Análise de Algoritmos
Aula 03

Prof. Murilo V. G. da Silva

DINF/UFPR

(material da disciplina: André Guedes, Renato Carmo, Murilo da Silva)

Notação $\mathcal{O}(1)$

Uma função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ é *assintoticamente limitada superiormente por uma constante*

Notação $\mathcal{O}(1)$

Uma função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ é *assintoticamente limitada superiormente por uma constante*

- Se $\exists c_f > 0$ tal que $\forall n \geq n_f$, $|f(n)| \leq c_f$.

Notação $\mathcal{O}(1)$

Uma função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ é *assintoticamente limitada superiormente por uma constante*

- Se $\exists c_f > 0$ tal que $\forall n \geq n_f$, $|f(n)| \leq c_f$.
- Ou seja,

Notação $\mathcal{O}(1)$

Uma função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ é *assintoticamente limitada superiormente por uma constante*

- Se $\exists c_f > 0$ tal que $\forall n \geq n_f$, $|f(n)| \leq c_f$.
- Ou seja, existem $c_f > 0$ e $n_f \in \mathbb{N}$ tais que $f(n)$ em valor absoluto nunca ultrapassa c_f de n_f em diante.

Notação $\mathcal{O}(1)$

Uma função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ é *assintoticamente limitada superiormente por uma constante*

- Se $\exists c_f > 0$ tal que $\forall n \geq n_f$, $|f(n)| \leq c_f$.
- Ou seja, existem $c_f > 0$ e $n_f \in \mathbb{N}$ tais que $f(n)$ em valor absoluto nunca ultrapassa c_f de n_f em diante.

Exemplo 3

A função

$$s(n) = \sqrt{2\pi}\left(1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{288n^2} - \frac{139}{51840n^3} - \frac{571}{2488320n^4} + \dots\right)$$

é assintoticamente limitada superiormente por uma constante pois

Notação $\mathcal{O}(1)$

Uma função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ é *assintoticamente limitada superiormente por uma constante*

- Se $\exists c_f > 0$ tal que $\forall n \geq n_f$, $|f(n)| \leq c_f$.
- Ou seja, existem $c_f > 0$ e $n_f \in \mathbb{N}$ tais que $f(n)$ em valor absoluto nunca ultrapassa c_f de n_f em diante.

Exemplo 3

A função

$$s(n) = \sqrt{2\pi}\left(1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{288n^2} - \frac{139}{51840n^3} - \frac{571}{2488320n^4} + \dots\right)$$

é assintoticamente limitada superiormente por uma constante pois

$$\forall n \geq 1 \quad |s(n)| \leq 100.$$

Notação $\mathcal{O}(1)$

Uma função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ é *assintoticamente limitada superiormente por uma constante*

- Se $\exists c_f > 0$ tal que $\forall n \geq n_f$, $|f(n)| \leq c_f$.
- Ou seja, existem $c_f > 0$ e $n_f \in \mathbb{N}$ tais que $f(n)$ em valor absoluto nunca ultrapassa c_f de n_f em diante.

Exemplo 3

A função

$$s(n) = \sqrt{2\pi}\left(1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{288n^2} - \frac{139}{51840n^3} - \frac{571}{2488320n^4} + \dots\right)$$

é assintoticamente limitada superiormente por uma constante pois

$$\forall n \geq 1 \quad |s(n)| \leq 100.$$

(obs: escolhemos uma constante maior do que necessário de propósito para enfatizar que isso não é necessário!)

Notação $\mathcal{O}(1)$

Exemplo 4

$f(n) = \sqrt{n}$ **não** é assintoticamente limitada superiormente por uma constante pois

Exemplo 4

$f(n) = \sqrt{n}$ **<u>não</u>** é assintoticamente limitada superiormente por uma constante pois

$$\nexists c_f > 0, n_f \in \mathbb{N} \textit{ tais que } |f(n)| \leq c_f, \ \forall n \geq n_f.$$

Notação $\mathcal{O}(1)$

Exemplo 4

$f(n) = \sqrt{n}$ **não** é assintoticamente limitada superiormente por uma constante pois

$$\nexists c_f > 0, n_f \in \mathbb{N} \textit{ tais que } |f(n)| \leq c_f, \ \forall n \geq n_f.$$

ou seja,

Exemplo 4

$f(n) = \sqrt{n}$ **não** é assintoticamente limitada superiormente por uma constante pois

$$\nexists c_f > 0, n_f \in \mathbb{N} \textit{ tais que } |f(n)| \leq c_f, \ \forall n \geq n_f.$$

ou seja,

$$\textit{para todo } c_f > 0 \textit{ e todo } n_f \in \mathbb{N} \ |f(n)| > c_f, \ \textit{para algum } n > n_f.$$

Notação $\mathcal{O}(1)$

Exemplo 4

$f(n) = \sqrt{n}$ **não** é assintoticamente limitada superiormente por uma constante pois

$$\nexists c_f > 0, n_f \in \mathbb{N} \textit{ tais que } |f(n)| \leq c_f, \ \forall n \geq n_f.$$

ou seja,

$$\textit{para todo } c_f > 0 \textit{ e todo } n_f \in \mathbb{N} \ |f(n)| > c_f, \ \textit{para algum } n > n_f.$$

Mais precisamente, veja que dados $c_f > 0$ e $n_f \in \mathbb{N}$, para $m = (\max\{\lceil c_f \rceil, n_f\} + 1)^2$,

Notação $\mathcal{O}(1)$

Exemplo 4

$f(n) = \sqrt{n}$ **não** é assintoticamente limitada superiormente por uma constante pois

$$\nexists c_f > 0, n_f \in \mathbb{N} \textit{ tais que } |f(n)| \leq c_f, \; \forall n \geq n_f.$$

ou seja,

$$\textit{para todo } c_f > 0 \textit{ e todo } n_f \in \mathbb{N} \; |f(n)| > c_f, \; \textit{para algum } n > n_f.$$

Mais precisamente, veja que dados $c_f > 0$ e $n_f \in \mathbb{N}$, para $m = (\max\{\lceil c_f \rceil, n_f\} + 1)^2$,

Temos $m = (\max\{\lceil c_f \rceil, n_f\} + 1)^2 > n_f$

Notação $\mathcal{O}(1)$

Exemplo 4

$f(n) = \sqrt{n}$ **não** é assintoticamente limitada superiormente por uma constante pois

$$\nexists c_f > 0, n_f \in \mathbb{N} \textit{ tais que } |f(n)| \leq c_f, \ \forall n \geq n_f.$$

ou seja,

$$\textit{para todo } c_f > 0 \textit{ e todo } n_f \in \mathbb{N} \ |f(n)| > c_f, \ \textit{para algum } n > n_f.$$

Mais precisamente, veja que dados $c_f > 0$ e $n_f \in \mathbb{N}$, para $m = (\max\{\lceil c_f \rceil, n_f\} + 1)^2$,

Temos $m = (\max\{\lceil c_f \rceil, n_f\} + 1)^2 > n_f$

Com isso,

Notação $\mathcal{O}(1)$

Exemplo 4

$f(n) = \sqrt{n}$ **não** é assintoticamente limitada superiormente por uma constante pois

$$\nexists c_f > 0, n_f \in \mathbb{N} \textit{ tais que } |f(n)| \leq c_f, \ \forall n \geq n_f.$$

ou seja,

$$\textit{para todo } c_f > 0 \textit{ e todo } n_f \in \mathbb{N} \ |f(n)| > c_f, \ \textit{para algum } n > n_f.$$

Mais precisamente, veja que dados $c_f > 0$ e $n_f \in \mathbb{N}$, para $m = (\max\{\lceil c_f \rceil, n_f\} + 1)^2$,

Temos $m = (\max\{\lceil c_f \rceil, n_f\} + 1)^2 > n_f$

Com isso,

$$|f(m)| = |\sqrt{m}| = \sqrt{(\max\{\lceil c_f \rceil, n_f\} + 1)^2} = \max\{\lceil c_f \rceil, n_f\} + 1 \geq \lceil c_f \rceil + 1 > c_f.$$

Notação $\mathcal{O}(1)$

O conjunto $\mathcal{O}(1)$

O conjunto das funções *assintoticamente limitadas superiormente por uma constante* é denotado por $\mathcal{O}(1)$, isto é,

$$\mathcal{O}(1) = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \ ; \ \text{existem } c_f > 0, n_f \in \mathbb{N} \ ; \ |f(n)| \leq c_f \ \forall n \geq n_f\}$$

Notação $\mathcal{O}(1)$

O conjunto $\mathcal{O}(1)$

O conjunto das funções *assintoticamente limitadas superiormente por uma constante* é denotado por $\mathcal{O}(1)$, isto é,

$$\mathcal{O}(1) = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \text{ ; existem } c_f > 0, n_f \in \mathbb{N} \text{ ; } |f(n)| \leq c_f \ \forall n \geq n_f\}$$

Nos exemplos do slide anterior temos que

Notação $\mathcal{O}(1)$

O conjunto $\mathcal{O}(1)$

O conjunto das funções *assintoticamente limitadas superiormente por uma constante* é denotado por $\mathcal{O}(1)$, isto é,

$$\mathcal{O}(1) = \{f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \ ; \text{ existem } c_f > 0, n_f \in \mathbb{N} \ ; \ |f(n)| \leq c_f \ \forall n \geq n_f\}$$

Nos exemplos do slide anterior temos que

$$\begin{aligned} s(n) &\in \mathcal{O}(1), \\ \sqrt{n} &\notin \mathcal{O}(1). \end{aligned}$$

Notação $\mathcal{O}(1)$

Convenção no uso da notação $\mathcal{O}(1)$

A expressão $\mathcal{O}(1)$ no lado direito de uma igualdade significa que a expressão do lado esquerdo é satisfeita para alguma função no conjunto $\mathcal{O}(1)$.

Notação $\mathcal{O}(1)$

Convenção no uso da notação $\mathcal{O}(1)$

A expressão $\mathcal{O}(1)$ no lado direito de uma igualdade significa que a expressão do lado esquerdo é satisfeita para alguma função no conjunto $\mathcal{O}(1)$.

$f(n) = g(n) \star O(1)$ significa que

Notação $\mathcal{O}(1)$

Convenção no uso da notação $\mathcal{O}(1)$

A expressão $\mathcal{O}(1)$ no lado direito de uma igualdade significa que a expressão do lado esquerdo é satisfeita para alguma função no conjunto $\mathcal{O}(1)$.

$f(n) = g(n) \star O(1)$ significa que

$$f(n) = g(n) \star h(n), \ \textit{para algum } h(n) \in \mathcal{O}(1),$$

Notação $\mathcal{O}(1)$

Convenção no uso da notação $\mathcal{O}(1)$

A expressão $\mathcal{O}(1)$ no lado direito de uma igualdade significa que a expressão do lado esquerdo é satisfeita para alguma função no conjunto $\mathcal{O}(1)$.

$f(n) = g(n) \star O(1)$ significa que

$$f(n) = g(n) \star h(n), \ \textit{para algum } h(n) \in \mathcal{O}(1),$$

Exemplo 5: Aproximação de Stirling

A *Aproximação de Stirling* para $n!$ é

Convenção no uso da notação $\mathcal{O}(1)$

A expressão $\mathcal{O}(1)$ no lado direito de uma igualdade significa que a expressão do lado esquerdo é satisfeita para alguma função no conjunto $\mathcal{O}(1)$.

$f(n) = g(n) \star O(1)$ significa que

$$f(n) = g(n) \star h(n),\ \textit{para algum } h(n) \in \mathcal{O}(1),$$

Exemplo 5: Aproximação de Stirling

A *Aproximação de Stirling* para $n!$ é

$$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \left(1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{288n^2} - \frac{139}{51840n^3} - \frac{571}{2488320n^4} + \dots\right),$$

Notação $\mathcal{O}(1)$

Convenção no uso da notação $\mathcal{O}(1)$

A expressão $\mathcal{O}(1)$ no lado direito de uma igualdade significa que a expressão do lado esquerdo é satisfeita para alguma função no conjunto $\mathcal{O}(1)$.

$f(n) = g(n) \star O(1)$ significa que

$$f(n) = g(n) \star h(n), \ \textit{para algum } h(n) \in \mathcal{O}(1),$$

Exemplo 5: Aproximação de Stirling

A *Aproximação de Stirling* para $n!$ é

$$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \left(1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{288n^2} - \frac{139}{51840n^3} - \frac{571}{2488320n^4} + \dots\right),$$

ou seja,

Notação $\mathcal{O}(1)$

Convenção no uso da notação $\mathcal{O}(1)$

A expressão $\mathcal{O}(1)$ no lado direito de uma igualdade significa que a expressão do lado esquerdo é satisfeita para alguma função no conjunto $\mathcal{O}(1)$.

$f(n) = g(n) \star O(1)$ significa que

$$f(n) = g(n) \star h(n), \; \textit{para algum } h(n) \in \mathcal{O}(1),$$

Exemplo 5: Aproximação de Stirling

A *Aproximação de Stirling* para $n!$ é

$$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \left(1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{288n^2} - \frac{139}{51840n^3} - \frac{571}{2488320n^4} + \ldots\right),$$

ou seja,

$$n! = s(n)\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n},$$

Convenção no uso da notação $\mathcal{O}(1)$

A expressão $\mathcal{O}(1)$ no lado direito de uma igualdade significa que a expressão do lado esquerdo é satisfeita para alguma função no conjunto $\mathcal{O}(1)$.

$f(n) = g(n) \star O(1)$ significa que

$$f(n) = g(n) \star h(n), \ \textit{para algum } h(n) \in \mathcal{O}(1),$$

Exemplo 5: Aproximação de Stirling

A *Aproximação de Stirling* para $n!$ é

$$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \left(1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{288n^2} - \frac{139}{51840n^3} - \frac{571}{2488320n^4} + \dots\right),$$

ou seja,

$$n! = s(n)\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n},$$

$$n! = \mathcal{O}(1)\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}.$$

Notação $\mathcal{O}(1)$

Forma usual no uso da notação $\mathcal{O}(1)$:

Notação $\mathcal{O}(1)$

Forma usual no uso da notação $\mathcal{O}(1)$:

- $s(n) = \mathcal{O}(1)$

Notação $\mathcal{O}(1)$

Forma usual no uso da notação $\mathcal{O}(1)$:

- $s(n) = \mathcal{O}(1)$
- $s(n)$ é $\mathcal{O}(1)$

Notação $\mathcal{O}(1)$

Forma usual no uso da notação $\mathcal{O}(1)$:

- $s(n) = \mathcal{O}(1)$
- $s(n)$ é $\mathcal{O}(1)$
- $\sqrt{n}$ não é $\mathcal{O}(1)$

Notação $\mathcal{O}(1)$

Forma usual no uso da notação $\mathcal{O}(1)$:

- $s(n) = \mathcal{O}(1)$
- $s(n)$ é $\mathcal{O}(1)$
- $\sqrt{n}$ não é $\mathcal{O}(1)$

Exemplo 6: Coeficiente binomial

$$\binom{n}{2} =$$

Notação $\mathcal{O}(1)$

Forma usual no uso da notação $\mathcal{O}(1)$:

- $s(n) = \mathcal{O}(1)$
- $s(n)$ é $\mathcal{O}(1)$
- $\sqrt{n}$ não é $\mathcal{O}(1)$

Exemplo 6: Coeficiente binomial

$$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} =$$

Notação $\mathcal{O}(1)$

Forma usual no uso da notação $\mathcal{O}(1)$:

- $s(n) = \mathcal{O}(1)$
- $s(n)$ é $\mathcal{O}(1)$
- $\sqrt{n}$ não é $\mathcal{O}(1)$

Exemplo 6: Coeficiente binomial

$$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2} =$$

Notação $\mathcal{O}(1)$

Forma usual no uso da notação $\mathcal{O}(1)$:

- $s(n) = \mathcal{O}(1)$
- $s(n)$ é $\mathcal{O}(1)$
- $\sqrt{n}$ não é $\mathcal{O}(1)$

Exemplo 6: Coeficiente binomial

$$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2} = \frac{n^2}{2} - \frac{1}{2}n =$$

Notação $\mathcal{O}(1)$

Forma usual no uso da notação $\mathcal{O}(1)$:

- $s(n) = \mathcal{O}(1)$
- $s(n)$ é $\mathcal{O}(1)$
- $\sqrt{n}$ não é $\mathcal{O}(1)$

Exemplo 6: Coeficiente binomial

$$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2} = \frac{n^2}{2} - \frac{1}{2}n = \frac{n^2}{2} + \mathcal{O}(1)n,$$

Notação $\mathcal{O}(1)$

Forma usual no uso da notação $\mathcal{O}(1)$:

- $s(n) = \mathcal{O}(1)$
- $s(n)$ é $\mathcal{O}(1)$
- $\sqrt{n}$ não é $\mathcal{O}(1)$

Exemplo 6: Coeficiente binomial

$$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2} = \frac{n^2}{2} - \frac{1}{2}n = \frac{n^2}{2} + \mathcal{O}(1)n,$$

ou, menos precisamente,

Notação $\mathcal{O}(1)$

Forma usual no uso da notação $\mathcal{O}(1)$:

- $s(n) = \mathcal{O}(1)$
- $s(n)$ é $\mathcal{O}(1)$
- $\sqrt{n}$ não é $\mathcal{O}(1)$

Exemplo 6: Coeficiente binomial

$$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2} = \frac{n^2}{2} - \frac{1}{2}n = \frac{n^2}{2} + \mathcal{O}(1)n,$$

ou, menos precisamente,

$$\binom{n}{2}$$

Notação $\mathcal{O}(1)$

Forma usual no uso da notação $\mathcal{O}(1)$:

- $s(n) = \mathcal{O}(1)$
- $s(n)$ é $\mathcal{O}(1)$
- $\sqrt{n}$ não é $\mathcal{O}(1)$

Exemplo 6: Coeficiente binomial

$$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2} = \frac{n^2}{2} - \frac{1}{2}n = \frac{n^2}{2} + \mathcal{O}(1)n,$$

ou, menos precisamente,

$$\binom{n}{2} = \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2}$$

Notação $\mathcal{O}(1)$

Forma usual no uso da notação $\mathcal{O}(1)$:

- $s(n) = \mathcal{O}(1)$
- $s(n)$ é $\mathcal{O}(1)$
- $\sqrt{n}$ não é $\mathcal{O}(1)$

Exemplo 6: Coeficiente binomial

$$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2} = \frac{n^2}{2} - \frac{1}{2}n = \frac{n^2}{2} + \mathcal{O}(1)n,$$

ou, menos precisamente,

$$\binom{n}{2} = \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2} = n^2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2n}\right)$$

Forma usual no uso da notação $\mathcal{O}(1)$:

- $s(n) = \mathcal{O}(1)$
- $s(n)$ é $\mathcal{O}(1)$
- $\sqrt{n}$ não é $\mathcal{O}(1)$

Exemplo 6: Coeficiente binomial

$$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2} = \frac{n^2}{2} - \frac{1}{2}n = \frac{n^2}{2} + \mathcal{O}(1)n,$$

ou, menos precisamente,

$$\binom{n}{2} = \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2} = n^2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2n}\right) = \mathcal{O}(1)n^2.$$

Notação $\mathcal{O}(1)$

Forma usual no uso da notação $\mathcal{O}(1)$:

- $s(n) = \mathcal{O}(1)$
- $s(n)$ é $\mathcal{O}(1)$
- $\sqrt{n}$ não é $\mathcal{O}(1)$

Exemplo 6: Coeficiente binomial

$$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2} = \frac{n^2}{2} - \frac{1}{2}n = \frac{n^2}{2} + \mathcal{O}(1)n,$$

ou, menos precisamente,

$$\binom{n}{2} = \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2} = n^2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2n}\right) = \mathcal{O}(1)n^2.$$

Spoiler: Até o fim da aula chegaremos lá, mas nosso objetivo será simplificar ainda mais e semos capazes de escrever $\binom{n}{2} = \mathcal{O}(n^2)$ como usualmente muitos já viram por aí, mas falta um pouco ainda...

Exemplo 7: Série Harmônica

A *Série Harmônica* é dada por

$$H(n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}.$$

Exemplo 7: Série Harmônica

A *Série Harmônica* é dada por

$$H(n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}.$$

Obs: $H(n) - \ln n$ converge (limite é a *constante de Euler–Mascheroni*)

Notação $\mathcal{O}(1)$

Exemplo 7: Série Harmônica

A *Série Harmônica* é dada por

$$H(n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}.$$

Obs: $H(n) - \ln n$ converge (limite é a *constante de Euler–Mascheroni*)

$\lim(H(n) - \ln n) = \gamma = 0.5772156649015328606065120900824024310421593359399 2\ldots$

Exemplo 7: Série Harmônica

A *Série Harmônica* é dada por

$$H(n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}.$$

Obs: $H(n) - \ln n$ converge (limite é a *constante de Euler–Mascheroni*)

$\lim(H(n) - \ln n) = \gamma = 0.57721566490153286060651209008240243104215933593992\ldots$

Ou seja,

Notação $\mathcal{O}(1)$

Exemplo 7: Série Harmônica

A *Série Harmônica* é dada por

$$H(n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}.$$

Obs: $H(n) - \ln n$ converge (limite é a *constante de Euler—Mascheroni*)

$\lim(H(n) - \ln n) = \gamma = 0.5772156649015328606065120900824024310421593359399 2\ldots$

Ou seja,

$$H(n) = \ln n + f(n),$$

Exemplo 7: Série Harmônica

A *Série Harmônica* é dada por

$$H(n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}.$$

Obs: $H(n) - \ln n$ converge (limite é a *constante de Euler*−*Mascheroni*)
$\lim(H(n) - \ln n) = \gamma = 0.57721566490153286060651209008240243104215933593992\ldots$

Ou seja,

$$H(n) = \ln n + f(n),$$

Sendo que

Notação $\mathcal{O}(1)$

Exemplo 7: Série Harmônica

A *Série Harmônica* é dada por

$$H(n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}.$$

Obs: $H(n) - \ln n$ converge (limite é a *constante de Euler–Mascheroni*)

$\lim(H(n) - \ln n) = \gamma = 0.5772156649015328606065120900824024310421593359399\,2\ldots$

Ou seja,

$$H(n) = \ln n + f(n),$$

Sendo que

- $\lim f(n) = \gamma$

Notação $\mathcal{O}(1)$

Exemplo 7: Série Harmônica

A *Série Harmônica* é dada por

$$H(n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}.$$

Obs: $H(n) - \ln n$ converge (limite é a *constante de Euler–Mascheroni*)

$\lim(H(n) - \ln n) = \gamma = 0.5772156649015328606065120900824024310421593359399 2\ldots$

Ou seja,

$$H(n) = \ln n + f(n),$$

Sendo que

- $\lim f(n) = \gamma$
- Portanto (Exercício 11), $f(n) = \mathcal{O}(1)$

Notação $\mathcal{O}(1)$

Exemplo 7: Série Harmônica

A *Série Harmônica* é dada por

$$H(n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}.$$

Obs: $H(n) - \ln n$ converge (limite é a *constante de Euler—Mascheroni*)
$\lim(H(n) - \ln n) = \gamma = 0.5772156649015328606065120900824024310421593359399 2\ldots$

Ou seja,

$$H(n) = \ln n + f(n),$$

Sendo que

- $\lim f(n) = \gamma$
- Portanto (Exercício 11), $f(n) = \mathcal{O}(1)$
- Portanto $H(n) = \ln n + \mathcal{O}(1)$

Notação $\mathcal{O}(1)$

Exemplo 7: Série Harmônica

A *Série Harmônica* é dada por

$$H(n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}.$$

Obs: $H(n) - \ln n$ converge (limite é a *constante de Euler–Mascheroni*)
$\lim(H(n) - \ln n) = \gamma = 0.57721566490153286060651209008240243104215933593992\ldots$

Ou seja,

$$H(n) = \ln n + f(n),$$

Sendo que

- $\lim f(n) = \gamma$
- Portanto (Exercício 11), $f(n) = \mathcal{O}(1)$
- Portanto $H(n) = \ln n + \mathcal{O}(1)$

Ou, menos precisamente,

Exemplo 7: Série Harmônica

A *Série Harmônica* é dada por

$$H(n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}.$$

Obs: $H(n) - \ln n$ converge (limite é a *constante de Euler–Mascheroni*)
$\lim(H(n) - \ln n) = \gamma = 0.57721566490153286060651209008240243104215933593992\ldots$

Ou seja,

$$H(n) = \ln n + f(n),$$

Sendo que

- $\lim f(n) = \gamma$
- Portanto (Exercício 11), $f(n) = \mathcal{O}(1)$
- Portanto $H(n) = \ln n + \mathcal{O}(1)$

Ou, menos precisamente,

$$H(n) = \ln n + f(n) =$$

Exemplo 7: Série Harmônica

A *Série Harmônica* é dada por

$$H(n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}.$$

Obs: $H(n) - \ln n$ converge (limite é a *constante de Euler—Mascheroni*)
$\lim(H(n) - \ln n) = \gamma = 0.57721566490153286060651209008240243104215933593992\ldots$

Ou seja,

$$H(n) = \ln n + f(n),$$

Sendo que

- $\lim f(n) = \gamma$
- Portanto (Exercício 11), $f(n) = \mathcal{O}(1)$
- Portanto $H(n) = \ln n + \mathcal{O}(1)$

Ou, menos precisamente,

$$H(n) = \ln n + f(n) = \ln n\left(1 + \frac{f(n)}{\ln n}\right)$$

Notação $\mathcal{O}(1)$

Exemplo 7: Série Harmônica

A *Série Harmônica* é dada por

$$H(n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}.$$

Obs: $H(n) - \ln n$ converge (limite é a *constante de Euler−Mascheroni*)
$\lim(H(n) - \ln n) = \gamma = 0.5772156649015328606065120900824024310421593359399 2\ldots$

Ou seja,

$$H(n) = \ln n + f(n),$$

Sendo que

- $\lim f(n) = \gamma$
- Portanto (Exercício 11), $f(n) = \mathcal{O}(1)$
- Portanto $H(n) = \ln n + \mathcal{O}(1)$

Ou, menos precisamente,

$$H(n) = \ln n + f(n) = \ln n \left(1 + \frac{f(n)}{\ln n}\right) \overset{\text{Ex. 9}}{=}$$

Exemplo 7: Série Harmônica

A *Série Harmônica* é dada por

$$H(n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}.$$

Obs: $H(n) - \ln n$ converge (limite é a *constante de Euler–Mascheroni*)
$\lim(H(n) - \ln n) = \gamma = 0.5772156649015328606065120900824024310421593359399 2\ldots$

Ou seja,

$$H(n) = \ln n + f(n),$$

Sendo que

- $\lim f(n) = \gamma$
- Portanto (Exercício 11), $f(n) = \mathcal{O}(1)$
- Portanto $H(n) = \ln n + \mathcal{O}(1)$

Ou, menos precisamente,

$$H(n) = \ln n + f(n) = \ln n \left(1 + \frac{f(n)}{\ln n}\right) \overset{\text{Ex. 9}}{=} \mathcal{O}(1) \ln n.$$

Notação $\mathcal{O}(1)$

Exemplo 7: Série Harmônica

A *Série Harmônica* é dada por

$$H(n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}.$$

Obs: $H(n) - \ln n$ converge (limite é a *constante de Euler—Mascheroni*)

$\lim(H(n) - \ln n) = \gamma = 0.5772156649015328606065120900824024310421593359 3992\ldots$

Ou seja,

$$H(n) = \ln n + f(n),$$

Sendo que

- $\lim f(n) = \gamma$
- Portanto (Exercício 11), $f(n) = \mathcal{O}(1)$
- Portanto $H(n) = \ln n + \mathcal{O}(1)$

Ou, menos precisamente,

$$H(n) = \ln n + f(n) = \ln n \left(1 + \frac{f(n)}{\ln n}\right) \overset{\text{Ex. 9}}{=} \mathcal{O}(1) \ln n.$$

Spoiler novamente: eventualmente iremos escrever $H(n) = \mathcal{O}(\ln n)$, mas não estamos preparados para isso ainda.

Notação $\mathcal{O}(1)$

Atenção para a notação usada abaixo: $n_k = (n-0)(n-1)\ldots(n-k+1) = \prod_{i=0}^{k-1}(n-i)$

Atenção para a notação usada abaixo: $n_k = (n-0)(n-1)\dots(n-k+1) = \prod_{i=0}^{k-1}(n-i)$

Exemplo 8: Série de Taylor

Para todo $x \in \mathbb{R}$ temos da *Série de Taylor* para e^x que

Notação $\mathcal{O}(1)$

Atenção para a notação usada abaixo: $n_k = (n-0)(n-1)\ldots(n-k+1) = \prod_{i=0}^{k-1}(n-i)$

Exemplo 8: Série de Taylor

Para todo $x \in \mathbb{R}$ temos da *Série de Taylor* para e^x que

$$e^x = \sum_{i \geq 0} \frac{x^i}{i!},$$

Notação $\mathcal{O}(1)$

Atenção para a notação usada abaixo: $n_k = (n-0)(n-1)\ldots(n-k+1) = \prod_{i=0}^{k-1}(n-i)$

Exemplo 8: Série de Taylor

Para todo $x \in \mathbb{R}$ temos da *Série de Taylor* para e^x que

$$e^x = \sum_{i \geq 0} \frac{x^i}{i!},$$

Com isso, para todo $n \in \mathbb{N}$,

Notação $\mathcal{O}(1)$

Atenção para a notação usada abaixo: $n_k = (n-0)(n-1)\dots(n-k+1) = \prod_{i=0}^{k-1}(n-i)$

Exemplo 8: Série de Taylor

Para todo $x \in \mathbb{R}$ temos da *Série de Taylor* para e^x que

$$e^x = \sum_{i \geq 0} \frac{x^i}{i!},$$

Com isso, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$e^x = \sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i!} +$$

Notação $\mathcal{O}(1)$

Atenção para a notação usada abaixo: $n_k = (n-0)(n-1)\dots(n-k+1) = \prod_{i=0}^{k-1}(n-i)$

Exemplo 8: Série de Taylor

Para todo $x \in \mathbb{R}$ temos da *Série de Taylor* para e^x que

$$e^x = \sum_{i \geq 0} \frac{x^i}{i!},$$

Com isso, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$e^x = \sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i!} + \sum_{i \geq n+1} \frac{x^i}{i!}.$$

Notação $\mathcal{O}(1)$

Atenção para a notação usada abaixo: $n_k = (n-0)(n-1)\ldots(n-k+1) = \prod_{i=0}^{k-1}(n-i)$

Exemplo 8: Série de Taylor

Para todo $x \in \mathbb{R}$ temos da *Série de Taylor* para e^x que

$$e^x = \sum_{i \geq 0} \frac{x^i}{i!},$$

Com isso, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$e^x = \sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i!} + \sum_{i \geq n+1} \frac{x^i}{i!}.$$

Como para todo $n \in \mathbb{N}$,

Notação $\mathcal{O}(1)$

Atenção para a notação usada abaixo: $n_k = (n-0)(n-1)\ldots(n-k+1) = \prod_{i=0}^{k-1}(n-i)$

Exemplo 8: Série de Taylor

Para todo $x \in \mathbb{R}$ temos da *Série de Taylor* para e^x que

$$e^x = \sum_{i \geq 0} \frac{x^i}{i!},$$

Com isso, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$e^x = \sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i!} + \sum_{i \geq n+1} \frac{x^i}{i!}.$$

Como para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{i \geq n+1} \frac{x^i}{i!}$$

Notação $\mathcal{O}(1)$

Atenção para a notação usada abaixo: $n_k = (n-0)(n-1)\ldots(n-k+1) = \prod_{i=0}^{k-1}(n-i)$

Exemplo 8: Série de Taylor

Para todo $x \in \mathbb{R}$ temos da *Série de Taylor* para e^x que

$$e^x = \sum_{i \geq 0} \frac{x^i}{i!},$$

Com isso, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$e^x = \sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i!} + \sum_{i \geq n+1} \frac{x^i}{i!}.$$

Como para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{i \geq n+1} \frac{x^i}{i!} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \sum_{i \geq n+1} \frac{x^{i-n-1}}{(i+1)_{n-i+3}}$$

Notação $\mathcal{O}(1)$

Atenção para a notação usada abaixo: $n_k = (n-0)(n-1)\ldots(n-k+1) = \prod_{i=0}^{k-1}(n-i)$

Exemplo 8: Série de Taylor

Para todo $x \in \mathbb{R}$ temos da *Série de Taylor* para e^x que

$$e^x = \sum_{i \geq 0} \frac{x^i}{i!},$$

Com isso, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$e^x = \sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i!} + \sum_{i \geq n+1} \frac{x^i}{i!}.$$

Como para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{i \geq n+1} \frac{x^i}{i!} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \sum_{i \geq n+1} \frac{x^{i-n-1}}{(i+1)_{n-i+3}} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \sum_{i \geq 0} \frac{x^i}{(i+n+1)_i}$$

Notação $\mathcal{O}(1)$

Atenção para a notação usada abaixo: $n_k = (n-0)(n-1)\ldots(n-k+1) = \prod_{i=0}^{k-1}(n-i)$

Exemplo 8: Série de Taylor

Para todo $x \in \mathbb{R}$ temos da *Série de Taylor* para e^x que

$$e^x = \sum_{i \geq 0} \frac{x^i}{i!},$$

Com isso, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$e^x = \sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i!} + \sum_{i \geq n+1} \frac{x^i}{i!}.$$

Como para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{i \geq n+1} \frac{x^i}{i!} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \sum_{i \geq n+1} \frac{x^{i-n-1}}{(i+1)_{n-i+3}} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \sum_{i \geq 0} \frac{x^i}{(i+n+1)_i} \overset{\text{Ex. 12}}{=} \mathcal{O}(1) \frac{x^{n+1}}{(n+1)!},$$

Atenção para a notação usada abaixo: $n_k = (n-0)(n-1)\ldots(n-k+1) = \prod_{i=0}^{k-1}(n-i)$

Exemplo 8: Série de Taylor

Para todo $x \in \mathbb{R}$ temos da *Série de Taylor* para e^x que

$$e^x = \sum_{i \geq 0} \frac{x^i}{i!},$$

Com isso, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$e^x = \sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i!} + \sum_{i \geq n+1} \frac{x^i}{i!}.$$

Como para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{i \geq n+1} \frac{x^i}{i!} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \sum_{i \geq n+1} \frac{x^{i-n-1}}{(i+1)_{n-i+3}} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \sum_{i \geq 0} \frac{x^i}{(i+n+1)_i} \overset{\text{Ex. 12}}{=} \mathcal{O}(1)\frac{x^{n+1}}{(n+1)!},$$

Ou seja,

Notação $\mathcal{O}(1)$

Atenção para a notação usada abaixo: $n_k = (n-0)(n-1)\ldots(n-k+1) = \prod_{i=0}^{k-1}(n-i)$

Exemplo 8: Série de Taylor

Para todo $x \in \mathbb{R}$ temos da *Série de Taylor* para e^x que

$$e^x = \sum_{i \geq 0} \frac{x^i}{i!},$$

Com isso, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$e^x = \sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i!} + \sum_{i \geq n+1} \frac{x^i}{i!}.$$

Como para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{i \geq n+1} \frac{x^i}{i!} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \sum_{i \geq n+1} \frac{x^{i-n-1}}{(i+1)_{n-i+3}} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \sum_{i \geq 0} \frac{x^i}{(i+n+1)_i} \overset{\text{Ex. 12}}{=} \mathcal{O}(1) \frac{x^{n+1}}{(n+1)!},$$

Ou seja,

$$e^x = \sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i!} + \mathcal{O}(1) \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Exemplo 9: Lidando com $\log n!$

No Exemplo 5 (Aproximação de Stirling) tínhamos,

$$n! = \mathcal{O}(1)\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}.$$

Em análise de algoritmos, muitas vezes estaremos interessados no seguinte:

Notação $\mathcal{O}(1)$

Exemplo 9: Lidando com $\log n!$

No Exemplo 5 (Aproximação de Stirling) tínhamos,

$$n! = \mathcal{O}(1)\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}.$$

Em análise de algoritmos, muitas vezes estaremos interessados no seguinte:

Para $b > 1$, queremos saber $\log_b n!$

Exemplo 9: Lidando com $\log n!$

No Exemplo 5 (Aproximação de Stirling) tínhamos,

$$n! = \mathcal{O}(1) \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}.$$

Em análise de algoritmos, muitas vezes estaremos interessados no seguinte:

Para $b > 1$, queremos saber $\log_b n!$ Quanto vale isso?

Exemplo 9: Lidando com $\log n!$

No Exemplo 5 (Aproximação de Stirling) tínhamos,

$$n! = \mathcal{O}(1)\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}.$$

Em análise de algoritmos, muitas vezes estaremos interessados no seguinte:

Para $b > 1$, queremos saber $\log_b n!$ Quanto vale isso?

$$\begin{aligned}\log_b n! &= \log_b \left(\mathcal{O}(1)\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}\right)\\ &= \log_b \mathcal{O}(1) + n(\log_b n - \log_b e) + \frac{\log_b n}{2}\\ &\overset{\text{Ex.17}}{=} n\log_b n - n\log_b e + \frac{1}{2}\log_b n + \mathcal{O}(1).\end{aligned}$$

Notação $\mathcal{O}(1)$

Lidando com log n! (cont.)

Do slide anterior, tínhamos

$$\log_b n! = n \log_b n - n \log_b e + \frac{1}{2} \log_b n + \mathcal{O}(1).$$

Ou, menos precisamente,

$$\begin{aligned}
\log_b n! &= n \log_b n - n \log_b e + \mathcal{O}(1) \log_b n + \mathcal{O}(1) \\
&= n \log_b n - n \log_b e + \left(\mathcal{O}(1) + \frac{\mathcal{O}(1)}{\log_b} \right) \log_b n \\
&\overset{\text{Ex.8}}{=} n \log_b n - n \log_b e + (\mathcal{O}(1) + \mathcal{O}(1)) \log_b n \\
&\overset{\text{T.7}}{=} n \log_b n - n \log_b e + \mathcal{O}(1) \log_b n.
\end{aligned}$$

Notação $\mathcal{O}(1)$

Lidando com $\log n!$ (cont.)

Do slide anterior, tínhamos

$$\log_b n! = n \log_b n - n \log_b e + \mathcal{O}(1) \log_b n.$$

Ou, menos precisamente,

$$\begin{aligned}
\log_b n! &= n \log_b n - n \log_b e + \mathcal{O}(1) \log_b n \\
&= n \log_b n + \mathcal{O}(1)n + \mathcal{O}(1) \log_b n \\
&= n \log_b n + \left(\mathcal{O}(1) + \frac{\mathcal{O}(1) \log n}{n} \right) n \\
&= n \log_b n + \left(\mathcal{O}(1) + \frac{\mathcal{O}(1)}{n / \log n} \right) n \\
&\overset{\text{Ex.8}}{=} n \log_b n + (\mathcal{O}(1) + \mathcal{O}(1))\, n \\
&\overset{\text{T.7}}{=} n \log_b n + \mathcal{O}(1)n.
\end{aligned}$$

Notação $\mathcal{O}(1)$

Lidando com $\log n!$ (cont.)

Do slide anterior, tínhamos

$$\log_b n! = n \log_b n + \mathcal{O}(1)n.$$

Ou, menos precisamente,

$$\begin{aligned}
\log_b n! &= n \log_b n + \mathcal{O}(1)n \\
&= \left(\mathcal{O}(1) + \frac{\mathcal{O}(1)}{\log_b n}\right) n \log_b n \\
&\overset{\text{Ex.8}}{=} (\mathcal{O}(1) + \mathcal{O}(1))\, n \log_b n \\
&\overset{\text{T.7}}{=} \mathcal{O}(1) n \log_b n.
\end{aligned}$$

Notação $\mathcal{O}(1)$

Outra convenção para $\mathcal{O}(1)$

A expressão $\mathcal{O}(1)$ no **lado esquerdo de uma igualdade** significa que a expressão do lado direito é satisfeita para toda função no conjunto $\mathcal{O}(1)$.

Notação $\mathcal{O}(1)$

Outra convenção para $\mathcal{O}(1)$

A expressão $\mathcal{O}(1)$ no **lado esquerdo de uma igualdade** significa que a expressão do lado direito é satisfeita para toda função no conjunto $\mathcal{O}(1)$.

Uma das implicações disso:

Notação $\mathcal{O}(1)$

Outra convenção para $\mathcal{O}(1)$

A expressão $\mathcal{O}(1)$ no **lado esquerdo de uma igualdade** significa que a expressão do lado direito é satisfeita para toda função no conjunto $\mathcal{O}(1)$.

Uma das implicações disso:

- Poder escrever a expressão **extremamente útil:** $\mathcal{O}(1) + \mathcal{O}(1) = \mathcal{O}(1)$

Notação $\mathcal{O}(1)$

Outra convenção para $\mathcal{O}(1)$

A expressão $\mathcal{O}(1)$ no **lado esquerdo de uma igualdade** significa que a expressão do lado direito é satisfeita para toda função no conjunto $\mathcal{O}(1)$.

Uma das implicações disso:

- Poder escrever a expressão **extremamente útil:** $\mathcal{O}(1) + \mathcal{O}(1) = \mathcal{O}(1)$
- Obs: Isso não é obvio ainda. Vamos provar agora.

Notação $\mathcal{O}(1)$

Teorema 7:

$\forall f(n) = \mathcal{O}(1)$ e $\forall g(n) = \mathcal{O}(1)$ temos $f(n) + g(n) = \mathcal{O}(1)$, isto é,

$$\mathcal{O}(1) + \mathcal{O}(1) = \mathcal{O}(1).$$

Notação $\mathcal{O}(1)$

Teorema 7:

$\forall f(n) = \mathcal{O}(1)$ e $\forall g(n) = \mathcal{O}(1)$ temos $f(n) + g(n) = \mathcal{O}(1)$, isto é,

$$\mathcal{O}(1) + \mathcal{O}(1) = \mathcal{O}(1).$$

Prova (Exercício Resolvido 7):

Sejam $f(n) = \mathcal{O}(1)$ e $g(n) = \mathcal{O}(1)$. Vamos provar que

$$f(n) + g(n) = \mathcal{O}(1),$$

Notação $\mathcal{O}(1)$

Teorema 7:

$\forall f(n) = \mathcal{O}(1)$ e $\forall g(n) = \mathcal{O}(1)$ temos $f(n) + g(n) = \mathcal{O}(1)$, isto é,

$$\mathcal{O}(1) + \mathcal{O}(1) = \mathcal{O}(1).$$

Prova (Exercício Resolvido 7):

Sejam $f(n) = \mathcal{O}(1)$ e $g(n) = \mathcal{O}(1)$. Vamos provar que

$$f(n) + g(n) = \mathcal{O}(1),$$

Isto é, que existem $c > 0$ e $n_c \in \mathbb{N}$ tais que

$$|f(n) + g(n)| \leq c, \text{ para todo } n \geq n_c.$$

Notação $\mathcal{O}(1)$

Teorema 7:

$\forall f(n) = \mathcal{O}(1)$ e $\forall g(n) = \mathcal{O}(1)$ temos $f(n) + g(n) = \mathcal{O}(1)$, isto é,

$$\mathcal{O}(1) + \mathcal{O}(1) = \mathcal{O}(1).$$

Prova (Exercício Resolvido 7):

Sejam $f(n) = \mathcal{O}(1)$ e $g(n) = \mathcal{O}(1)$. Vamos provar que

$$f(n) + g(n) = \mathcal{O}(1),$$

Isto é, que existem $c > 0$ e $n_c \in \mathbb{N}$ tais que

$$|f(n) + g(n)| \leq c, \text{ para todo } n \geq n_c.$$

Como $f(n) = \mathcal{O}(1)$, então existem $c_f > 0$ e $n_f \in \mathbb{N}$ tais que

$$|f(n)| \leq c_f, \text{ para todo } n \geq n_f.$$

Teorema 7:

$\forall f(n) = \mathcal{O}(1)$ e $\forall g(n) = \mathcal{O}(1)$ temos $f(n) + g(n) = \mathcal{O}(1)$, isto é,

$$\mathcal{O}(1) + \mathcal{O}(1) = \mathcal{O}(1).$$

Prova (Exercício Resolvido 7):

Sejam $f(n) = \mathcal{O}(1)$ e $g(n) = \mathcal{O}(1)$. Vamos provar que

$$f(n) + g(n) = \mathcal{O}(1),$$

Isto é, que existem $c > 0$ e $n_c \in \mathbb{N}$ tais que

$$|f(n) + g(n)| \leq c, \text{ para todo } n \geq n_c.$$

Como $f(n) = \mathcal{O}(1)$, então existem $c_f > 0$ e $n_f \in \mathbb{N}$ tais que

$$|f(n)| \leq c_f, \text{ para todo } n \geq n_f.$$

Como $g(n) = \mathcal{O}(1)$, então existem $c_g > 0$ e $n_g \in \mathbb{N}$ tais que

$$|g(n)| \leq c_g, \text{ para todo } n \geq n_g.$$

Notação $\mathcal{O}(1)$

Prova: (cont.)

Prova: (cont.)

Então, para todo $n \geq \max\{n_f, n_g\}$,

$$|f(n)| + |g(n)| \leq c_f + c_g,$$

Notação $\mathcal{O}(1)$

Prova: (cont.)

Então, para todo $n \geq \max\{n_f, n_g\}$,

$$|f(n)| + |g(n)| \leq c_f + c_g,$$

E como

$$|f(n) + g(n)| \leq |f(n)| + |g(n)|,$$

Notação $\mathcal{O}(1)$

Prova: (cont.)

Então, para todo $n \geq \max\{n_f, n_g\}$,

$$|f(n)| + |g(n)| \leq c_f + c_g,$$

E como

$$|f(n) + g(n)| \leq |f(n)| + |g(n)|,$$

Existem $c > 0$ e $n_c \in \mathbb{N}$ tais que

$$|f(n) + g(n)| \leq c, \text{ para todo } n \geq n_c,$$

Notação $\mathcal{O}(1)$

Prova: (cont.)

Então, para todo $n \geq \max\{n_f, n_g\}$,

$$|f(n)| + |g(n)| \leq c_f + c_g,$$

E como

$$|f(n) + g(n)| \leq |f(n)| + |g(n)|,$$

Existem $c > 0$ e $n_c \in \mathbb{N}$ tais que

$$|f(n) + g(n)| \leq c, \text{ para todo } n \geq n_c,$$

A saber,

$$\begin{aligned} c &= c_f + c_g, \\ n_c &= \max\{n_f, n_g\}. \end{aligned}$$

Notação $\mathcal{O}(1)$

Voltando aos algoritmos da aula anterior...

Voltando aos algoritmos da aula anterior...

Exemplo 10: Pior caso da Busca Sequencial

Notação $\mathcal{O}(1)$

Voltando aos algoritmos da aula anterior...

Exemplo 10: Pior caso da Busca Sequencial

$$S^{+}(n) = c_2 n + c_1,$$

Notação $\mathcal{O}(1)$

Voltando aos algoritmos da aula anterior...

Exemplo 10: Pior caso da Busca Sequencial

$$S^{+}(n) = c_2 n + c_1,$$

Em notação assintótica:

Notação $\mathcal{O}(1)$

Voltando aos algoritmos da aula anterior...

Exemplo 10: Pior caso da Busca Sequencial

$$S^{+}(n) = c_2 n + c_1,$$

Em notação assintótica:

$$S^{+}(n) = c_2 n + \mathcal{O}(1),$$

Notação $\mathcal{O}(1)$

Voltando aos algoritmos da aula anterior...

Exemplo 10: Pior caso da Busca Sequencial

$$S^{+}(n) = c_2 n + c_1,$$

Em notação assintótica:

$$S^{+}(n) = c_2 n + \mathcal{O}(1),$$

Ou, menos precisamente,

Voltando aos algoritmos da aula anterior...

Exemplo 10: Pior caso da Busca Sequencial

$$S^{+}(n) = c_2 n + c_1,$$

Em notação assintótica:

$$S^{+}(n) = c_2 n + \mathcal{O}(1),$$

Ou, menos precisamente,

$$S^{+}(n) = c_2 n + c_1 = \left(c_2 + \frac{c_1}{n}\right) n = \mathcal{O}(1) n.$$

Notação $\mathcal{O}(1)$

Exemplo 11: Pior caso da Busca Binária

Na análise da aula anterior tínhamos

Exemplo 11: Pior caso da Busca Binária

Na análise da aula anterior tínhamos

$$B^{+}(n) \leq c_1' + c_2' \lg n,$$

Notação $\mathcal{O}(1)$

Exemplo 11: Pior caso da Busca Binária

Na análise da aula anterior tínhamos

$$B^{+}(n) \leq c_1' + c_2' \lg n,$$

Em notação assintótica:

Notação $\mathcal{O}(1)$

Exemplo 11: Pior caso da Busca Binária

Na análise da aula anterior tínhamos

$$B^{+}(n) \leq c_1' + c_2' \lg n,$$

Em notação assintótica:

$$B^{+}(n) = \mathcal{O}(1) \lg n + \mathcal{O}(1),$$

Exemplo 11: Pior caso da Busca Binária

Na análise da aula anterior tínhamos

$$B^+(n) \leq c_1' + c_2' \lg n,$$

Em notação assintótica:

$$B^+(n) = \mathcal{O}(1) \lg n + \mathcal{O}(1),$$

Ou, menos precisamente,

Exemplo 11: Pior caso da Busca Binária

Na análise da aula anterior tínhamos

$$B^+(n) \leq c_1' + c_2' \lg n,$$

Em notação assintótica:

$$B^+(n) = \mathcal{O}(1) \lg n + \mathcal{O}(1),$$

Ou, menos precisamente,

$$B^+(n)$$

Notação $\mathcal{O}(1)$

Exemplo 11: Pior caso da Busca Binária

Na análise da aula anterior tínhamos

$$B^+(n) \leq c_1' + c_2' \lg n,$$

Em notação assintótica:

$$B^+(n) = \mathcal{O}(1) \lg n + \mathcal{O}(1),$$

Ou, menos precisamente,

$$B^+(n) = \lg n \left(\mathcal{O}(1) + \frac{\mathcal{O}(1)}{\lg n} \right)$$

Notação $\mathcal{O}(1)$

Exemplo 11: Pior caso da Busca Binária

Na análise da aula anterior tínhamos

$$B^+(n) \leq c_1' + c_2' \lg n,$$

Em notação assintótica:

$$B^+(n) = \mathcal{O}(1) \lg n + \mathcal{O}(1),$$

Ou, menos precisamente,

$$B^+(n) = \lg n \left(\mathcal{O}(1) + \frac{\mathcal{O}(1)}{\lg n} \right) \overset{\text{Ex.8}}{=} \mathcal{O}(1) \lg n$$

Notação $\mathcal{O}(1)$

Exemplo 12 (ainda lembrando da aula anterior)

Da análise da aula passa tínhamos

Notação $\mathcal{O}(1)$

Exemplo 12 (ainda lembrando da aula anterior)

Da análise da aula passa tínhamos

$$\lim \frac{B^+(n)}{S^+(n)} = 0,$$

Notação $\mathcal{O}(1)$

Exemplo 12 (ainda lembrando da aula anterior)

Da análise da aula passa tínhamos

$$\lim \frac{B^+(n)}{S^+(n)} = 0,$$

E, portanto (Exercício 11)

Notação $\mathcal{O}(1)$

Exemplo 12 (ainda lembrando da aula anterior)

Da análise da aula passa tínhamos

$$\lim \frac{B^+(n)}{S^+(n)} = 0,$$

E, portanto (Exercício 11)

$$\frac{B^+(n)}{S^+(n)} = \mathcal{O}(1).$$

Notação $\mathcal{O}(1)$

Exemplo 12 (ainda lembrando da aula anterior)

Da análise da aula passa tínhamos

$$\lim \frac{B^+(n)}{S^+(n)} = 0,$$

E, portanto (Exercício 11)

$$\frac{B^+(n)}{S^+(n)} = \mathcal{O}(1).$$

Ou seja,

Exemplo 12 (ainda lembrando da aula anterior)

Da análise da aula passa tínhamos

$$\lim \frac{B^+(n)}{S^+(n)} = 0,$$

E, portanto (Exercício 11)

$$\frac{B^+(n)}{S^+(n)} = \mathcal{O}(1).$$

Ou seja, $B^+(n) = \mathcal{O}(1)S^+(n)$

Notação $\mathcal{O}(1)$

Exemplo 12 (ainda lembrando da aula anterior)

Da análise da aula passa tínhamos

$$\lim \frac{B^+(n)}{S^+(n)} = 0,$$

E, portanto (Exercício 11)

$$\frac{B^+(n)}{S^+(n)} = \mathcal{O}(1).$$

Ou seja, $B^+(n) = \mathcal{O}(1)S^+(n)$

Spoiler: A conclusão acima é verdadeira, mas não é muito indicativa! Adiante no curso veremos uma notação assintótica (chamada de notação "oh pequeno") adequada para dizer que $B^+(n)$ cresce muito mais devagar do que $S^+(n)$, mas ainda não temos ferramentas para tal tarefa.

Notação $\mathcal{O}(1)$

Exemplo 13

Relembrando a busca sequencial:

$S(x, v, a, b)$

Se $a > b$
    Devolva $a - 1$
Se $x \geq v[b]$
    Devolva b
Devolva $S(x, v, a, b - 1)$

Notação $\mathcal{O}(1)$

Exemplo 13

Relembrando a busca sequencial:

$\mathrm{S}(x, v, a, b)$

1 Se $a > b$
2   Devolva $a - 1$
3 Se $x \geq v[b]$
4   Devolva b
5 Devolva $S(x, v, a, b - 1)$

Tempo de execução das linhas 1 a 4 é $\mathcal{O}(1)$ para qualquer instância (x, v, a, b) do BVO

Exemplo 13

Relembrando a busca sequencial:

$\mathrm{S}(x, v, a, b)$

1 Se $a > b$
2   Devolva $a - 1$
3 Se $x \geq v[b]$
4   Devolva b
5 Devolva $S(x, v, a, b - 1)$

Tempo de execução das linhas 1 a 4 é $\mathcal{O}(1)$ para qualquer instância (x, v, a, b) do BVO

Portanto:

Notação $\mathcal{O}(1)$

Exemplo 13

Relembrando a busca sequencial:

$\mathrm{S}(x, v, a, b)$

1 Se $a > b$
2   Devolva $a - 1$
3 Se $x \geq v[b]$
4   Devolva b
5 Devolva $S(x, v, a, b - 1)$

Tempo de execução das linhas 1 a 4 é $\mathcal{O}(1)$ para qualquer instância (x, v, a, b) do BVO

Portanto: $S^{+}(n) = S^{+}(n-1) + \mathcal{O}(1)$, para todo $n \geq 1$.

Notação $\mathcal{O}(1)$

Exemplo 13

Relembrando a busca sequencial:

$\mathrm{S}(x, v, a, b)$

```
1 Se a > b
2     Devolva a − 1
3 Se x ≥ v[b]
4     Devolva b
5 Devolva S(x, v, a, b − 1)
```

Tempo de execução das linhas 1 a 4 é $\mathcal{O}(1)$ para qualquer instância (x, v, a, b) do BVO

Portanto: $S^+(n) = S^+(n-1) + \mathcal{O}(1)$, para todo $n \geq 1$.

Ou seja, $\exists t(n) = \mathcal{O}(1)$ tal que

Notação $\mathcal{O}(1)$

Exemplo 13

Relembrando a busca sequencial:

$\mathrm{S}(x, v, a, b)$

1 Se $a > b$
2   Devolva $a - 1$
3 Se $x \geq v[b]$
4   Devolva b
5 Devolva $S(x, v, a, b - 1)$

Tempo de execução das linhas 1 a 4 é $\mathcal{O}(1)$ para qualquer instância (x, v, a, b) do BVO

Portanto: $S^+(n) = S^+(n-1) + \mathcal{O}(1)$, para todo $n \geq 1$.

Ou seja, $\exists t(n) = \mathcal{O}(1)$ tal que

$$S^+(n) = S^+(n-1) + t(n), \text{ para todo } n \geq 1.$$

Notação $\mathcal{O}(1)$

Do slide anterior: $S^+(n) = S^+(n-1) + t(n)$, para todo $n \geq 1$.

Notação $\mathcal{O}(1)$

Do slide anterior: $S^+(n) = S^+(n-1) + t(n)$, para todo $n \geq 1$.

Notação $\mathcal{O}(1)$

Do slide anterior: $S^+(n) = S^+(n-1) + t(n)$, para todo $n \geq 1$. Portanto

Notação $\mathcal{O}(1)$

Do slide anterior: $S^+(n) = S^+(n-1) + t(n)$, para todo $n \geq 1$. Portanto

$$S^+(n) = S^+(0) + \sum_{i=0}^{n-1} t(i)$$

Notação $\mathcal{O}(1)$

Do slide anterior: $S^+(n) = S^+(n-1) + t(n)$, para todo $n \geq 1$. Portanto

$$S^+(n) = S^+(0) + \sum_{i=0}^{n-1} t(i) = S^+(0) + \sum_{i=0}^{n-1} \mathcal{O}(1)$$

Notação $\mathcal{O}(1)$

Do slide anterior: $S^+(n) = S^+(n-1) + t(n)$, para todo $n \geq 1$. Portanto

$$S^+(n) = S^+(0) + \sum_{i=0}^{n-1} t(i) = S^+(0) + \sum_{i=0}^{n-1} \mathcal{O}(1)$$

E, daí (Exercício 9),

Notação $\mathcal{O}(1)$

Do slide anterior: $S^+(n) = S^+(n-1) + t(n)$, para todo $n \geq 1$. Portanto

$$S^+(n) = S^+(0) + \sum_{i=0}^{n-1} t(i) = S^+(0) + \sum_{i=0}^{n-1} \mathcal{O}(1)$$

E, daí (Exercício 9),

$$S^+(n) = \mathcal{O}(1) + \mathcal{O}(1)n$$

Notação $\mathcal{O}(1)$

Do slide anterior: $S^+(n) = S^+(n-1) + t(n)$, para todo $n \geq 1$. Portanto

$$S^+(n) = S^+(0) + \sum_{i=0}^{n-1} t(i) = S^+(0) + \sum_{i=0}^{n-1} \mathcal{O}(1)$$

E, daí (Exercício 9),

$$S^+(n) = \mathcal{O}(1) + \mathcal{O}(1)n = \left(\mathcal{O}(1) + \frac{\mathcal{O}(1)}{n}\right) n$$

Do slide anterior: $S^+(n) = S^+(n-1) + t(n)$, para todo $n \geq 1$. Portanto

$$S^+(n) = S^+(0) + \sum_{i=0}^{n-1} t(i) = S^+(0) + \sum_{i=0}^{n-1} \mathcal{O}(1)$$

E, daí (Exercício 9),

$$S^+(n) = \mathcal{O}(1) + \mathcal{O}(1)n = \left(\mathcal{O}(1) + \frac{\mathcal{O}(1)}{n}\right) n \overset{\text{Ex. 8}}{=} (\mathcal{O}(1) + \mathcal{O}(1))\, n$$

Notação $\mathcal{O}(1)$

Do slide anterior: $S^+(n) = S^+(n-1) + t(n)$, para todo $n \geq 1$. Portanto

$$S^+(n) = S^+(0) + \sum_{i=0}^{n-1} t(i) = S^+(0) + \sum_{i=0}^{n-1} \mathcal{O}(1)$$

E, daí (Exercício 9),

$$S^+(n) = \mathcal{O}(1) + \mathcal{O}(1)n = \left(\mathcal{O}(1) + \frac{\mathcal{O}(1)}{n}\right) n \overset{\text{Ex. 8}}{=} (\mathcal{O}(1) + \mathcal{O}(1))\, n \overset{\text{Ex. 9}}{=} \mathcal{O}(1)n.$$

Notação $\mathcal{O}(1)$

Teorema 8

Se $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ e $n_f \in \mathbb{N}$ são tais que

$$f(n) = \mathcal{O}(1) + f(n-1), \text{ para todo } n \geq n_f,$$

então

$$f(n) = \mathcal{O}(1)n.$$

Notação $\mathcal{O}(1)$

Teorema 8

Se $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ e $n_f \in \mathbb{N}$ são tais que

$$f(n) = \mathcal{O}(1) + f(n-1), \text{ para todo } n \geq n_f,$$

então

$$f(n) = \mathcal{O}(1)n.$$

Prova:

Sejam $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ e $n_{n_f} \in \mathbb{N}$ são tais que $f(n) = \mathcal{O}(1) + f(n-1), \text{ para todo } n \geq n_f$

Teorema 8

Se $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ e $n_f \in \mathbb{N}$ são tais que

$$f(n) = \mathcal{O}(1) + f(n-1), \text{ para todo } n \geq n_f,$$

então

$$f(n) = \mathcal{O}(1)n.$$

Prova:

Sejam $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ e $n_{n_f} \in \mathbb{N}$ são tais que $f(n) = \mathcal{O}(1) + f(n-1), \text{ para todo } n \geq n_f$

Teorema 8

Se $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ e $n_f \in \mathbb{N}$ são tais que

$$f(n) = \mathcal{O}(1) + f(n-1), \text{ para todo } n \geq n_f,$$

então

$$f(n) = \mathcal{O}(1)n.$$

Prova:

Sejam $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ e $n_{n_f} \in \mathbb{N}$ são tais que $f(n) = \mathcal{O}(1) + f(n-1), \text{ para todo } n \geq n_f$

Então existe $t(n) = \mathcal{O}(1)$ tal que

$$f(n) = t(n) + f(n-1), \text{ para todo } n \geq n_f.$$

Notação $\mathcal{O}(1)$

Teorema 8

Se $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ e $n_f \in \mathbb{N}$ são tais que

$$f(n) = \mathcal{O}(1) + f(n-1), \text{ para todo } n \geq n_f,$$

então

$$f(n) = \mathcal{O}(1)n.$$

Prova:

Sejam $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ e $n_{n_f} \in \mathbb{N}$ são tais que $f(n) = \mathcal{O}(1) + f(n-1), \text{ para todo } n \geq n_f$

Então existe $t(n) = \mathcal{O}(1)$ tal que

$$f(n) = t(n) + f(n-1), \text{ para todo } n \geq n_f.$$

Consequentemente existem $c_t > 0$ e $n_t \in \mathbb{N}$ tais que $|t(n)| \leq c_t, \text{ para todo } n \geq n_t.$

Notação $\mathcal{O}(1)$

Teorema 8

Se $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ e $n_f \in \mathbb{N}$ são tais que

$$f(n) = \mathcal{O}(1) + f(n-1), \text{ para todo } n \geq n_f,$$

então

$$f(n) = \mathcal{O}(1)n.$$

Prova:

Sejam $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ e $n_{n_f} \in \mathbb{N}$ são tais que $f(n) = \mathcal{O}(1) + f(n-1), \text{ para todo } n \geq n_f$

Então existe $t(n) = \mathcal{O}(1)$ tal que

$$f(n) = t(n) + f(n-1), \text{ para todo } n \geq n_f.$$

Consequentemente existem $c_t > 0$ e $n_t \in \mathbb{N}$ tais que $|t(n)| \leq c_t, \text{ para todo } n \geq n_t.$

$$f(n) = \mathcal{O}(1) + f(n-1), \text{ para todo } n \geq n_0,$$

Notação $\mathcal{O}(1)$

Teorema 8

Se $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ e $n_f \in \mathbb{N}$ são tais que

$$f(n) = \mathcal{O}(1) + f(n-1), \text{ para todo } n \geq n_f,$$

então

$$f(n) = \mathcal{O}(1)n.$$

Prova:

Sejam $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ e $n_{n_f} \in \mathbb{N}$ são tais que $f(n) = \mathcal{O}(1) + f(n-1), \text{ para todo } n \geq n_f$

Então existe $t(n) = \mathcal{O}(1)$ tal que

$$f(n) = t(n) + f(n-1), \text{ para todo } n \geq n_f.$$

Consequentemente existem $c_t > 0$ e $n_t \in \mathbb{N}$ tais que $|t(n)| \leq c_t, \text{ para todo } n \geq n_t.$

$$f(n) = \mathcal{O}(1) + f(n-1), \text{ para todo } n \geq n_0,$$

onde

$$n_0 = \max\{n_f, n_t\},$$

Notação $\mathcal{O}(1)$

Prova: (cont.)

Notação $\mathcal{O}(1)$

Prova: (cont.)

Do slide anterior $f(n) = \mathcal{O}(1) + f(n-1)$, para todo $n \geq n_0$, $n_0 = \max\{n_f, n_t\}$

Prova: (cont.)

Do slide anterior $f(n) = \mathcal{O}(1) + f(n-1)$, para todo $n \geq n_0$, $n_0 = \max\{n_f, n_t\}$
Daí, para todo $n \geq n_0$ temos

Notação $\mathcal{O}(1)$

Prova: (cont.)

Do slide anterior $f(n) = \mathcal{O}(1) + f(n-1)$, para todo $n \geq n_0$, $n_0 = \max\{n_f, n_t\}$
Daí, para todo $n \geq n_0$ temos

$$
\begin{aligned}
f(n) &= f(n_0 - 1) + \sum_{i=0}^{n-n_0} t(i) \\
&\leq f(n_0 - 1) + \sum_{i=0}^{n-n_0} c_t \\
&= f(n_0 - 1) + (n - n_0)c_t \\
&= f(n_0 - 1) - n_0 c_t + nc_t \\
&= \mathcal{O}(1) + \mathcal{O}(1) + \mathcal{O}(1)n \\
&\overset{\text{T. 7}}{=} \mathcal{O}(1) + \mathcal{O}(1)n \\
&= \left(\frac{\mathcal{O}(1)}{n} + \mathcal{O}(1) \right) n \\
&\overset{\text{T. 8}}{=} (\mathcal{O}(1) + \mathcal{O}(1))n \\
&\overset{\text{T. 7}}{=} \mathcal{O}(1)n
\end{aligned}
$$

Notação $\mathcal{O}(1)$

Exemplo 14

Relembrando a busca binária:

$\mathrm{B}(x, v, a, b)$

Se $a > b$
    Devolva $a - 1$
$m \leftarrow \left\lfloor \frac{a+b}{2} \right\rfloor$
Se $x < v[m]$
    Devolva $B(x, v, a, m - 1)$
Devolva $B(x, v, m + 1, b)$

Notação $\mathcal{O}(1)$

Exemplo 14

Relembrando a busca binária:

$\mathrm{B}(x, v, a, b)$

1 Se $a > b$
2   Devolva $a - 1$
3 $m \leftarrow \left\lfloor \frac{a+b}{2} \right\rfloor$
4 Se $x < v[m]$
5   Devolva $B(x, v, a, m-1)$
6 Devolva $B(x, v, m+1, b)$

Tempo de execução das linhas 1 a 4 é $\mathcal{O}(1)$ para qualquer instância (x, v, a, b) do BVO

Notação $\mathcal{O}(1)$

Exemplo 14

Relembrando a busca binária:

$\mathrm{B}(x, v, a, b)$

1 Se $a > b$
2   Devolva $a - 1$
3 $m \leftarrow \left\lfloor \frac{a+b}{2} \right\rfloor$
4 Se $x < v[m]$
5   Devolva $B(x, v, a, m-1)$
6 Devolva $B(x, v, m+1, b)$

Tempo de execução das linhas 1 a 4 é $\mathcal{O}(1)$ para qualquer instância (x, v, a, b) do BVO

Portanto:

Notação $\mathcal{O}(1)$

Exemplo 14

Relembrando a busca binária:

B(x, v, a, b)

```
1 Se a > b
2       Devolva a − 1
3 m ← ⌊(a+b)/2⌋
4 Se x < v[m]
5       Devolva B(x, v, a, m − 1)
6 Devolva B(x, v, m + 1, b)
```

Tempo de execução das linhas 1 a 4 é $\mathcal{O}(1)$ para qualquer instância (x, v, a, b) do BVO

Portanto:
$B^+(n) = \mathcal{O}(1) + \max\left\{B^+((m+1) - a + 1), B^+(b - (m+1) + 1)\right\}$, para todo $n \geq 1$.

Notação $\mathcal{O}(1)$

Exemplo 14

Relembrando a busca binária:

$B(x, v, a, b)$

1 Se $a > b$
2   Devolva $a - 1$
3 $m \leftarrow \left\lfloor \frac{a+b}{2} \right\rfloor$
4 Se $x < v[m]$
5   Devolva $B(x, v, a, m-1)$
6 Devolva $B(x, v, m+1, b)$

Tempo de execução das linhas 1 a 4 é $\mathcal{O}(1)$ para qualquer instância (x, v, a, b) do BVO

Portanto:
$B^+(n) = \mathcal{O}(1) + \max\left\{B^+((m+1) - a + 1), B^+(b - (m+1) + 1)\right\}$, para todo $n \geq 1$.

Ou seja (Exercício 4),

Notação $\mathcal{O}(1)$

Exemplo 14

Relembrando a busca binária:

$\mathrm{B}(x, v, a, b)$

1 Se $a > b$
2   Devolva $a - 1$
3 $m \leftarrow \left\lfloor \frac{a+b}{2} \right\rfloor$
4 Se $x < v[m]$
5   Devolva $B(x, v, a, m-1)$
6 Devolva $B(x, v, m+1, b)$

Tempo de execução das linhas 1 a 4 é $\mathcal{O}(1)$ para qualquer instância (x, v, a, b) do BVO

Portanto:
$B^+(n) = \mathcal{O}(1) + \max\left\{B^+((m+1) - a + 1), B^+(b - (m+1) + 1)\right\}$, para todo $n \geq 1$.

Ou seja (Exercício 4), $B^+(n) = \mathcal{O}(1) + B^+\left(\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor\right)$, para todo $n \geq 1$,

Notação $\mathcal{O}(1)$

Exemplo 14

Relembrando a busca binária:

```
B(x, v, a, b)
1 Se a > b
2     Devolva a − 1
3 m ← ⌊(a+b)/2⌋
4 Se x < v[m]
5     Devolva B(x, v, a, m − 1)
6 Devolva B(x, v, m + 1, b)
```

Tempo de execução das linhas 1 a 4 é $\mathcal{O}(1)$ para qualquer instância (x, v, a, b) do BVO

Portanto:
$B^+(n) = \mathcal{O}(1) + \max\left\{B^+((m+1) - a + 1), B^+(b - (m+1) + 1)\right\}$, para todo $n \geq 1$.

Ou seja (Exercício 4), $B^+(n) = \mathcal{O}(1) + B^+\left(\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor\right)$, para todo $n \geq 1$,

Agora vamos fazer o seguinte (por razões que ficarão claras depois):

Exemplo 14

Relembrando a busca binária:

```
B(x, v, a, b)
1 Se a > b
2     Devolva a − 1
3 m ← ⌊(a+b)/2⌋
4 Se x < v[m]
5     Devolva B(x, v, a, m − 1)
6 Devolva B(x, v, m + 1, b)
```

Tempo de execução das linhas 1 a 4 é $\mathcal{O}(1)$ para qualquer instância (x, v, a, b) do BVO

Portanto:
$B^+(n) = \mathcal{O}(1) + \max\left\{B^+((m+1) - a + 1), B^+(b - (m+1) + 1)\right\}$, para todo $n \geq 1$.
Ou seja (Exercício 4), $B^+(n) = \mathcal{O}(1) + B^+\left(\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor\right)$, para todo $n \geq 1$,

Agora vamos fazer o seguinte (por razões que ficarão claras depois):

$$B^+(n) = \mathcal{O}(1) + B^+(h(n)), \text{ para todo } n > 0,$$

onde $h(n) = \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$

Notação $\mathcal{O}(1)$

A partir de $B^+(n) = \mathcal{O}(1) + B^+(h(n)),$ para todo $n > 0$, temos

Notação $\mathcal{O}(1)$

A partir de $B^+(n) = \mathcal{O}(1) + B^+(h(n))$, para todo $n > 0$, temos

$$B^+(n) = B^+(h^u(n)) + \sum_{i=0}^{u-1} \mathcal{O}(1),$$

Notação $\mathcal{O}(1)$

A partir de $B^+(n) = \mathcal{O}(1) + B^+(h(n))$, para todo $n > 0$, temos

$$B^+(n) = B^+(h^u(n)) + \sum_{i=0}^{u-1} \mathcal{O}(1),$$

onde $u = u(n) = \min\left\{k \in \mathbb{N} \; ; \; h^k(n) \leq 0\right\}$.

Notação $\mathcal{O}(1)$

A partir de $B^+(n) = \mathcal{O}(1) + B^+(h(n))$, para todo $n > 0$, temos

$$B^+(n) = B^+(h^u(n)) + \sum_{i=0}^{u-1} \mathcal{O}(1),$$

onde $u = u(n) = \min\left\{k \in \mathbb{N} \;;\; h^k(n) \leq 0\right\}$.

Então

Notação $\mathcal{O}(1)$

A partir de $B^+(n) = \mathcal{O}(1) + B^+(h(n))$, para todo $n > 0$, temos

$$B^+(n) = B^+(h^u(n)) + \sum_{i=0}^{u-1} \mathcal{O}(1),$$

onde $u = u(n) = \min\left\{k \in \mathbb{N}\ ;\ h^k(n) \leq 0\right\}$.

Então

$$B^+(n) = \mathcal{O}(1) + \mathcal{O}(1)u(n).$$

Notação $\mathcal{O}(1)$

A partir de $B^{+}(n) = \mathcal{O}(1) + B^{+}(h(n))$, para todo $n > 0$, temos

$$B^{+}(n) = B^{+}(h^{u}(n)) + \sum_{i=0}^{u-1} \mathcal{O}(1),$$

onde $u = u(n) = \min\left\{k \in \mathbb{N} \;;\; h^{k}(n) \leq 0\right\}$.

Então

$$B^{+}(n) = \mathcal{O}(1) + \mathcal{O}(1)u(n).$$

Como $u(n) = \mathcal{O}(1)\lg n$ (Exercício 13), A partir de $B^+(n) = \mathcal{O}(1) + B^+(h(n))$, para todo $n > 0$, temos

$$B^+(n) = B^+(h^u(n)) + \sum_{i=0}^{u-1} \mathcal{O}(1),$$

onde $u = u(n) = \min\left\{k \in \mathbb{N} \;;\; h^k(n) \leq 0\right\}$.

Então

$$B^+(n) = \mathcal{O}(1) + \mathcal{O}(1)u(n).$$

Como $u(n) = \mathcal{O}(1) \lg n$ (Exercício 13),

$$\begin{aligned} B^+(n) &= \mathcal{O}(1) + \mathcal{O}(1)u(n) \\ &= \mathcal{O}(1) + \mathcal{O}(1)\mathcal{O}(1) \lg n \\ &\overset{\text{Ex.12}}{=} \mathcal{O}(1) + \mathcal{O}(1) \lg n \\ &= \left(\frac{\mathcal{O}(1)}{\lg n} + \mathcal{O}(1)\right) \lg n \\ &\overset{\text{Ex.8}}{=} (\mathcal{O}(1) + \mathcal{O}(1)) \lg n \\ &\overset{\text{T.7}}{=} \mathcal{O}(1) \lg n. \end{aligned}$$

Notação $\mathcal{O}(1)$

Teorema 9

Sejam $n_0 \in \mathbb{N}$, $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ e $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tais que

$$f(n) = \mathcal{O}(1) + f(h(n)), \text{ para todo } n \geq n_0.$$

Então

$$f(n) = \mathcal{O}(1)u(n),$$

onde

$$u(n) = \min \left\{ k \in \mathbb{N} \; ; \; h^k(n) < n_0 \right\}.$$

Notação $\mathcal{O}(1)$

Teorema 9

Sejam $n_0 \in \mathbb{N}$, $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ e $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tais que

$$f(n) = \mathcal{O}(1) + f(h(n)), \text{ para todo } n \geq n_0.$$

Então

$$f(n) = \mathcal{O}(1)u(n),$$

onde

$$u(n) = \min\left\{k \in \mathbb{N} \; ; \; h^k(n) < n_0\right\}.$$

Prova:

Exercício 22.