $f(n) = 2f(n-1) + n^2,$ para todo $n \geq 1$

(d) $f(n) = 2f(n-1) + n,$ para todo $n > 1,$

(e) $f(n) = 3f(n-1) + 2,$ para todo $n > 1,$

(f) $f(n) = 3f(n-1) - 15,$ para todo $n > 1,$

(g) $f(n) = f(n-1) + n - 1,$ para todo $n > 1,$

(h) $f(n) = f(n-1) + 2n - 3,$ para todo $n > 1,$

(i) $f(n) = 2f(n-1) + n - 1,$ para todo $n > 1,$

(j) $f(n) = 2f(n-1) + 3n + 1,$ para todo $n > 1,$

(k) $f(n) = 2f(n-1) + n^2,$ para todo $n > 1,$

(l) $f(n) = f(n-2) + 3n + 4,$ para todo $n > 1,$

(m) $f(n) = f(n-2) + n,$ para todo $n > 1,$

(n) $f(n) = f(n-3) + 5n - 9,$ para todo $n > 3,$

(o) $f(n) = 2f(n-1) + n^2 - 2n + 1,$ para todo $n > 1,$

(p) $f(n) = 3f(n-1) + n,$ para todo $n \geq 1.$

(q) $f(n) = 3f(n-2) + n^2,$ para todo $n \geq 2.$

(r) $f(n) = 2f(n-2) + 2n - 2,$ para todo $n \geq 2.$

(s) $f(n) = 2f(n-3) + 3n - 2,$ para todo $n \geq 3.$

(t) $f(n) = 3f(n-3) + 3n - 3,$ para todo $n \geq 3.$

104*. Seja $f(n)$ o número de sequências binárias de comprimento n.

(a) Descreva $f(n)$ como uma recorrência.

(b) Resolva esta recorrência.

105*. Uma função $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ é uma *progressão aritmética* se existe $r \in \mathbb{C}$ tal que

$$f(i+1) - f(i) = r \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

(a) Expresse a função f como acima por meio de uma recorrência.

(b) Resolva esta recorrência, obtendo assim uma expressão para o termo geral da progressão aritmética.

106*. Seja $m(n,k)$ o número de multiplicações/divisões efetuadas na execução de $B(n,k)$, o algoritmo do Exercício 86.

(a) Formule uma recorrência para $m(n,k)$ $(0 \leq k \leq n)$.

(b) Resolva esta recorrência.

107. Resolva a recorrência do Exercício 85.

108$^@$. Dado $q \in \mathbb{C}$, uma *progressão geométrica* de razão q é uma função $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ satisfazendo

$$\frac{f(n)}{f(n-1)} = q, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

(a) Expresse a função f acima por meio de uma recorrência.

(b) Resolva esta recorrência.

109[@]. Resolva as seguintes recorrências

(a)
$$f(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n < 2, \\ 2f(n-1), & \text{se } n \geq 2 \end{cases}$$

(b)
$$f(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n < 2, \\ 2f(n-2), & \text{se } n \geq 2 \end{cases}$$

110[⋆]. Resolva as seguintes recorrências.

(a) $f(n) = nf(n-1) + n$, para todo $n > 1$,

(b) $f(n) = f\left(\lfloor \sqrt{n} \rfloor\right) + n^2$, para todo $n > 1$,

(c) $f(n) = 2f\left(\lfloor \sqrt[3]{n} \rfloor\right) + n$, para todo $n > 1$.

111[⋆]. O seguinte algoritmo resolve o conhecido quebra-cabeça das Torres de Hanói. A execução de Hanoi(n, a, b, c) move n discos da torre a para a torre b usando a torre c como torre auxiliar, de acordo com as regras do jogo.

```
Hanoi(n, a, b, c)
---------------------------------------------
Se n = 0
    Termine
Hanoi(n − 1, a, c, b)
mova o disco no topo da torre a para o topo da torre b
Hanoi(n − 1, c, b, a)
```

Seja $M(n)$ o número de movimentos (passagem de um disco de uma torre para outra) na execução de Hanoi(n, a, b, c).

(a) Descreva $M(n)$ por meio de uma recorrência.

(b) Resolva esta recorrência.

112[@]. O número de comparações no pior caso de uma execução do algoritmo MergeSort para um vetor de n elementos é dado pela recorrência

$$T(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n < 2, \\ T\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + T\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right) + n - 1, & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

Do Exercício 55 temos que $T^-(n) \leq T(n) \leq T^+(n)$, onde

$$T^-(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n < 2, \\ 2T^-\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + n - 1, & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

e

$$T^+(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n < 2, \\ 2T^+\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right) + n - 1, & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

(a) Resolva as recorrências de $T^-(n)$ e $T^+(n)$.

(b) Use as soluções obtidas e o Exercício 42 para concluir que $T(n) \approx n \lg n$.

113$^@$. O "Master Method" ou "Master Theorem"[12] é um método para obtenção de soluções assintóticas para recorrências que surgem naturalmente na análise de "algoritmos de divisão e conquista".

Tais recorrências tem a forma geral

$$T(n) = aT(n/b) + f(n),$$

onde $a \geq 1$ e $b \geq 1$, a expressão n/b pode significar tanto $\lfloor n/b \rfloor$ como $\lceil n/b \rceil$ e $f()$ é uma função genérica. A recorrência do Exercício 112 é um exemplo de caso particular desta recorrência.

Sejam a, b e $f()$ como acima e sejam $n_0 \in \mathbb{N}$ e $T^+, T^- : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ tais que

$$\begin{aligned} T^-(n) &= aT^-(\lfloor n/b \rfloor) + f(n), \\ T^+(n) &= aT^+(\lceil n/b \rceil) + f(n), \end{aligned}$$

para todo $n \geq n_0$.

Resolva estas recorrências.

6.3 Recorrências Lineares Homogêneas

114$^-$. Seja $\mathbb{C}^\mathbb{N}$ o conjunto das funções $\mathbb{N} \to \mathbb{C}$. Dados $f, g \in \mathbb{C}^\mathbb{N}$ e $z \in \mathbb{C}$, definimos $f + g \in \mathbb{C}^\mathbb{N}$ e $zf \in \mathbb{C}^\mathbb{N}$ como as funções dadas por

$$\begin{aligned} (f+g)(n) &= f(n) + g(n), \\ (zf)(n) &= zf(n). \end{aligned}$$

[12]Popularizado com este nome por Cormen, Leiserson, Rivest, and Stein (2009).

(a) Prove que $(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}, +)$ é um grupo comutativo.

(b) Prove que $(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}, +)$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$.

115$^-$. Sejam $r_1, r_2 \in \mathbb{C} - \{0\}$. Prove que as funções $f_1, f_2 \colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ dadas por

$$\begin{aligned} f_1(n) &= r_1^n, \\ f_2(n) &= r_2^n, \end{aligned}$$

são linearmente independentes em $(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}, +)$ se e somente se $r_1 \neq r_2$.

116$^-$. Sejam[13] $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{C}$.

(a) Prove que se $g, h \colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ satisfazem a recorrência

$$f(n) = a_1 f(n-1) + a_2 f(n-2) + \ldots + a_k f(n-k), \text{ para todo } n \geq k,$$

então a função $g + h$ também satisfaz a mesma recorrência para todo $n \geq k$.

(b) Prove que se $f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ satisfaz a recorrência

$$f(n) = a_1 f(n-1) + a_2 f(n-2) + \ldots + a_k f(n-k), \text{ para todo } n \geq k,$$

então para todo $z \in \mathbb{C}$, a função zf também satisfaz a mesma recorrência para todo $n \geq k$.

(c) Prove que o conjunto das funções $f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ que satisfazem a recorrência

$$f(n) = a_1 f(n-1) + a_2 f(n-2) + \ldots + a_k f(n-k), \text{ para todo } n \geq k,$$

é um subespaço vetorial de $(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}, +)$.

117$^@$. Resolva as seguintes recorrências.

(a)

$$f(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n \leq 2 \\ 5f(n-1) - 7f(n-2) + 3f(n-3), & \text{se } n \geq 3. \end{cases}$$

[13] Este exercício usa a notação do Exercício 114

(b)

$$f(n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 0 \\ 9, & \text{se } n = 1 \text{ ou } n = 2 \\ 9f(n-1) - 27f(n-2) + 27f(n-3), & \text{se } n \geq 3. \end{cases}$$

(c)

$$f(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n \leq 1 \\ 3, & \text{se } n = 2 \\ 7f(n-1) - 16f(n-2) + 12f(n-3), & \text{se } n \geq 3. \end{cases}$$

118*. Resolva as seguintes recorrências.

(a)

$$f(n) = \begin{cases} 3, & \text{se } n \leq 1, \\ 7, & \text{se } n = 2, \\ 3f(n-1) - f(n-2) + 3f(n-3), & \text{se } n \geq 3. \end{cases}$$

(b)

$$2f(n) = 3f(n-1) - 3f(n-2) + f(n-3), \text{ para todo } n \geq 3,$$

com

$$f(n) = n, \text{ para todo } n < 3.$$

(c)

$$f(n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 0 \\ 4, & \text{se } n = 1 \text{ ou } n = 2, \\ 6f(n-1) - 12f(n-2) + 8f(n-3), & \text{se } n \geq 3. \end{cases}$$

(d)

$$f(n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 0 \\ \sqrt{5} + 2^n, & \text{se } n = 1 \text{ ou } n = 2 \\ 3f(n-1) - f(n-2) - 2f(n-3), & \text{se } n \geq 3. \end{cases}$$

(e)

$$f(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n = 0 \\ 2^n, & \text{se } n = 1 \text{ ou } n = 2 \\ 6f(n-1) - 11f(n-2) + 6f(n-3), & \text{se } n \geq 3. \end{cases}$$

(f)

$$f(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n = 0 \\ 3^n, & \text{se } n = 1 \text{ ou } n = 2 \\ 10f(n-1) - 31f(n-2) + 30f(n-3), & \text{se } n \geq 3. \end{cases}$$

(g)

$$f(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n \leq 2 \\ 8f(n-1) - 21f(n-2) + 18f(n-3), & \text{se } n \geq 3. \end{cases}$$

(h)

$$f(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n \leq 1, \\ 5f(n-1) - 6f(n-2), & \text{se } n > 1. \end{cases}$$

(i)

$$f(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n \leq 1, \\ 4f(n-1) + 3f(n-2), & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

(j)

$$f(n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 0, \\ 2, & \text{se } n = 1, \\ 2f(n-1) + 4f(n-2), & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

(k)

$$f(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n \leq 1, \\ 2f(n-1) - f(n-2), & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

(l)

$$f(n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n \leq 1, \\ 2f(n-1) - f(n-2), & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

(m)

$$f(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n \leq 1, \\ f(n-1) - f(n-2), & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

(n)

$$f(n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n \leq 1 \\ 4f(n-1) - 4f(n-2), & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

(o)

$$f(n) = \begin{cases} 4n, & \text{se } n < 2, \\ 4f(n-2), & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

(p)

$$f(n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 0 \\ 6, & \text{se } n = 1 \\ 6f(n-1) - 9f(n-2), & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

(q)

$$f(n) = \begin{cases} 2n, & \text{se } n < 2, \\ f(n-2), & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

119*. Resolva as seguintes recorrências.

(a) [14]

$$f(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n \leq 1, \\ nf(n-1) + n(n-1)f(n-2), & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

(b) [15]

$$f(n) = \begin{cases} n+1, & \text{se } n \leq 1, \\ \sqrt{f(n-1)f(n-2)}, & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

[14] **Sugestão:** Considere a função

$$g(n) = \frac{f(n)}{n!}.$$

[15] **Sugestão:** Considere a função

$$g(n) = \lg f(n).$$

(c) [16]

$$f(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n = 0, \\ \sqrt{1 + f(n-1)^2}, & \text{se } n \geq 1. \end{cases}$$

(d) [17]

$$f(n) = \begin{cases} n + 1, & \text{se } n \leq 1, \\ f(n-1)f(n-2), & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

120*. Resolva a recorrência

$$f(n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n \leq 4, \\ 7f(n-1) - 19f(n-2) + 25f(n-3) - 16f(n-4) + 4f(n-5), & \text{se } n > 4. \end{cases}$$

6.4 Recorrências Lineares não Homogêneas

121@. Resolva as seguintes recorrências.

(a)

$$f(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n = 0, \\ f(n-1) + 1, & \text{se } n > 0. \end{cases}$$

(b)

$$f(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n = 0, \\ 2f(n-1) + 1, & \text{se } n > 0. \end{cases}$$

(c)

$$f(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n = 0, \\ f(n-1) + n, & \text{se } n > 0 \end{cases}$$

[16]**Sugestão:** Considere a função

$$g(n) = f(n)^2.$$

[17]**Sugestão:** Considere a função

$$g(n) = \lg f(n).$$

(d)

$$f(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n < 1, \\ 2f(n-1) + n, & \text{se } n \geq 1. \end{cases}$$

(e)

$$f(n) = 2f(n-1) + n^2, \text{ para todo } n \geq 1$$

(f)

$$f(n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n \leq 1, \\ 3f(n-2) + \frac{1}{3^n}, & \text{se } n > 1. \end{cases}$$

(g)

$$f(n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n \leq 1, \\ 2f(n-2) + \frac{1}{2^n}, & \text{se } n > 1. \end{cases}$$

(h)

$$f(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n < 1 \\ 2f(n-1) + 2n - 1, & \text{se } n \geq 1 \end{cases}$$

(i)

$$f(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n < 1 \\ f(n-1) + 2n - 1, & \text{se } n \geq 1 \end{cases}$$

(j)

$$f(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n < 1 \\ 2f(n-1) + n^2 + n, & \text{se } n \geq 1 \end{cases}$$

(k)

$$f(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n < 2, \\ f(n-1) + f(n-2) + 1, & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

(l)

$$f(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n < 2, \\ 7f(n-1) - 12f(n-2) + 2n, & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

(m)

$$f(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n < 2, \\ 5f(n-1) - 6f(n-2) + n.3^n, & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

(n)

$$f(n) = \begin{cases} 5n, & \text{se } n < 2, \\ 7f(n-1) - 10f(n-2) + n.5^n, & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

(o)

$$f(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n < 2, \\ 7f(n-1) - 10f(n-2) + n.5^n, & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

(p)

$$f(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n < 2, \\ 5f(n-1) - 6f(n-2) + n.5^n, & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

(q)

$$f(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n < 2, \\ 7f(n-1) - 10f(n-2) + n.3^n, & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

(r)

$$f(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n < 2, \\ 8f(n-1) - 15f(n-2) + n.2^n, & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

(s)

$$f(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n < 2, \\ f(n-1) + f(n-2) + 6n + 3, & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

(t)

$$f(n) = \begin{cases} n, & \text{se } n < 2, \\ 5f(n-1) - 4f(n-2) + 2n.5^n + 2, & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

122*. O **"Triângulo de Cantor"**, (batizado em homenagem ao Georg Cantor), é uma "tabela infinita" triangular em que cada par $(i, j) \in \mathbb{N}^2$ ocupa uma posição de maneira que, para todo $n \in \mathbb{N}$, a n-ésima linha do triângulo é formada por todos os pares $(i, j) \in \mathbb{N}^2$ satisfazendo $i + j = n$.

As linhas, colunas e posições começam a contar a partir de 0, de cima para baixo e da esquerda para direita. Assim, por exemplo, $(0, 0)$ ocupa a posição 0 (linha 0, coluna 0); $(0, 1)$ ocupa a posição 1 (linha 1, coluna 0); $(1, 0)$ ocupa a posição 2 (linha 1, coluna 1); $(0, 2)$ ocupa a posição 3 (linha 2, coluna 0) e assim por diante. As 7 primeiras linhas do Triângulo de Cantor são

$$
\begin{array}{ccccccc}
(0,0) & & & & & & \\
(0,1) & (1,0) & & & & & \\
(0,2) & (1,1) & (2,0) & & & & \\
(0,3) & (1,2) & (2,1) & (3,0) & & & \\
(0,4) & (1,3) & (2,2) & (3,1) & (4,0) & & \\
(0,5) & (1,4) & (2,3) & (3,2) & (4,1) & (5,0) & \\
(0,6) & (1,5) & (2,4) & (3,3) & (4,2) & (5,1) & (6,0)
\end{array}
$$

(a) Seja $l(n)$ o número de pares na n-ésima linha do Triângulo de Cantor

i. Descreva $l(n)$ como uma recorrência.

ii. Resolva essa recorrência.

(b) Seja $t(n)$ o número de pares no Triângulo de Cantor até a n-ésima

i. Descreva $t(n)$ como uma recorrência.

ii. Resolva essa recorrência.

(c) Seja $p(i, j)$ a posição ocupada pelo par (i, j) no Triângulo de Cantor. Dê uma expressão não recorrente para $p(i, j)$.

123⋆. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $S(n)$ o número de somas efetuado na execução de $\mathsf{F}(n)$, o algoritmo do Exercício 89.

(a) Expresse $S(n)$ por uma recorrência.

(b) Resolva essa recorrência.

124⋆. Para todo $n \geq 0$, um n-cubo é um diagrama composto por pontos e linhas que ligam pares de pontos entre si. O 0-cubo tem um ponto e nenhuma linha. Para todo $n > 0$, o n-cubo é o diagrama obtido desenhando-se lado a lado duas cópias do $(n-1)$-cubo e ligando cada ponto de uma das cópias ao seu correspondente na outra cópia por uma linha.

(a) Descreva o número de pontos de um n-cubo através de uma recorrência.

(b) Resolva esta recorrência.

(c) Descreva o número de linhas de um n-cubo através de uma recorrência.

(d) Resolva esta recorrência.

6.5 Somatórios

$125^{@}$. Dê uma expressão livre de somatórios para $\sum_{i=0}^{n} i$.

$126^{@}$. Dado $q \in \mathbb{C} - \{0\}$, uma *progressão geométrica*[18] de razão q é uma função $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ satisfazendo

$$\frac{f(n+1)}{f(n)} = q, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Assim, a soma dos n termos iniciais de uma progressão geométrica é dada por

$$s(n) = \sum_{i=0}^{n-1} f(i).$$

(a) Expresse a função f acima por meio de uma recorrência linear homogênea.

(b) Resolva esta recorrência, obtendo assim uma expressão para o termo geral da progressão geométrica.

(c) Dê uma expressão livre de somatórios para $s(n)$.

$127^{@}$. Uma função $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ é uma *progressão aritmética*[19] se existe $r \in \mathbb{C}$ tal que

$$f(i+1) - f(i) = r \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Assim, a soma dos n termos iniciais de uma progressão aritmética é dada por

$$s(n) = \sum_{i=0}^{n-1} f(i).$$

(a) Expresse a função f acima por meio de uma recorrência linear não homogênea.

(b) Resolva esta recorrência, obtendo assim uma expressão para o termo geral da progressão aritmética.

(c) Dê uma expressão livre de somatórios para $s(n)$.

---

[18] cfr. Exercício 108

[19] cfr. Exercício 105

128$^{@}$. Dê uma expressão[20] livre de somatórios para $\sum_{i=0}^{n} i2^i$.

129*. Calcule o valor dos seguintes somatórios.

(a)
$$\sum_{i=0}^{n} i^2.$$

(b)
$$\sum_{i=0}^{n} i^3.$$

(c)
$$\sum_{i=0}^{n} i(i-1).$$

(d)
$$\sum_{i=0}^{n} \frac{i}{2^i}.$$

(e)
$$\sum_{i=0}^{n} i^2 3^i.$$

(f)
$$\sum_{i=0}^{n} i256^i.$$

(g)
$$\sum_{i=0}^{n} \frac{i^2}{5^i}.$$

(h)
$$\sum_{i=0}^{n} i2^{i-1}.$$

(i)
$$\sum_{i=0}^{n} i^2(i-1).$$

[20] cfr. Exercício 48

(j)
$$\sum_{i=0}^{n} i(2^i - i).$$

130⋆. A *média*[21] do número de comparações efetuadas na execução do algoritmo de busca binária em um vetor de n posições é dada por[22]

$$\begin{aligned}\mu(n) = {} & 1 \times \frac{1}{n} + 2 \times \frac{2}{n} + 3 \times \frac{4}{n} + 4 \times \frac{8}{n} + \dots \\ & + \lfloor \lg n \rfloor \times \frac{2^{\lfloor \lg n \rfloor - 1}}{n} \\ & + (\lfloor \lg n \rfloor + 1) \times \frac{(n - \sum_{i=1}^{\lfloor \lg n \rfloor} 2^{i-1})}{n}\end{aligned}$$

(a) Dê uma expressão livre de somatórios[23] para $\mu(n)$.

(b) Conclua do item anterior que $\mu(n) \approx \lfloor \lg n \rfloor$.

131⋆. Dê uma expressão livre de somatórios para

$$s(n) = \sum_{i=0}^{n} F(i),$$

onde $F(n)$ é a sequência de Fibonacci[24].

6.6 Algumas Aplicações

132@. Em muitas situações de cálculo numérico trabalha-se com matrizes triangulares inferiores, isto é, matrizes quadradas cujos elementos acima da diagonal principal são todos nulos. Nesses casos é comum representar uma matriz triangular inferior de n linhas por um vetor contendo somente as posições não-nulas da matriz, o que resulta numa economia de espaço de quase 50%.

[21] Também chamada *número esperado* ou *esperança*.

[22] Assume-se aqui que a busca por qualquer dos n elementos do vetor é equiprovável e bem-sucedida.

[23] **Sugestão:** use os resultados dos Exercícios 57 e 48

[24] Veja o Exercício 53.

Suponha que a matriz triangular inferior M, de n linhas indexadas de 1 a n, será representada por um vetor $v[0..N(n)-1]$, onde $N(n)$ é o tamanho do vetor necessário para representar uma matriz triangular inferior de n linhas.

(a) Descreva $N(n)$ através de uma recorrência.

(b) Resolva esta recorrência.

(c) Qual o índice de v que corresponde à posição $M[i,j]$?

133$^{@}$. Uma *árvore binária* T é uma *árvore vazia*, denotada por λ ou é um par $(E(T), D(T))$ onde $E(T)$ e $D(T)$ são árvores binárias, chamadas respectivamente de *subárvore esquerda* e *subárvore direita* de T. Vamos denotar por $\mathcal{B}$ o conjunto das árvores binárias.

O *tamanho* de uma árvore T é dado por

$$|T| = \begin{cases} 0, & \text{se } T = \lambda, \\ |E(T)| + |D(T)| + 1, & \text{caso contrário .} \end{cases}$$

A árvore de tamanho um é chamada de *árvore trivial*.

A *altura* de uma árvore T é dada por

$$h(T) = \begin{cases} 0, & \text{se } T = \lambda, \\ \max\{h(E(T)), h(D(T))\} + 1, & \text{se } T \neq \lambda. \end{cases}$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $h^{+}(n)$ a maior altura possível de uma árvore binária de tamanho n.

(a) Expresse $h^{+}(n)$ como uma recorrência.

(b) Resolva esta recorrência.

134$^{@}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $t^{+}(n)$ o maior tamanho possível de uma árvore binária[25] de altura n.

(a) Expresse $t^{+}(n)$ como uma recorrência.

(b) Resolva esta recorrência.

[25] Veja o Exercício 133.

135$^@$. Seja AVL o conjunto das árvores binárias[26] T satisfazendo

$$\lambda \in \mathsf{AVL} \text{ e } E(T) \in \mathsf{AVL} \text{ e } D(T) \in \mathsf{AVL}.$$

e

$$|h(E(T)) - h(D(T))| \leq 1.$$

Seja $t^-(n)$ o menor tamanho possível de uma árvore AVL de altura n.

(a) Expresse $t^-(n)$ como uma recorrência.

(b) Resolva esta recorrência.

136$^@$. Resolva a seguinte recorrência que expressa o número médio de comparações na execução do algoritmo $\mathsf{QuickSort}$.

$$C(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n < 2, \\ \frac{(n+1)}{n}C(n-1) + \frac{2(n-1)}{n}, & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

[26] Veja o Exercício 133.

7 Fundamentos de Contagem

137. Em se tratando de contagem, é interessante ter uma noção intuitiva de grandezas e das relações entre elas. No contexto das ciências exatas em geral, é usual expressar grandezas como potências de 10. No contexto da Ciência da Computação, entretanto, é mais natural expressar grandezas como potências de 2. Nas questões abaixo, n representa uma quantidade e o exercício consiste em determinar os valores de k e d para os quais

$$10^d \leq n < 10^{d+1},$$
$$2^k \leq n < 2^{k+1}.$$

(a) Tempo, em segundos[27]:

i. $n =$ uma hora.
ii. $n =$ um dia.
iii. $n =$ uma semana.
iv. $n =$ um mês.
v. $n =$ um ano.
vi. $n =$ sua idade.
vii. $n =$ tempo decorrido desde as 00h00:00 de 1 de janeiro de 1970[28].
viii. $n =$ um século.
ix. $n =$ um milênio.
x. $n =$ um milhão de anos.
xi. $n =$ idade estimada da Terra[29].
xii. $n =$ idade estimada da Via Láctea[30].
xiii. $n =$ idade estimada do universo observável[31].

(b) Distância, em metros[32]:

i. $n =$ maior distância possível entre dois pontos na superfície da Terra[33].

[27] veja http://en.wikipedia.org/wiki/Second
[28] veja http://en.wikipedia.org/wiki/Date_(Unix)
[29] veja http://en.wikipedia.org/wiki/Earth_Age
[30] veja http://en.wikipedia.org/wiki/Milky_Way
[31] veja http://en.wikipedia.org/wiki/Age_of_the_Universe
[32] veja http://en.wikipedia.org/wiki/Metre
[33] veja http://en.wikipedia.org/wiki/Earth

ii. $n =$ distância da Terra ao Sol[34].
iii. $n =$ um ano-luz.
iv. $n =$ diâmetro estimado da Via Láctea[35].

(c) Velocidade, em metros por segundo:

i. $n =$ de um homem.
ii. $n =$ de um animal.
iii. $n =$ de um veículo terrestre.
iv. $n =$ de um veículo aquático.
v. $n =$ de um veículo aéreo.
vi. $n =$ da Terra em relação ao Sol[36].
vii. $n =$ da luz[37].

(d) Massa, em gramas:

i. $n =$ de um homem.
ii. $n =$ de um carro.
iii. $n =$ de um elefante adulto[38].
iv. $n =$ de um Boeing-737.
v. $n =$ água na Terra[39].
vi. $n =$ da Terra[40].
vii. $n =$ do Sol[41].
viii. $n =$ da Via Láctea[42].
ix. $n =$ da Lua[43].
x. $n =$ do universo observável[44].

(e) Volume, em litros:

i. $n =$ de um homem.
ii. $n =$ de um carro.

---

[34] veja http://en.wikipedia.org/wiki/Earth
[35] veja http://en.wikipedia.org/wiki/Milky_Way
[36] veja http://en.wikipedia.org/wiki/Earth
[37] veja http://en.wikipedia.org/wiki/Earth
[38] veja http://en.wikipedia.org/wiki/Elephant
[39] veja http://en.wikipedia.org/wiki/Hydrosphere
[40] veja http://en.wikipedia.org/wiki/Earth
[41] veja http://en.wikipedia.org/wiki/Sun
[42] veja http://en.wikipedia.org/wiki/Milky_Way
[43] veja http://en.wikipedia.org/wiki/Moon
[44] veja http://en.wikipedia.org/wiki/Mass_of_the_observable_universe

iii. $n =$ da água oceânica na Terra[45].
iv. $n =$ da Terra[46].
v. $n =$ da Lua[47].
vi. $n =$ do Sol[48].
vii. $n =$ do universo observável[49].

(f) Outras quantidades:

i. $n =$ população de Curitiba.
ii. $n =$ população do Paraná.
iii. $n =$ população do Brasil.
iv. $n =$ população da Terra.
v. $n =$ número de estrelas no universo observável[50].
vi. $n =$ número estimado de átomos no universo observável[51].
vii. $n =$ produto interno bruto brasileiro em reais.
viii. $n =$ dívida interna brasileira em reais.
ix. $n =$ número de células nervosas no corpo humano.

138^{-}. Prove que a composição de funções bijetoras é uma bijeção.

139^{-}. Prove que a relação $\sim$ sobre conjuntos finitos dada por

$$A \sim B := |A| = |B|,$$

é uma relação de equivalência.

$140^{\star}$. Qual o número de

(a) múltiplos positivos de 3 menores ou iguais a 100?
(b) múltiplos positivos de 4 menores ou iguais a 500?
(c) múltiplos positivos de n menores ou iguais a k?

[45] veja http://en.wikipedia.org/wiki/Ocean
[46] veja http://en.wikipedia.org/wiki/Earth
[47] veja http://en.wikipedia.org/wiki/Moon
[48] veja http://en.wikipedia.org/wiki/Sun
[49] veja http://en.wikipedia.org/wiki/Observable_universe
[50] veja http://en.wikipedia.org/wiki/Observable_universe
[51] veja http://en.wikipedia.org/wiki/Observable_universe

8 União e Produto Cartesiano

$141^{\#}$. Sabendo que se A e B são conjuntos finitos, então

$$|A \times B| = |A||B|,$$

prove por indução em n que se $A_1, \ldots, A_n$ são conjuntos finitos então,

$$\left|\prod_{i=1}^{n} A_i\right| = \prod_{i=1}^{n} |A_i|$$

$142^{@}$. Quantos divisores naturais tem o número 72?

$143^{\star}$. Quantos divisores naturais tem o número 360?

$144^{\#}$. Prove que o número de divisores naturais de um inteiro $n \in \mathbb{N}$ é

$$\prod_{i=1}^{k} (m_i + 1),$$

onde

$$\prod_{i=1}^{k} p_i^{m_i},$$

é a decomposição de n em fatores primos.

$145^{\star}$. Qual o número de inteiros positivos menores ou iguais a 1000 que são ímpares ou quadrados de inteiros?

Generalize a resposta dando uma expressão para o número de inteiros positivos menores ou iguais a n que são ímpares ou quadrados de inteiros. Explique o raciocínio que leva à resposta.

$146^{\star}$. Uma técnica de cálculo de números em ponto flutuante que permite um maior controle da propagação de erros de precisão é a chamada *aritmética intervalar*. Em vez de fazer os cálculos com números, usa-se intervalos fechados para os cálculos.

Por exemplo, em vez de computar $\pi + e$ e obter um valor aproximado do resultado, computa-se a soma $[3.140 \times 10^1, 3.141 \times 10^1] + [2.780 \times 10^1, 2.781 \times 10^1]$ de intervalos que contém os somandos e obtem-se como resultado o intervalo $[5.920 \times 10^1, 5.922 \times 10^1]$ que seguramente contém $\pi + e$. Com isso sabe-se que qualquer número neste intervalo difere de no máximo 10^{-3} de $\pi + e$, ou seja, o erro de aproximação é controlado.

Se a quantidade de números distintos representáveis em ponto flutuante é n, quantos intervalos diferentes é possível representar?

9 Sequências

147[@]. Um "bit" é um elemento de $\{0, 1\}$.

Se um "byte" é uma sequência de 8 "bits", quantos valores diferentes pode assumir um "byte"?

148[@]. Um teclado convencional tem 47 "teclas que geram caracteres". Cada tecla pode gerar dois caracteres, conforme combinada ou não com a tecla "shift". Chamaremos de *caracteres convencionais* os caracteres que podem ser gerados desta maneira.

Uma *senha convencional* é uma sequência de caracteres convencionais.

Considere um sistema de quebra de senhas à base de "força bruta", isto é, que tenta todas as senhas possíveis, e suponha que o sistema é capaz de testar 1 (uma) senha por segundo.

(a) Qual o menor tamanho n que deve ter uma senha convencional para garantir que tal sistema não seja capaz de testar todas as senhas possíveis em um dia?

(b) Se o sistema atacante for um milhão de vezes mais rápido, para quanto mudará este valor?

149[@]. Qual o maior valor de n tal que é possível gravar em um dvd (4 700 372 992 bytes) todos os possíveis arquivos de tamanho até n?

150[⋆]. Quantos resultados possíveis existem para uma sequência de

(a) n lançamentos consecutivos de uma moeda?

(b) até n lançamentos consecutivos de uma moeda?

151[⋆]. Quantos resultados possíveis existem para uma sequência de

(a) n lançamentos consecutivos de um dado?

(b) até n lançamentos consecutivos de um dado?

152[⋆]. O Dicionário Houaiss da Língua Portuguesa registra 228 500 verbetes utilizando o alfabeto de 26 letras. O mais longo deles tem 46 letras.

Supondo que todas as palavras de até 46 letras sejam equiprováveis, qual a probabilidade de uma palavra de até 46 letras escolhida uniformemente ao acaso estar registrada no Houaiss?

153⋆. Um *palíndromo* sobre um conjunto A é uma sequência $(a_1, \dots, a_k)$ de elementos de A que "permanece a mesma quando lida na ordem reversa", isto é, que satisfaz

$$a_i = a_{k-i+1}, \text{ para todo } 1 \leq i \leq k.$$

(a) Enumere todos os palíndromos de tamanho 4 sobre $\{a, b, c\}$.

(b) Enumere todos os palíndromos de tamanho 5 sobre $\{a, b, c\}$.

(c) Qual o número de palíndromos de tamanho k sobre um conjunto de n elementos?

154⋆. Um protocolo de comunicação usa três tipos de pacotes de dados, T_1, T_2 e T_3, diferenciados por um campo inicial. Os pacotes do tipo T_1 tem, 4 bits de dados após o campo inicial (identificação do tipo); os pacotes do tipo T_2 tem 8 bits de dados; e os pacotes do tipo T_3 tem 10 bits de dados. Qual o número de pacotes distintos que existem neste protocolo?

155⋆. O endereço de um dispositivo na InterNet (endereço IP) é um número de 4 *bytes*.

(a) Qual o número de endereços IP possíveis?

(b) Dos endereços possíveis, as seguintes faixas de endereços são reservadas para redes locais:

- 10.0.0.0 a 10.255.255.255
- 172.16.0.0 a 172.31.255.255
- 192.168.0.0 a 192.168.255.255
- 169.254.0.0 a 169.254.255.255

Qual o número de endereços IP não-reservados na rede?

156⋆. Interfaces de rede recebem uma identificação do fabricante conhecida como *endereço MAC* que é um número de 48 bits[52]. Se a inclusão

[52] Atualmente é um número de 64 bits, o que já é usado por tecnologias como *FireWire*, *IPv6*, *802.15.4*).

digital for um sucesso absoluto, quantas intefaces de rede poderiam ser dadas a cada habitante do planeta?

157*. Em um jantar foram servidos 2 tipos de entrada (pães com patês e salada), 3 tipos de massa (espaguete, talharim e nhoque), 4 tipos de molho (bolonhesa, pesto, branco e funghi), e 2 tipos de sobremesa (sorvete e salada de frutas). Sabendo que nenhum convidado escolheu a mesma combinação, e que todos que escolheram a salada não escolheram nhoque, qual o número máximo de convidados?

158*. Uma *data* é uma sequência de 8 dígitos da forma $d_1d_2m_1m_2a_1a_2a_3a_4$, onde d_1d_2, m_1m_2 e $a_1a_2a_3a_4$ são dígitos representando o dia, mês e ano, respectivamente. Por exemplo, 25122012 e 14071889 são datas e 31022013 e 48151623 não são.

(a) Desconsiderando os anos bissextos, quantas das sequências de 8 dígitos são datas válidas?

(b) Qual a probabilidade de uma sequência de 8 dígitos escolhida uniformemente ao acaso ser uma data?

(c) Se um gerador aleatório gera uma sequência de 8 dígitos a cada segundo (independente e uniformemente), qual é a probabilidade de não ter gerado nenhuma data ao final de um minuto?

159*. A licença de um veículo no Brasil é uma cadeia composta por 3 letras seguida de 4 dígitos. Quantos veículos licenciados pode haver simultaneamente no Brasil? Compare com a resposta do exercício 137(f)iii.

160*. Os números de telefone no Brasil podem ser números de 8 dígitos, sendo que o primeiro não pode ser 0 ou de 9 dígitos, sendo o primeiro necessariamente um 9.

(a) Quantos números de telefone são possíveis no Brasil?

(b) Existem mais números de telefone ou licenças de veículo[53] possíveis?

161*. Um certo monitor de computador tem resolução de 640 por 480 *pixels* com resolução de cor de 32 bits (também conhecido como "truecolor",

[53]Veja o Exercício 159

isto é, cada *pixel* pode assumir 2^{32} cores diferentes). Sua frequência de varredura (isto é, a frequência com que a imagem exibida pode ser modificada) é de 60 Hz. Quanto tempo, no mínimo, levaria o monitor[54] para exibir todas as imagens possíveis?

162*. O Secure Hash Algorithm 1 (SHA-1) é uma função de hashing que associa sequências de bytes de qualquer tamanho a sequências 160 bits.

Por exemplo, a imagem da sequência de bytes correspondente à cadeia "The quick brown fox jumps over the lazy dog" é a sequência de bits `2fd4e1c67a2d28fced849ee1bb76e7391b93eb12` em notação hexadecimal.

Um dos usos do SHA-1 é o de servir como uma espécie de "assinatura" de arquivos. Desde sua adoção em 1993 até 2017 não se conhecia nenhum exemplo de dois arquivos com o mesmo valor de SHA-1.

(a) Quanto espaço no mínimo seria necessário para armazenar um conjunto de arquivos que garantisse que ao menos dois deles tivessem o mesmo valor de SHA-1?

(b) Supondo que estes arquivos estivessem disponíveis e que o tempo necessário para computar o valor de SHA-1 de um arquivo de n bytes seja $c_1 n$ e que o tempo necessário para comparar dois valores de SHA-1 seja c_2 (c_1 e c_2 são constantes medidas em "ciclos de processador"), qual o tempo necessário para garantidamente identificar dois arquivos deste conjunto com o mesmo valor de SHA-1?

(c) Se a frequência do processador é de f Hz, quanto tempo seria necessário para garantidamente identificar dois arquivos deste conjunto com o mesmo valor de SHA-1?

[54] Estes parâmetros são mais ou menos os mesmos em se tratando de um televisor convencional.

10 Funções

163@. Quantos circuitos combinacionais funcionalmente diferentes com e entradas e s saídas são possíveis?

164@. De quantas maneiras diferentes podem acontecer os aniversários de um grupo de n pessoas?

165#. Deduza que existem n^k funções $[k] \to [n]$ através dos seguintes passos.

(a) Defina $f(k, n) :=$ número de funções $[k] \to [n]$.

(b) Observe que cada função $f \colon [k] \to [n]$ corresponde a um par (x, g) onde $x \in [n]$ corresponde à imagem de k por f e $g \colon [k-1] \to [n]$ corresponde às imagens de $1, \ldots k-1$ por f.

(c) Use esta observação para descrever $f(k, n)$ por meio de uma recorrência.

(d) Resolva esta recorrência.

166⋆. As letras do código MORSE são formadas por uma sequência de traços (_) e pontos (.), sendo permitidas repetições. Observe alguns exemplos utilizando quantidades distintas de símbolos:

- 3 símbolos: (_ , . , _)
- 4 símbolos: (. , . , _ , .)
- 5 símbolos: (_ , _ , . , _ , .)

Nessas condições, determine quantas letras poderiam ser representadas utilizando-se, no máximo, 8 símbolos?

167⋆. (VUNESP-04) Um certo tipo de código usa apenas dois símbolos, o número zero (0) e o número (1) e, considerando esses símbolos como letras, podem-se formar palavras. Por exemplo: 0, 01, 00, 001 e 110 são algumas palavras de uma, duas e três letras desse código. O número máximo de palavras com cinco letras ou menos, que podem ser formadas com esse código é:

10.1 Funções Injetoras (Arranjos)

168*. (VITA-SP) Considere os números de dois a seis algarismos distintos formados utilizando-se apenas 1, 2, 4, 5, 7 e 8. Quantos desses números são ímpares e começam com um dígito par?

169*. (VUDESC) O número de anagramas de quatro letras, começando com a letra **G** que pode ser formado com a palavra PORTUGAL é:

170*. (VUFPR) Dentre todos os números de quatro algarismos distintos formados com algarismo pertencentes ao conjunto {3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}, quantos são divisíveis por 2?

171*. (UFCE) Qual é a quantidade de números inteiros formados por três algarismos distintos, escolhidos dentre 1, 3, 5, 7 e 9 e que são maiores que 200 e menores que 800.

10.2 Funções Bijetoras (Permutações)

172$^@$. Colocando todos os números obtidos pelas permutações dos dígitos de $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ em ordem crescente, qual o lugar ocupado pelo número 43 521?

173*. Um clube resolve fazer uma Semana de Cinema. Para isso, os organizadores escolhem sete filmes, que serão exibidos um por dia. Porém, ao elaborar a programação, eles decidem que três desses filmes, que são de ficção científica, devem ser exibidos em dias consecutivos. Qual o número de maneiras diferentes que se pode fazer a programação.

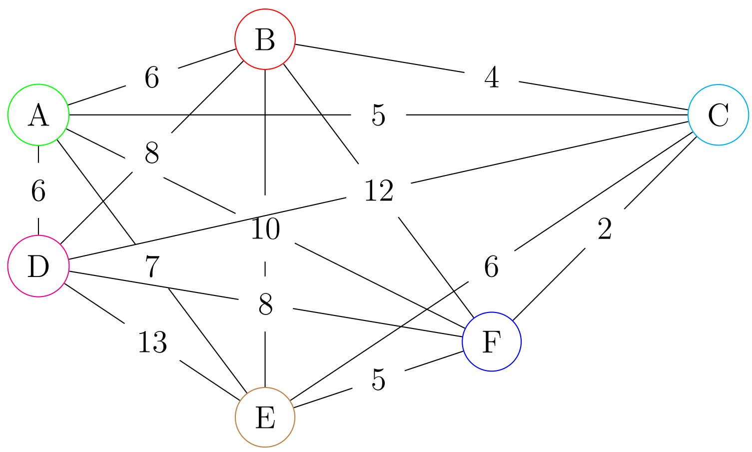
174*. Sobre uma mesa estão dispostos livros distintos, sendo 4 de algoritmos, 2 de arquitetura e 5 de cálculo. De quantas maneiras os livros podem ser empilhados sobre a mesa de tal forma que aqueles que tratam do mesmo assunto estejam juntos?

175*. A seguinte afirmação é verdadeira? Justifique.

A probabilidade de obter uma permutação das cartas que nunca aconteceu antes ao embaralhar um baralho comum é maior que 50%.

176[@]. Dois meninos e três meninas formarão uma roda dando-se as mãos. De quantos modos diferentes poderão formar a roda de modo que os dois meninos não fiquem juntos?

177*. (ENEM) João mora na cidade **A** e precisa visitar cinco clientes, localizados em cidades diferentes da sua, conforme ilustra a figura abaixo. Cada trajeto possível pode ser representado por uma sequência de 7 letras. Por exemplo, o trajeto **ABCDEFA**, informa que ele sairá da cidade **A**, visitante as cidades **B**, **C**, **D**, **E** e **F** nesta ordem, voltando para a cidade **A**. Além disso, o número indicado entre as letras informa o custo do deslocamente entre as cidades.



Como João quer economizar, ele precisa determinar qual o trajeto de menor custo para visitar os cinco clientes. Examinando a figura, percebe que precisa considerar somente parte das sequências, pois os trajetos **ABCDEFA** e **AFEDCBA** tem o mesmo custo. Ele gasta 1mim20s para examinar uma sequência e descartar sua simétrica, conforme apresentado. O tempo mínimo necessário para João verificar todas as sequências possíveis no problema é de

178*. Uma família é composta por seis pessoas: o pai, a mãe e quatro filhos. Num restaurante, essa família vai ocupar uma mesa redonda. Em quantas disposições diferentres essas pessoas podem se sentar em torno da mesa de modo que o pai e a mãe fiquem juntos?

179*. (VUFU-MG (1996)) Quer-se colocar as bandeiras de oito países em uma praça de forma octagonal, de modo que as bandeiras fiquem nos vértices do octógono e que as bandeiras de Brasil e Portugal ocupem vértices consecutivos. Pode-se fazer isso de quantas maneiras?

10.3 Subconjuntos (Combinações)

180$^@$. A mega–sena é uma loteria onde são sorteados 6 dentre os números de 1 a 60, sendo todos os resultados possíveis equiprováveis.

Para cada $k \geq 6$, uma *k-aposta* é uma escolha de k dentre os números de 1 a 60. Ganha-se a loteria com uma k–aposta se 6 dentre os k números que compõem esta k–aposta são os sorteados. Uma *aposta simples* é uma 6-aposta.

(a) Quantos são os resultados possíveis de um sorteio da mega-sena?

(b) Qual a chance de ganhar a mega-sena com uma aposta simples?

(c) Quantas vezes maior a chance de ganhar a mega-sena com uma 7–aposta, comparada com a chance de ganhar com uma aposta simples?

(d) Em geral, quantas vezes maior a chance de ganhar a mega-sena com uma k–aposta, comparada com a chance de ganhar com uma aposta simples?

181*. O sorteio 2052 da mega-sena (23 de junho de 2018) ficou famoso porque pela primeira vez na história da loteria, todos os seis números sorteados (50, 51, 56, 57, 58 e 59) pertenciam à mesma dezena.

Considerando todos os sorteios equiprováveis, qual a probabilidade de um sorteio da mega-sena (seis números entre 1 e 60) pertencerem à mesma dezena?

182$^{\#}$. Seja A um conjunto finito e seja $k \in \mathbb{N}$. Prove que

$$\binom{A}{k} \sim \binom{A}{|A|-k}.$$

183*. Numa formatura de 55 alunos de Ciência da Computação, cada aluno cumprimentou cada um de seus colegas exatamente uma vez, parabenizando-o por ter se formado. Quantos cumprimentos foram trocados?

184$^{\#}$. Prove[55] que

$$\binom{[n]}{k} \sim \binom{[n]}{n-k},$$

para todo $n, k \in \mathbb{N}$.

185$^{\#}$. Quantas são as sequências binárias de n dígitos com

- exatamente k dígitos 1s?
- pelo menos k dígitos 1s?
- no máximo k dígitos 1s?

186*. Numa sala[56] há 5 lugares e 7 pessoas. De quantas modos diferentes essas pessoas podem ocupar a sala, sendo que até 5 podem ficar sentadas e o resto em pé se

(a) as cadeiras são idênticas?

(b) as cadeiras são distintas?

187*. De quantas maneiras[57] podem ser escolhidos 3 números naturais distintos de 1 a 30 de modo que sua soma seja par?

188*. Ao final de um campeonato de futebol[58], somaram-se as pontuações das equipes, obtendo-se um total de 35 pontos. Cada equipe jogou

[55] **Sugestão:** use o Exercício 182

[56] Questão de vestibular da PUC-SP; contribuição de Gabriel Gugik

[57] Questão de vestibular da UNICAMP; contribuição de Gabriel Gugik

[58] Questão de vestibular da IME (2004); contribuição de Gabriel Gugik

com todos os adversários apenas uma vez. Determine quantos empates houve no campeonato, sabendo que cada vitória valia 3 pontos, cada empate valia 1 ponto e que derrotas não pontuavam.

189$^{\#}$. Prove que

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n,$$

usando resultados de contagem.

190*. Considere um baralho de 52 cartas divididas igualmente entre os 4 naipes (ouros, espadas, copas e paus).

(a) Qual é a probabilidade de, numa mão de 10 cartas, exatamente 2 delas serem de espadas?

(b) Dentre todas as $\binom{52}{8}$ mãos possíveis de 8 cartas, quantas delas têm exatamente 2 cartas de cada naipe?

191*. Uma urna contém a bolas azuis e v bolas vermelhas todas distintas entre si. De quantas maneiras é possível retirar desta urna uma amostra de n bolas com exatamente k bolas azuis?

192*. Dado $n \in \mathbb{N}$, um *grafo de n vértices* é um conjunto $G \subseteq \binom{[n]}{2}$. Cada elemento de $[n]$ é chamado de *vértice* de G e cada $\{u, v\} \in G$ é chamado de *aresta* de G. Em cada item, explique o raciocínio que leva à resposta.

(a) Quantos diferentes grafos de n vértices existem?

(b) Quantos diferentes grafos de n vértices com m arestas existem?

(c) Uma *descrição* de um grafo G é uma sequência de $2|G| + 1$ inteiros. O primeiro inteiro é o número de vértices de G. Cada um dos $|G|$ pares de inteiros seguintes representa uma aresta de G. Por exemplo as sequências $(3, 1, 2, 2, 3)$, $(3, 2, 1, 2, 3)$ e $(3, 2, 3, 1, 2)$ são três descrições diferentes do grafo $G = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}\}$ de 3 vértices. Quantas descrições diferentes tem um mesmo grafo G de n vértices e m arestas?

11 Composições

193*. Quantas composições admite um inteiro n?

194*. Quantas composições fracas com até n parcelas admite um inteiro n?

195*. De quantas maneiras é possível distribuir k bolas idênticas por n urnas distintas, de maneira que cada urna tenha pelo menos m bolas?

196*. De quantas maneiras é possível distribuir k bolas idênticas por n urnas distintas, de maneira que cada urna u tenha pelo menos $m(u)$ bolas?

197#. Em função dos valores de k e n, quantas soluções inteiras não negativas (ou seja, $x_i \geq 0$, para todo $i \in [k]$) distintas admitem as seguintes equações.

(a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} x_i = n.$

(b) $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} x_i \leq n.$

198#. Seja $k, n \in \mathbb{N}$ e $k \leq n$ de quantas maneiras distintas podemos escrever n como sendo uma *combinação linear* de k inteiros positivos ($x_i \in \mathbb{N}$ e $x_i < n$, com $i \in [k]$) multiplicados por constantes também inteiras positivas ($a_i \in \mathbb{N}$ e $a_i < n$, com $i \in [k]$), isto é

$$\sum_{i=1}^{k} a_i x_i = n.$$

199#. Num certo país, as moedas são só de dois tipos: 2 e 5 centavos. De quantas maneiras é possível trocar

(a) 12 centavos

(b) 20 centavos

(c) 92 centavos

(d) N centavos

por moedas de 2 e/ou de 5 centavos?

12 Inclusão/Exclusão

200$^{@}$. Quantos são os inteiros positivos menores ou iguais a 1000 que são divisíveis por 3 ou por 5 ou por 7?

Generalize o raciocínio dando uma expressão para o número de inteiros positivos menores ou iguais a n que são divisíveis por pelo menos um dentre $d_1, d_2, \dots, d_k$.

201*. Quantos são os inteiros positivos menores ou iguais a 2001 que são múltiplos de 3 ou 4 mas não são de 5?

202*. Quantos são os inteiros positivos menores ou iguais a 10 000 que são múltiplos de 4 ou 6 ou 10?

203*. Qual o número de soluções inteiras de[59]

$$x_1 + x_2 + x_3 = 12, 0 \leq x_i \leq 5?$$

204$^{\#}$. Usando o princípio da Inclusão/Exclusão e o fato de que os números compostos (i.e., $a = b.c$, com $a, b, c \in \mathbb{N} - 1$ não é composto nem primo) menores ou iguais a n são divisíveis por algum número primo menor ou igual a k tal que $k = \lfloor\sqrt{n}\rfloor$, determine:

(a) O número de primos que são menores ou iguais a 111

(b) O número de primos menores ou iguais a n

205$^{\#}$. Em um jogo, um dado de 6 faces numeradas é jogado 5 vezes e o jogador ganha se o resultado da última jogada for igual ao de pelo menos uma das jogadas anteriores. Qual é a probabilidade de ganhar neste jogo?[60]

[59] **Sugestão:** Para cada $i \in [3]$, considere o conjunto

$$G_i := \{(x_1, x_2, x_3) \in S \mid x_i > 5\},$$

onde S é o conjunto das soluções inteiras não negativas de $x_1 + x_2 + x_3 = 12$.

[60] Extraído e adaptado de (Tuffley, 2009, ex. 4)

206$^{\#}$. Uma classe tem $2n$ estudantes agrupados em n duplas[61].

(a) Mostre que existem $(2n)!/(2^n n!)$ maneiras de agrupar os $2n$ estudantes em n duplas.

(b) Considere um agrupamento inicial dos $2n$ estudantes em n duplas. De quantas maneiras pode-se reagrupar os estudantes de forma que cada dupla esteja quebrada (ou seja, de forma que cada dupla seja diferente)?

207$^{\#}$. A *função tociente de Euler*[62] (ou *função ϕ de Euler*) é a função que, dado $n \in \mathbb{N}$ conta o número de inteiros positivos menores que n e sem divisores em comum com n, isto é

$$\phi(n) := |\{k \in [n] \mid \mathsf{mdc}(k, n) = 1\}|\,.$$

Por exemplo, $\phi(12) = 4$ pois há quatros inteiros positivos, 1, 5, 7 e 11 que são menores ou iguais a 12 e sem divisores em comum com 12. Convenciona-se que $\phi(1) = 1$.

Use o Princípio de Inclusão–Exclusão para verificar que

$$\phi(n) = n \prod_{i=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)$$

onde $p_1, \ldots, p_k$ são os primos distintos que dividem n.

[63]: Se p é primo, então nenhum inteiro menor que p tem divisor em comum com p e, portanto, $\phi(p) = p - 1$. Se p é primo e $e \geq 1$, então $\phi(p^e)$ é o número de termos da sequência $(1, 2, 3, \ldots, p, p+1, \ldots, 2p, \ldots, p^e)$ que não são divisíveis por p. Os números divisíveis por p nesta sequência são $p, 2p, 3p, \ldots, p^e$. Assim

$$\phi(p^e) = p^e - p^{e-1} = p^e \left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

[61] Extraído e adaptado de (Tuffley, 2009, ex. 8)

[62] Extraído e adaptado de (Tuffley, 2009, ex. 9)

[63] **Sugestão:** Extraído de (Andreescu and Feng, 2004, p. 124, exemplo 6.6)

13 Permutações sem Ponto Fixo

208. (a) Qual o número de permutações sobre um conjunto de n elementos com exatamente um ponto fixo?

 (b) Qual o número de permutações sobre um conjunto finito de n elementos com exatamente k pontos fixos?

 (c) Qual o número de permutações sobre um conjunto finito de n elementos com pelo menos k pontos fixos?

 (d) Qual o número de permutações sobre um conjunto finito de n elementos com no máximo k pontos fixos?

 (e) Mostre que o número de permutações sem ponto fixo e o número de permutações com extamente um ponto fixo sobre um conjunto de n elementos difere de um para todo $n \in \mathbb{N}$[64].

209. De quantas maneiras podemos arranjar os inteiros $1, 2, 3, \ldots, 10$ de forma que nenhum dos cinco primeiros (i.e. 1,2,3,4,5) apareçam em suas posições naturais/originais[65]?

210. (a) Quantas permutações sobre $[n]$ existem de forma que i nunca é seguido de $i+1$ para nenhum $1 \leq i < n$?[66]

 (b) Como essa resposta muda, se incluirmos a restrição de que n não pode ser seguido de 1?

211. Suponha que numa disciplina de pós-graduação, a avaliação final é realizada por meio da entrega de um relatório técnico, em forma de artigo científico, sobre um trabalho prático desenvolvido com os conhecimentos adquiridos ao longo da disciplina. O professor desta disciplina quer desenvolver em seus alunos/estudantes a capacidade de avaliação de artigos científicos e propõe que a avaliação dos relatórios seja feita pelos próprios alunos.

 Considerando que a turma é composta de apenas 5 alunos, de quantas maneiras distintas o professor pode distribuir os relatórios técnicos aos alunos de forma que um mesmo autor não avalie o seu artigo.

---

[64] Adaptado de (Andreescu and Feng, 2004, p. 140, ex. 6.3)

[65] Extraído de (Tuffley, 2009, ex. 4)

[66] Extraído e adaptado de (Tuffley, 2009, ex. 9)

212. Para a palavra UFPR, podemos formar quantos anagramas de forma que cada letra não apareça em sua posição original.

213. Considere uma palavra formada por uma sequência de n letras A seguida de mais m letras B, quantos anagramas podemos formar dessa palavra de forma que nenhuma letra esteja em sua posição original.

14 Funções Sobrejetoras e Partições

214. Em um curso de Matemática Discreta, existem 8 estudantes que serão divididos em grupos de trabalho, de forma que cada grupo tenha pelo menos um aluno, para estudar 3 projetos diferentes. De quantas maneiras eles podem ser distribuídos?

215. Dado $n \in \mathbb{N}$, quantas funções $[n] \to [n]$ não são injetoras nem sobrejetoras?

216. Quantos programas distintos composto por 10 linhas de código podemos construir usando as instruções `store`, `load`, `jump` e `add` de forma que cada instrução seja utilizada pelo menos uma vez?

217. Em processamento de imagens, a tarefa de atribuir a cada *pixel* (*picture element*) p da imagem um rótulo (ou região) l, de forma que todos os rótulos sejam usados pelo menos uma vez, é conhecida como *segmentação da imagem* e pode ser descrita por uma função $S\colon P \to L$, onde $P = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ é o conjunto de pontos da imagem e $L = \{l_1, l_2, \ldots, l_m\}$. No caso particular em que $m = 2$ (por exemplo, rótulo "branco" e "preto") , o processo também é conhecido por binarização ou *thresholding* da imagem.

   (a) Como descrito acima, a função de segmentação S é uma injeção, sobrejeção, bijeção, ou nenhuma das anteriores?

   (b) De quantas maneiras distintas podemos segmentar uma imagem com $n = 9$ pixels em $m = 2$ regiões/rótulos?

   (c) E se a restrição de uso de todos os rótulos disponíveis fosse removida, a função de segmentação se tornaria uma injeção, sobrejação, bijeção, ou nenhuma das anteriores? Neste caso, qual seria o número de funções possíveis considerando os tamanhos dos conjuntos de 217b

218. Seja $S([m],[n])$ o conjunto das funções sobrejetoras $f\colon [m] \to [n]$ e a

sua cardinalidade determinada por

$$\begin{cases} 0, & \textsf{se } m < n, \\ \displaystyle\sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \binom{n}{i} i^m, & \textsf{se } m \geq n. \end{cases}$$

E seja $I([m],[n])$ o conjunto das funções injetoras $f\colon [m] \to [n]$ e a sua cardinalidade determinada por

$$\begin{cases} 0, & \textsf{se } m < n, \\ \dfrac{n!}{(n-m)!}, & \textsf{se } m \geq n. \end{cases}$$

Prove que $|S([m],[n])| = |I([m],[n])|$, se $m = n$ para todo $n > 0$.

219. Prove que

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \binom{n}{i} i^n = n!.$$

220. Em um curso de Matemática Discreta, existem 5 estudantes que serão divididos em 2 grupos de trabalho, de forma que cada grupo tenha pelo menos um aluno, para estudar um mesmo problema[67]. De quantas maneiras eles podem ser distribuídos?

[67]Exercício similar à 214, mas não idêntico

Referências

Titu Andreescu and Zuming Feng. *A Path to Combinatorics for Undergraduates: Counting Strategies*. Springer, 2004.

Thomas H. Cormen, Charles E. Leiserson, Ronald L. Rivest, and Clifford Stein. *Introduction to Algorithms*. MIT Press, 3 edition, 2009. ISBN 978-0-262-03384-8. URL http://mitpress.mit.edu/catalog/item/default.asp?ttype=2&tid=11866.

Chris Tuffley. The principle of inclusion-exclusion, 2009. URL http://www.mathsolympiad.org.nz/wp-content/uploads/2009/02/inclusion-exclusion.pdf&ei=sj2DU73XL6m0sQTL24CwCQ&usg=AFQjCNEh4U_iyB_WDYPDzSAYj_3MFZrIIQ&sig2=9YLp0YGfZI4Mv8OQsoHNNA.