Análise de Algoritmos
Aula 04

Prof. Murilo V. G. da Silva

DINF/UFPR

(material da disciplina: André Guedes, Renato Carmo, Murilo da Silva)

Notação $\mathcal{O}(f(n))$

A função $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ é *assintoticamente limitada superiormente por* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ se existem $c > 0$ e $n_c \in \mathbb{N}$ tais que

Notação $\mathcal{O}(f(n))$

A função $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ é *assintoticamente limitada superiormente por* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ se existem $c > 0$ e $n_c \in \mathbb{N}$ tais que

$$|g(n)| \leq c|f(n)|, \text{ para todo } n \geq n_c,$$

Notação $\mathcal{O}(f(n))$

A função $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ é *assintoticamente limitada superiormente por* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ se existem $c > 0$ e $n_c \in \mathbb{N}$ tais que

$$|g(n)| \leq c|f(n)|, \text{ para todo } n \geq n_c,$$

O conjunto $\mathcal{O}(f(n))$

O conjunto das funções *assintoticamente limitadas superiormente por* $f(n)$ é denotado por $\mathcal{O}(f(n))$, isto é,

$$\mathcal{O}(f(n)) = \{g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R} \ ; \ \text{ existem } c > 0, n_c \in \mathbb{N} \ ; \ g(n) = \mathcal{O}(1)f(n)\}.$$

Notação $\mathcal{O}(f(n))$

A função $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ é *assintoticamente limitada superiormente por* $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ se existem $c > 0$ e $n_c \in \mathbb{N}$ tais que

$$|g(n)| \leq c|f(n)|, \text{ para todo } n \geq n_c,$$

O conjunto $\mathcal{O}(f(n))$

O conjunto das funções *assintoticamente limitadas superiormente por* $f(n)$ é denotado por $\mathcal{O}(f(n))$, isto é,

$$\mathcal{O}(f(n)) = \{g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R} \;;\; \text{ existem } c > 0, n_c \in \mathbb{N} \;;\; g(n) = \mathcal{O}(1)f(n)\}.$$

O uso de $\mathcal{O}(f(n))$ em igualdades segue convenções análogas às do uso de $\mathcal{O}(1)$.

Notação $\mathcal{O}(f(n))$

A função $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ é *assintoticamente limitada superiormente por* $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ se existem $c > 0$ e $n_c \in \mathbb{N}$ tais que

$$|g(n)| \leq c|f(n)|, \text{ para todo } n \geq n_c,$$

O conjunto $\mathcal{O}(f(n))$

O conjunto das funções *assintoticamente limitadas superiormente por* $f(n)$ é denotado por $\mathcal{O}(f(n))$, isto é,

$$\mathcal{O}(f(n)) = \{g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R} \;;\; \text{ existem } c > 0, n_c \in \mathbb{N} \;;\; g(n) = \mathcal{O}(1)f(n)\}.$$

O uso de $\mathcal{O}(f(n))$ em igualdades segue convenções análogas às do uso de $\mathcal{O}(1)$.

Exemplo 15

A expressão $\mathcal{O}(n^2) = \mathcal{O}(n^3)$, significa

Notação $\mathcal{O}(f(n))$

A função $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ é *assintoticamente limitada superiormente por* $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ se existem $c > 0$ e $n_c \in \mathbb{N}$ tais que

$$|g(n)| \leq c|f(n)|, \text{ para todo } n \geq n_c,$$

O conjunto $\mathcal{O}(f(n))$

O conjunto das funções *assintoticamente limitadas superiormente por* $f(n)$ é denotado por $\mathcal{O}(f(n))$, isto é,

$$\mathcal{O}(f(n)) = \{g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R} \;;\; \text{ existem } c > 0, n_c \in \mathbb{N} \;;\; g(n) = \mathcal{O}(1)f(n)\}.$$

O uso de $\mathcal{O}(f(n))$ em igualdades segue convenções análogas às do uso de $\mathcal{O}(1)$.

Exemplo 15

A expressão $\mathcal{O}(n^2) = \mathcal{O}(n^3)$, significa

Para toda $f(n) \in \mathcal{O}(n^2)$, existe $g(n) \in \mathcal{O}(n^3)$ tal que

$$f(n) = \mathcal{O}(g(n))$$

Notação $\mathcal{O}(f(n))$

Teorema 10

Se
$$g(n) = \mathcal{O}(f(n)), \text{ e}$$
$$f(n) = 0 \implies g(n) = 0, \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

então
$$g(n) = \mathcal{O}(1)f(n)$$

Notação $\mathcal{O}(f(n))$

Teorema 10

Se

$$g(n) = \mathcal{O}(f(n)), \text{ e}$$
$$f(n) = 0 \implies g(n) = 0, \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

então

$$g(n) = \mathcal{O}(1)f(n)$$

Prova:

Notação $\mathcal{O}(f(n))$

Teorema 10

Se
$$g(n) = \mathcal{O}(f(n)), \text{ e}$$
$$f(n) = 0 \implies g(n) = 0, \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

então
$$g(n) = \mathcal{O}(1)f(n)$$

Prova:

Se $g(n) = \mathcal{O}(f(n))$, então existem $c > 0$ e $n_c \in \mathbb{N}$ tais que

$$|g(n)| \leq c|f(n)|, \text{ para todo } n \geq n_c.$$

Notação $\mathcal{O}(f(n))$

Teorema 10

Se
$$g(n) = \mathcal{O}(f(n)), \text{ e}$$
$$f(n) = 0 \implies g(n) = 0, \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

então
$$g(n) = \mathcal{O}(1)f(n)$$

Prova:

Se $g(n) = \mathcal{O}(f(n))$, então existem $c > 0$ e $n_c \in \mathbb{N}$ tais que

$$|g(n)| \leq c|f(n)|, \text{ para todo } n \geq n_c.$$

Seja então $h\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ dada por

$$h(n) = \begin{cases} 1, \text{ se } f(n) = 0, \\ \frac{g(n)}{f(n)}, \text{ se } f(n) \neq 0. \end{cases}$$

Prova: (cont.)

Então

$$h(n)f(n) = \frac{g(n)}{f(n)} = g(n), \text{ para todo } n \mid f(n) \neq 0.$$

Prova: (cont.)

Então

$$h(n)f(n) = \frac{g(n)}{f(n)} = g(n), \text{ para todo } n \mid f(n) \neq 0.$$

Como

$$f(n) = 0 \implies g(n) = 0, \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

Notação $\mathcal{O}(f(n))$

Prova: (cont.)

Então

$$h(n)f(n) = \frac{g(n)}{f(n)} = g(n), \text{ para todo } n \mid f(n) \neq 0.$$

Como

$$f(n) = 0 \implies g(n) = 0, \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

Então

$$g(n) = h(n)f(n), \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Notação $\mathcal{O}(f(n))$

Prova: (cont.)

Então
$$h(n)f(n) = \frac{g(n)}{f(n)} = g(n), \text{ para todo } n \mid f(n) \neq 0.$$

Como
$$f(n) = 0 \implies g(n) = 0, \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

Então
$$g(n) = h(n)f(n), \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Por outro lado temos
$$|h(n)| \leq \left|\frac{g(n)}{f(n)}\right| \leq c, \text{ para todo } n \geq n_c,$$

Prova: (cont.)

Então

$$h(n)f(n) = \frac{g(n)}{f(n)} = g(n), \text{ para todo } n \mid f(n) \neq 0.$$

Como

$$f(n) = 0 \implies g(n) = 0, \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

Então

$$g(n) = h(n)f(n), \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Por outro lado temos

$$|h(n)| \leq \left|\frac{g(n)}{f(n)}\right| \leq c, \text{ para todo } n \geq n_c,$$

Ou seja,

$$h(n) = \mathcal{O}(1).$$

Notação $\mathcal{O}(f(n))$

Prova: (cont.)

Então

$$h(n)f(n) = \frac{g(n)}{f(n)} = g(n), \text{ para todo } n \mid f(n) \neq 0.$$

Como

$$f(n) = 0 \implies g(n) = 0, \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

Então

$$g(n) = h(n)f(n), \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Por outro lado temos

$$|h(n)| \leq \left|\frac{g(n)}{f(n)}\right| \leq c, \text{ para todo } n \geq n_c,$$

Ou seja,

$$h(n) = \mathcal{O}(1).$$

Portanto,

$$g(n) = \mathcal{O}(1)f(n).$$

Notação $\mathcal{O}(f(n))$

Teorema 11

Se $g(n) = \mathcal{O}(1)f(n)$ então $g(n) = \mathcal{O}(f(n))$ e, além disso, $f(n) = 0 \implies g(n) = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Teorema 11

Se $g(n) = \mathcal{O}(1)f(n)$ então $g(n) = \mathcal{O}(f(n))$ e, além disso,
$f(n) = 0 \implies g(n) = 0,$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Prova:

Se $g(n) = \mathcal{O}(1)f(n)$, então existe $h(n) = \mathcal{O}(1)$ tal que $g(n) = h(n)f(n)$

Teorema 11

Se $g(n) = \mathcal{O}(1)f(n)$ então $g(n) = \mathcal{O}(f(n))$ e, além disso, $f(n) = 0 \implies g(n) = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Prova:

Se $g(n) = \mathcal{O}(1)f(n)$, então existe $h(n) = \mathcal{O}(1)$ tal que $g(n) = h(n)f(n)$ e neste caso,

Teorema 11

Se $g(n) = \mathcal{O}(1)f(n)$ então $g(n) = \mathcal{O}(f(n))$ e, além disso, $f(n) = 0 \implies g(n) = 0, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}$.

Prova:

Se $g(n) = \mathcal{O}(1)f(n)$, então existe $h(n) = \mathcal{O}(1)$ tal que $g(n) = h(n)f(n)$ e neste caso,

$$f(n) = 0 \implies g(n) = 0, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Notação $\mathcal{O}(f(n))$

Teorema 11

Se $g(n) = \mathcal{O}(1)f(n)$ então $g(n) = \mathcal{O}(f(n))$ e, além disso,
$f(n) = 0 \implies g(n) = 0, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}$.

Prova:

Se $g(n) = \mathcal{O}(1)f(n)$, então existe $h(n) = \mathcal{O}(1)$ tal que $g(n) = h(n)f(n)$ e neste caso,

$$f(n) = 0 \implies g(n) = 0, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Além disso existem $c > 0$ e $n_c \in \mathbb{N}$ tais que

$$|h(n)| \leq c, \text{ para todo } n \geq n_c,$$

Notação $\mathcal{O}(f(n))$

Teorema 11

Se $g(n) = \mathcal{O}(1)f(n)$ então $g(n) = \mathcal{O}(f(n))$ e, além disso, $f(n) = 0 \implies g(n) = 0,$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Prova:

Se $g(n) = \mathcal{O}(1)f(n)$, então existe $h(n) = \mathcal{O}(1)$ tal que $g(n) = h(n)f(n)$ e neste caso,

$$f(n) = 0 \implies g(n) = 0, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Além disso existem $c > 0$ e $n_c \in \mathbb{N}$ tais que

$$|h(n)| \leq c, \text{ para todo } n \geq n_c,$$

Portanto,

$$|g(n)|$$

Notação $\mathcal{O}(f(n))$

Teorema 11

Se $g(n) = \mathcal{O}(1)f(n)$ então $g(n) = \mathcal{O}(f(n))$ e, além disso, $f(n) = 0 \implies g(n) = 0, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}$.

Prova:

Se $g(n) = \mathcal{O}(1)f(n)$, então existe $h(n) = \mathcal{O}(1)$ tal que $g(n) = h(n)f(n)$ e neste caso,

$$f(n) = 0 \implies g(n) = 0, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Além disso existem $c > 0$ e $n_c \in \mathbb{N}$ tais que

$$|h(n)| \leq c, \text{ para todo } n \geq n_c,$$

Portanto,

$$|g(n)| = |h(n)f(n)|$$

Notação $\mathcal{O}(f(n))$

Teorema 11

Se $g(n) = \mathcal{O}(1)f(n)$ então $g(n) = \mathcal{O}(f(n))$ e, além disso, $f(n) = 0 \implies g(n) = 0,$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Prova:

Se $g(n) = \mathcal{O}(1)f(n)$, então existe $h(n) = \mathcal{O}(1)$ tal que $g(n) = h(n)f(n)$ e neste caso,

$$f(n) = 0 \implies g(n) = 0, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Além disso existem $c > 0$ e $n_c \in \mathbb{N}$ tais que

$$|h(n)| \leq c, \text{ para todo } n \geq n_c,$$

Portanto,

$$|g(n)| = |h(n)f(n)| = |h(n)||f(n)|$$

Notação $\mathcal{O}(f(n))$

Teorema 11

Se $g(n) = \mathcal{O}(1)f(n)$ então $g(n) = \mathcal{O}(f(n))$ e, além disso, $f(n) = 0 \implies g(n) = 0, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}$.

Prova:

Se $g(n) = \mathcal{O}(1)f(n)$, então existe $h(n) = \mathcal{O}(1)$ tal que $g(n) = h(n)f(n)$ e neste caso,

$$f(n) = 0 \implies g(n) = 0, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Além disso existem $c > 0$ e $n_c \in \mathbb{N}$ tais que

$$|h(n)| \leq c, \text{ para todo } n \geq n_c,$$

Portanto,

$$|g(n)| = |h(n)f(n)| = |h(n)||f(n)| \leq c|f(n)|, \text{ para todo } n \geq n_c,$$

Teorema 11

Se $g(n) = \mathcal{O}(1)f(n)$ então $g(n) = \mathcal{O}(f(n))$ e, além disso, $f(n) = 0 \implies g(n) = 0,$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Prova:

Se $g(n) = \mathcal{O}(1)f(n)$, então existe $h(n) = \mathcal{O}(1)$ tal que $g(n) = h(n)f(n)$ e neste caso,

$$f(n) = 0 \implies g(n) = 0, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Além disso existem $c > 0$ e $n_c \in \mathbb{N}$ tais que

$$|h(n)| \leq c, \text{ para todo } n \geq n_c,$$

Portanto,

$$|g(n)| = |h(n)f(n)| = |h(n)||f(n)| \leq c|f(n)|, \text{ para todo } n \geq n_c,$$

Ou seja,

$$g(n) = \mathcal{O}(f(n)).$$

Notação $\mathcal{O}(f(n))$

Exemplo 16

No Exemplo 5 vimos que

$$n! = \mathcal{O}(1)\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n},$$

Exemplo 16

No Exemplo 5 vimos que

$$n! = \mathcal{O}(1)\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n},$$

Ou seja (T.11),

Exemplo 16

No Exemplo 5 vimos que

$$n! = \mathcal{O}(1)\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n},$$

Ou seja (T.11),

$$n! = \mathcal{O}\left(\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}\right).$$

Notação $\mathcal{O}(f(n))$

Exemplo 16

No Exemplo 5 vimos que

$$n! = \mathcal{O}(1)\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n},$$

Ou seja (T.11),

$$n! = \mathcal{O}\left(\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}\right).$$

Exemplo 17

Também vimos que

$$\binom{n}{2} = \frac{n^2}{2} + \mathcal{O}(1)n,$$

Notação $\mathcal{O}(f(n))$

Exemplo 16

No Exemplo 5 vimos que

$$n! = \mathcal{O}(1)\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n},$$

Ou seja (T.11),

$$n! = \mathcal{O}\left(\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}\right).$$

Exemplo 17

Também vimos que

$$\binom{n}{2} = \frac{n^2}{2} + \mathcal{O}(1)n,$$

ou seja (T.11),

Notação $\mathcal{O}(f(n))$

Exemplo 16

No Exemplo 5 vimos que

$$n! = \mathcal{O}(1)\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n},$$

Ou seja (T.11),

$$n! = \mathcal{O}\left(\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}\right).$$

Exemplo 17

Também vimos que

$$\binom{n}{2} = \frac{n^2}{2} + \mathcal{O}(1)n,$$

ou seja (T.11),

$$\binom{n}{2} =$$

Exemplo 16

No Exemplo 5 vimos que

$$n! = \mathcal{O}(1)\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n},$$

Ou seja (T.11),

$$n! = \mathcal{O}\left(\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}\right).$$

Exemplo 17

Também vimos que

$$\binom{n}{2} = \frac{n^2}{2} + \mathcal{O}(1)n,$$

ou seja (T.11),

$$\binom{n}{2} = \frac{n^2}{2} + \mathcal{O}(n).$$

Exemplo 16

No Exemplo 5 vimos que

$$n! = \mathcal{O}(1)\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n},$$

Ou seja (T.11),

$$n! = \mathcal{O}\left(\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}\right).$$

Exemplo 17

Também vimos que

$$\binom{n}{2} = \frac{n^2}{2} + \mathcal{O}(1)n,$$

ou seja (T.11),

$$\binom{n}{2} = \frac{n^2}{2} + \mathcal{O}(n).$$

Menos precisamente, tínhamos

$$\binom{n}{2} = \mathcal{O}(1)n^2$$

Notação $\mathcal{O}(f(n))$

Exemplo 16

No Exemplo 5 vimos que

$$n! = \mathcal{O}(1)\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n},$$

Ou seja (T.11),

$$n! = \mathcal{O}\left(\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}\right).$$

Exemplo 17

Também vimos que

$$\binom{n}{2} = \frac{n^2}{2} + \mathcal{O}(1)n,$$

ou seja (T.11),

$$\binom{n}{2} = \frac{n^2}{2} + \mathcal{O}(n).$$

Menos precisamente, tínhamos

$$\binom{n}{2} = \mathcal{O}(1)n^2$$

Ou seja (T.11),

$$\binom{n}{2} =$$

Exemplo 16

No Exemplo 5 vimos que

$$n! = \mathcal{O}(1)\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n},$$

Ou seja (T.11),

$$n! = \mathcal{O}\left(\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}\right).$$

Exemplo 17

Também vimos que

$$\binom{n}{2} = \frac{n^2}{2} + \mathcal{O}(1)n,$$

ou seja (T.11),

$$\binom{n}{2} = \frac{n^2}{2} + \mathcal{O}(n).$$

Menos precisamente, tínhamos

$$\binom{n}{2} = \mathcal{O}(1)n^2$$

Ou seja (T.11),

$$\binom{n}{2} = \mathcal{O}(n^2).$$

Notação $\mathcal{O}(f(n))$

Exemplo 18

No Exemplo 7 vimos o seguinte sobre a série harmônica:

Notação $\mathcal{O}(f(n))$

Exemplo 18

No Exemplo 7 vimos o seguinte sobre a série harmônica:

$$H(n) = \mathcal{O}(1) \ln n,$$

Exemplo 18

No Exemplo 7 vimos o seguinte sobre a série harmônica:

$$H(n) = \mathcal{O}(1) \ln n,$$

Ou seja (T.11),

$$H(n) =$$

Exemplo 18

No Exemplo 7 vimos o seguinte sobre a série harmônica:

$$H(n) = \mathcal{O}(1)\ln n,$$

Ou seja (T.11),

$$H(n) = \mathcal{O}(\ln n).$$

Exemplo 18

No Exemplo 7 vimos o seguinte sobre a série harmônica:

$$H(n) = \mathcal{O}(1) \ln n,$$

Ou seja (T.11),

$$H(n) = \mathcal{O}(\ln n).$$

Teorema 12

Para todo $b > 1$,

$$\mathcal{O}(\log_b n) = \mathcal{O}(\log n),$$

Exemplo 18

No Exemplo 7 vimos o seguinte sobre a série harmônica:

$$H(n) = \mathcal{O}(1) \ln n,$$

Ou seja (T.11),

$$H(n) = \mathcal{O}(\ln n).$$

Teorema 12

Para todo $b > 1$,

$$\mathcal{O}(\log_b n) = \mathcal{O}(\log n),$$

Prova:

Exercício 14.

Exemplo 19

Vimos também que:

Exemplo 19

Vimos também que:

$$e^x = \sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i!} + \mathcal{O}(1)\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R},$$

Exemplo 19

Vimos também que:

$$e^x = \sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i!} + \mathcal{O}(1)\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R},$$

Ou seja (T.11),

Exemplo 19

Vimos também que:

$$e^x = \sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i!} + \mathcal{O}(1)\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R},$$

Ou seja (T.11),

$$e^x = \sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i!} +$$

Exemplo 19

Vimos também que:

$$e^x = \sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i!} + \mathcal{O}(1)\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R},$$

Ou seja (T.11),

$$e^x = \sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i!} + \mathcal{O}\left(\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right), \text{ para todo } n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R},$$

Exemplo 20

No Exemplo 16 tínhamos, para todo $b > 1$,

$$\log_b n! = n \log_b n - n \log_b e + \mathcal{O}(1) \log_b n,$$

Exemplo 20

No Exemplo 16 tínhamos, para todo $b > 1$,

$$\log_b n! = n \log_b n - n \log_b e + \mathcal{O}(1) \log_b n,$$

Ou seja (T.11, T.12),

Notação $\mathcal{O}(f(n))$

Exemplo 20

No Exemplo 16 tínhamos, para todo $b > 1$,

$$\log_b n! = n \log_b n - n \log_b e + \mathcal{O}(1) \log_b n,$$

Ou seja (T.11, T.12),

$$\log_b n! = n \log_b n - n \log_b e + \mathcal{O}(\log n), \text{ para todo } b > 1.$$

Exemplo 20

No Exemplo 16 tínhamos, para todo $b > 1$,

$$\log_b n! = n \log_b n - n \log_b e + \mathcal{O}(1) \log_b n,$$

Ou seja (T.11, T.12),

$$\log_b n! = n \log_b n - n \log_b e + \mathcal{O}(\log n), \text{ para todo } b > 1.$$

Também tínhamos, para todo $b > 1$,

$$\log_b n! = n \log_b n + \mathcal{O}(1)n,$$

Notação $\mathcal{O}(f(n))$

Exemplo 20

No Exemplo 16 tínhamos, para todo $b > 1$,

$$\log_b n! = n \log_b n - n \log_b e + \mathcal{O}(1) \log_b n,$$

Ou seja (T.11, T.12),

$$\log_b n! = n \log_b n - n \log_b e + \mathcal{O}(\log n), \text{ para todo } b > 1.$$

Também tínhamos, para todo $b > 1$,

$$\log_b n! = n \log_b n + \mathcal{O}(1) n,$$

Ou seja (T.11),

Exemplo 20

No Exemplo 16 tínhamos, para todo $b > 1$,

$$\log_b n! = n \log_b n - n \log_b e + \mathcal{O}(1) \log_b n,$$

Ou seja (T.11, T.12),

$$\log_b n! = n \log_b n - n \log_b e + \mathcal{O}(\log n), \text{ para todo } b > 1.$$

Também tínhamos, para todo $b > 1$,

$$\log_b n! = n \log_b n + \mathcal{O}(1) n,$$

Ou seja (T.11),

$$\log_b n! = n \log_b n + \mathcal{O}(n), \text{ para todo } b > 1.$$

Notação $\mathcal{O}(f(n))$

Exemplo 20

No Exemplo 16 tínhamos, para todo $b > 1$,

$$\log_b n! = n \log_b n - n \log_b e + \mathcal{O}(1) \log_b n,$$

Ou seja (T.11, T.12),

$$\log_b n! = n \log_b n - n \log_b e + \mathcal{O}(\log n), \text{ para todo } b > 1.$$

Também tínhamos, para todo $b > 1$,

$$\log_b n! = n \log_b n + \mathcal{O}(1) n,$$

Ou seja (T.11),

$$\log_b n! = n \log_b n + \mathcal{O}(n), \text{ para todo } b > 1.$$

Também tínhamos, para todo $b > 1$,

$$\log_b n! = \mathcal{O}(1) n \log_b n.$$

Notação $\mathcal{O}(f(n))$

Exemplo 20

No Exemplo 16 tínhamos, para todo $b > 1$,

$$\log_b n! = n \log_b n - n \log_b e + \mathcal{O}(1) \log_b n,$$

Ou seja (T.11, T.12),

$$\log_b n! = n \log_b n - n \log_b e + \mathcal{O}(\log n), \text{ para todo } b > 1.$$

Também tínhamos, para todo $b > 1$,

$$\log_b n! = n \log_b n + \mathcal{O}(1) n,$$

Ou seja (T.11),

$$\log_b n! = n \log_b n + \mathcal{O}(n), \text{ para todo } b > 1.$$

Também tínhamos, para todo $b > 1$,

$$\log_b n! = \mathcal{O}(1) n \log_b n.$$

Ou seja (T.11, T.12),

Exemplo 20

No Exemplo 16 tínhamos, para todo $b > 1$,

$$\log_b n! = n \log_b n - n \log_b e + \mathcal{O}(1) \log_b n,$$

Ou seja (T.11, T.12),

$$\log_b n! = n \log_b n - n \log_b e + \mathcal{O}(\log n), \text{ para todo } b > 1.$$

Também tínhamos, para todo $b > 1$,

$$\log_b n! = n \log_b n + \mathcal{O}(1) n,$$

Ou seja (T.11),

$$\log_b n! = n \log_b n + \mathcal{O}(n), \text{ para todo } b > 1.$$

Também tínhamos, para todo $b > 1$,

$$\log_b n! = \mathcal{O}(1) n \log_b n.$$

Ou seja (T.11, T.12),

$$\log_b n! = \mathcal{O}(n \log n).$$

Notação $\mathcal{O}(f(n))$

Exemplo 21

Notação $\mathcal{O}(f(n))$

Exemplo 21

No Exemplo 13 da busca linear tínhamos:

$$S^+(n) = \mathcal{O}(1)n,$$

Notação $\mathcal{O}(f(n))$

Exemplo 21

No Exemplo 13 da busca linear tínhamos:

$$S^{+}(n) = \mathcal{O}(1)n,$$

Ou seja (T.11),

Exemplo 21

No Exemplo 13 da busca linear tínhamos:

$$S^+(n) = \mathcal{O}(1)n,$$

Ou seja (T.11),

$$S^+(n) = \mathcal{O}(n).$$

Exemplo 21

No Exemplo 13 da busca linear tínhamos:

$$S^+(n) = \mathcal{O}(1)n,$$

Ou seja (T.11),

$$S^+(n) = \mathcal{O}(n).$$

Importante:

Notação $\mathcal{O}(f(n))$

Exemplo 21

No Exemplo 13 da busca linear tínhamos:

$$S^+(n) = \mathcal{O}(1)n,$$

Ou seja (T.11),

$$S^+(n) = \mathcal{O}(n).$$

Importante:

Corolário 13 (de T.8 e T.11)

Exemplo 21

No Exemplo 13 da busca linear tínhamos:

$$S^+(n) = \mathcal{O}(1)n,$$

Ou seja (T.11),

$$S^+(n) = \mathcal{O}(n).$$

Importante:

Corolário 13 (de T.8 e T.11)

Se $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ e $n_f \in \mathbb{N}$ são tais que

$$f(n) = \mathcal{O}(1) + f(n-1), \text{ para todo } n \geq n_f,$$

Notação $\mathcal{O}(f(n))$

Exemplo 21

No Exemplo 13 da busca linear tínhamos:

$$S^+(n) = \mathcal{O}(1)n,$$

Ou seja (T.11),

$$S^+(n) = \mathcal{O}(n).$$

Importante:

Corolário 13 (de T.8 e T.11)

Se $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ e $n_f \in \mathbb{N}$ são tais que

$$f(n) = \mathcal{O}(1) + f(n-1), \text{ para todo } n \geq n_f,$$

então

Exemplo 21

No Exemplo 13 da busca linear tínhamos:

$$S^+(n) = \mathcal{O}(1)n,$$

Ou seja (T.11),

$$S^+(n) = \mathcal{O}(n).$$

Importante:

Corolário 13 (de T.8 e T.11)

Se $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ e $n_f \in \mathbb{N}$ são tais que

$$f(n) = \mathcal{O}(1) + f(n-1), \text{ para todo } n \geq n_f,$$

então

$$f(n) = \mathcal{O}(n).$$

Exemplo 22

Exemplo 22

No Exemplo 14 (busca binária) tínhamos:

$$B^{+}(n) = \mathcal{O}(1) \lg n,$$

Exemplo 22

No Exemplo 14 (busca binária) tínhamos:

$$B^+(n) = \mathcal{O}(1)\lg n,$$

Ou seja (T.11, T.12),

Exemplo 22

No Exemplo 14 (busca binária) tínhamos:

$$B^{+}(n) = \mathcal{O}(1)\lg n,$$

Ou seja (T.11, T.12),

$$B^{+}(n) = \mathcal{O}(\log n).$$

Exemplo 22

No Exemplo 14 (busca binária) tínhamos:

$$B^+(n) = \mathcal{O}(1) \lg n,$$

Ou seja (T.11, T.12),

$$B^+(n) = \mathcal{O}(\log n).$$

Importante:

Exemplo 22

No Exemplo 14 (busca binária) tínhamos:

$$B^{+}(n) = \mathcal{O}(1)\lg n,$$

Ou seja (T.11, T.12),

$$B^{+}(n) = \mathcal{O}(\log n).$$

Importante:

Corolário 14 (de T.9 e T.11)

Exemplo 22

No Exemplo 14 (busca binária) tínhamos:

$$B^+(n) = \mathcal{O}(1) \lg n,$$

Ou seja (T.11, T.12),

$$B^+(n) = \mathcal{O}(\log n).$$

Importante:

Corolário 14 (de T.9 e T.11)

Sejam $n_0 \in \mathbb{N}$, $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ e $h \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tais que

$$f(n) = f(h(n)) + \mathcal{O}(1), \text{ para todo } n \geq n_0.$$

Então

$$f(n) = \mathcal{O}(u(n)),$$

onde

$$u(n) = \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid h^k(n) < n_0\right\}.$$