Análise de Algoritmos
Aula 05

Prof. Murilo V. G. da Silva

DINF/UFPR

(material da disciplina: André Guedes, Renato Carmo, Murilo da Silva)

Notação $\Omega(1)$

Uma função $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ é *assintoticamente limitada inferiormente por uma constante* se existem $c_f > 0$ e $n_f \in \mathbb{N}$ tais que $f(n)$ em valor absoluto está abaixo c_f de n_f em diante, isto é,

$$|f(n)| \geq c_f, \text{ para todo } n \geq n_f.$$

Notação $\Omega(1)$

Uma função $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ é *assintoticamente limitada inferiormente por uma constante* se existem $c_f > 0$ e $n_f \in \mathbb{N}$ tais que $f(n)$ em valor absoluto está abaixo c_f de n_f em diante, isto é,

$$|f(n)| \geq c_f, \text{ para todo } n \geq n_f.$$

O conjunto $\Omega(1)$

Notação $\Omega(1)$

Uma função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ é *assintoticamente limitada inferiormente por uma constante* se existem $c_f > 0$ e $n_f \in \mathbb{N}$ tais que $f(n)$ em valor absoluto está abaixo c_f de n_f em diante, isto é,

$$|f(n)| \geq c_f, \text{ para todo } n \geq n_f.$$

O conjunto $\Omega(1)$

O conjunto das funções *assintoticamente limitadas inferiormente por uma constante* é denotado por $\Omega(1)$, isto é,

$$\Omega(1) = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}, \text{ tal que existem } c_f > 0 \text{ e } n_f \in \mathbb{N} \text{ tais que, } |f(n)| \geq c_f \text{ para todo } n \geq n_f\}$$

Notação $\Omega(1)$

Uma função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ é *assintoticamente limitada inferiormente por uma constante* se existem $c_f > 0$ e $n_f \in \mathbb{N}$ tais que $f(n)$ em valor absoluto está abaixo c_f de n_f em diante, isto é,

$$|f(n)| \geq c_f, \text{ para todo } n \geq n_f.$$

O conjunto $\Omega(1)$

O conjunto das funções *assintoticamente limitadas inferiormente por uma constante* é denotado por $\Omega(1)$, isto é,

$$\Omega(1) = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}, \text{ tal que existem } c_f > 0 \text{ e } n_f \in \mathbb{N} \text{ tais que, } |f(n)| \geq c_f \text{ para todo } n \geq n_f\}$$

O uso de $\Omega(1)$ em expressões obedece às mesmas convenções que o uso de $\mathcal{O}(1)$.

Notação $\Omega(1)$

Exemplo 25

A função

$$s(n) = \sqrt{2\pi}\left(1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{288n^2} - \frac{139}{51840n^3} - \frac{571}{2488320n^4} + \ldots\right)$$

do Exemplo 3 é assintoticamente limitada inferiormente por uma constante pois

Notação $\Omega(1)$

Exemplo 25

A função

$$s(n) = \sqrt{2\pi}\left(1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{288n^2} - \frac{139}{51840n^3} - \frac{571}{2488320n^4} + \dots\right)$$

do Exemplo 3 é assintoticamente limitada inferiormente por uma constante pois

$$|s(n)| \geq 1, \text{ para todo } n \geq 1.$$

Notação $\Omega(1)$

Exemplo 26

A função $f(n) = \frac{1}{n}$ não é $\Omega(1)$,

Notação $\Omega(1)$

Exemplo 26

A função $f(n) = \frac{1}{n}$ não é $\Omega(1)$, pois não existem $c_f > 0$ e $n_f \in \mathbb{N}$ tais que

Notação $\Omega(1)$

Exemplo 26

A função $f(n) = \frac{1}{n}$ não é $\Omega(1)$, pois não existem $c_f > 0$ e $n_f \in \mathbb{N}$ tais que

$$|f(n)| = \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} \geq c_f, \text{ para todo } n \geq n_f.$$

Notação $\Omega(1)$

Exemplo 26

A função $f(n) = \frac{1}{n}$ não é $\Omega(1)$, pois não existem $c_f > 0$ e $n_f \in \mathbb{N}$ tais que

$$|f(n)| = \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} \geq c_f, \text{ para todo } n \geq n_f.$$

Ou seja, $\forall c_f > 0 \; \forall n_f \in \mathbb{N}$

Notação $\Omega(1)$

Exemplo 26

A função $f(n) = \frac{1}{n}$ não é $\Omega(1)$, pois não existem $c_f > 0$ e $n_f \in \mathbb{N}$ tais que

$$|f(n)| = \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} \geq c_f, \text{ para todo } n \geq n_f.$$

Ou seja, $\forall c_f > 0 \; \forall n_f \in \mathbb{N}$

$$|f(n)| = \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n}$$

Notação $\Omega(1)$

Exemplo 26

A função $f(n) = \frac{1}{n}$ não é $\Omega(1)$, pois não existem $c_f > 0$ e $n_f \in \mathbb{N}$ tais que

$$|f(n)| = \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} \geq c_f, \text{ para todo } n \geq n_f.$$

Ou seja, $\forall c_f > 0 \ \forall n_f \in \mathbb{N}$

$$|f(n)| = \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} < c_f,$$

Notação $\Omega(1)$

Exemplo 26

A função $f(n) = \frac{1}{n}$ não é $\Omega(1)$, pois não existem $c_f > 0$ e $n_f \in \mathbb{N}$ tais que

$$|f(n)| = \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} \geq c_f, \text{ para todo } n \geq n_f.$$

Ou seja, $\forall c_f > 0 \; \forall n_f \in \mathbb{N}$

$$|f(n)| = \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} < c_f, \text{ para algum } n > n_f.$$

Notação $\Omega(1)$

Exemplo 26

A função $f(n) = \frac{1}{n}$ não é $\Omega(1)$, pois não existem $c_f > 0$ e $n_f \in \mathbb{N}$ tais que

$$|f(n)| = \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} \geq c_f, \text{ para todo } n \geq n_f.$$

Ou seja, $\forall c_f > 0 \; \forall n_f \in \mathbb{N}$

$$|f(n)| = \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} < c_f, \text{ para algum } n > n_f.$$

Prova de que o Exemplo 26 está correto:

Notação $\Omega(1)$

Exemplo 26

A função $f(n) = \frac{1}{n}$ não é $\Omega(1)$, pois não existem $c_f > 0$ e $n_f \in \mathbb{N}$ tais que

$$|f(n)| = \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} \geq c_f, \text{ para todo } n \geq n_f.$$

Ou seja, $\forall c_f > 0 \; \forall n_f \in \mathbb{N}$

$$|f(n)| = \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} < c_f, \text{ para algum } n > n_f.$$

Prova de que o Exemplo 26 está correto:

Dados $c_f > 0$ e $n_f \in \mathbb{N}$

Notação $\Omega(1)$

Exemplo 26

A função $f(n) = \frac{1}{n}$ não é $\Omega(1)$, pois não existem $c_f > 0$ e $n_f \in \mathbb{N}$ tais que

$$|f(n)| = \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} \geq c_f, \text{ para todo } n \geq n_f.$$

Ou seja, $\forall c_f > 0 \; \forall n_f \in \mathbb{N}$

$$|f(n)| = \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} < c_f, \text{ para algum } n > n_f.$$

Prova de que o Exemplo 26 está correto:

Dados $c_f > 0$ e $n_f \in \mathbb{N}$, temos que se

Notação $\Omega(1)$

Exemplo 26

A função $f(n) = \frac{1}{n}$ não é $\Omega(1)$, pois não existem $c_f > 0$ e $n_f \in \mathbb{N}$ tais que

$$|f(n)| = \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} \geq c_f, \text{ para todo } n \geq n_f.$$

Ou seja, $\forall c_f > 0 \; \forall n_f \in \mathbb{N}$

$$|f(n)| = \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} < c_f, \text{ para algum } n > n_f.$$

Prova de que o Exemplo 26 está correto:

Dados $c_f > 0$ e $n_f \in \mathbb{N}$, temos que se $m = \max\{\lceil 1/c_f \rceil, n_f + 1\}$,

Notação $\Omega(1)$

Exemplo 26

A função $f(n) = \frac{1}{n}$ não é $\Omega(1)$, pois não existem $c_f > 0$ e $n_f \in \mathbb{N}$ tais que

$$|f(n)| = \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} \geq c_f, \text{ para todo } n \geq n_f.$$

Ou seja, $\forall c_f > 0 \; \forall n_f \in \mathbb{N}$

$$|f(n)| = \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} < c_f, \text{ para algum } n > n_f.$$

Prova de que o Exemplo 26 está correto:

Dados $c_f > 0$ e $n_f \in \mathbb{N}$, temos que se $m = \max\{\lceil 1/c_f \rceil, n_f + 1\}$,
Então $m > n_f$ e

Notação $\Omega(1)$

Exemplo 26

A função $f(n) = \frac{1}{n}$ não é $\Omega(1)$, pois não existem $c_f > 0$ e $n_f \in \mathbb{N}$ tais que

$$|f(n)| = \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} \geq c_f, \text{ para todo } n \geq n_f.$$

Ou seja, $\forall c_f > 0 \; \forall n_f \in \mathbb{N}$

$$|f(n)| = \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} < c_f, \text{ para algum } n > n_f.$$

Prova de que o Exemplo 26 está correto:

Dados $c_f > 0$ e $n_f \in \mathbb{N}$, temos que se $m = \max\{\lceil 1/c_f \rceil, n_f + 1\}$,
Então $m > n_f$ e

$$|f(m)| =$$

Notação $\Omega(1)$

Exemplo 26

A função $f(n) = \frac{1}{n}$ não é $\Omega(1)$, pois não existem $c_f > 0$ e $n_f \in \mathbb{N}$ tais que

$$|f(n)| = \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} \geq c_f, \text{ para todo } n \geq n_f.$$

Ou seja, $\forall c_f > 0 \ \forall n_f \in \mathbb{N}$

$$|f(n)| = \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} < c_f, \text{ para algum } n > n_f.$$

Prova de que o Exemplo 26 está correto:

Dados $c_f > 0$ e $n_f \in \mathbb{N}$, temos que se $m = \max\{\lceil 1/c_f \rceil, n_f + 1\}$,
Então $m > n_f$ e

$$|f(m)| = \left|\frac{1}{m}\right| =$$

Notação $\Omega(1)$

Exemplo 26

A função $f(n) = \frac{1}{n}$ não é $\Omega(1)$, pois não existem $c_f > 0$ e $n_f \in \mathbb{N}$ tais que

$$|f(n)| = \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} \geq c_f, \text{ para todo } n \geq n_f.$$

Ou seja, $\forall c_f > 0 \; \forall n_f \in \mathbb{N}$

$$|f(n)| = \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} < c_f, \text{ para algum } n > n_f.$$

Prova de que o Exemplo 26 está correto:

Dados $c_f > 0$ e $n_f \in \mathbb{N}$, temos que se $m = \max\{\lceil 1/c_f \rceil, n_f + 1\}$,
Então $m > n_f$ e

$$|f(m)| = \left|\frac{1}{m}\right| = \frac{1}{m} =$$

Notação $\Omega(1)$

Exemplo 26

A função $f(n) = \frac{1}{n}$ não é $\Omega(1)$, pois não existem $c_f > 0$ e $n_f \in \mathbb{N}$ tais que

$$|f(n)| = \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} \geq c_f, \text{ para todo } n \geq n_f.$$

Ou seja, $\forall c_f > 0 \; \forall n_f \in \mathbb{N}$

$$|f(n)| = \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} < c_f, \text{ para algum } n > n_f.$$

Prova de que o Exemplo 26 está correto:

Dados $c_f > 0$ e $n_f \in \mathbb{N}$, temos que se $m = \max\{\lceil 1/c_f \rceil, n_f + 1\}$,
Então $m > n_f$ e

$$|f(m)| = \left|\frac{1}{m}\right| = \frac{1}{m} = \frac{1}{\max\{\lceil 1/c_f \rceil, n_f + 1\}} \leq$$

Notação $\Omega(1)$

Exemplo 26

A função $f(n) = \frac{1}{n}$ não é $\Omega(1)$, pois não existem $c_f > 0$ e $n_f \in \mathbb{N}$ tais que

$$|f(n)| = \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} \geq c_f, \text{ para todo } n \geq n_f.$$

Ou seja, $\forall c_f > 0 \; \forall n_f \in \mathbb{N}$

$$|f(n)| = \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} < c_f, \text{ para algum } n > n_f.$$

Prova de que o Exemplo 26 está correto:

Dados $c_f > 0$ e $n_f \in \mathbb{N}$, temos que se $m = \max\{\lceil 1/c_f \rceil, n_f + 1\}$,
Então $m > n_f$ e

$$|f(m)| = \left|\frac{1}{m}\right| = \frac{1}{m} = \frac{1}{\max\{\lceil 1/c_f \rceil, n_f + 1\}} \leq \frac{1}{\lceil 1/c_f \rceil} \leq$$

Notação $\Omega(1)$

Exemplo 26

A função $f(n) = \frac{1}{n}$ não é $\Omega(1)$, pois não existem $c_f > 0$ e $n_f \in \mathbb{N}$ tais que

$$|f(n)| = \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} \geq c_f, \text{ para todo } n \geq n_f.$$

Ou seja, $\forall c_f > 0 \; \forall n_f \in \mathbb{N}$

$$|f(n)| = \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} < c_f, \text{ para algum } n > n_f.$$

Prova de que o Exemplo 26 está correto:

Dados $c_f > 0$ e $n_f \in \mathbb{N}$, temos que se $m = \max\{\lceil 1/c_f \rceil, n_f + 1\}$,
Então $m > n_f$ e

$$|f(m)| = \left|\frac{1}{m}\right| = \frac{1}{m} = \frac{1}{\max\{\lceil 1/c_f \rceil, n_f + 1\}} \leq \frac{1}{\lceil 1/c_f \rceil} \leq \frac{1}{1/c_f} =$$

Notação $\Omega(1)$

Exemplo 26

A função $f(n) = \frac{1}{n}$ não é $\Omega(1)$, pois não existem $c_f > 0$ e $n_f \in \mathbb{N}$ tais que

$$|f(n)| = \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} \geq c_f, \text{ para todo } n \geq n_f.$$

Ou seja, $\forall c_f > 0 \; \forall n_f \in \mathbb{N}$

$$|f(n)| = \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} < c_f, \text{ para algum } n > n_f.$$

Prova de que o Exemplo 26 está correto:

Dados $c_f > 0$ e $n_f \in \mathbb{N}$, temos que se $m = \max\{\lceil 1/c_f \rceil, n_f + 1\}$,
Então $m > n_f$ e

$$|f(m)| = \left|\frac{1}{m}\right| = \frac{1}{m} = \frac{1}{\max\{\lceil 1/c_f \rceil, n_f + 1\}} \leq \frac{1}{\lceil 1/c_f \rceil} \leq \frac{1}{1/c_f} = c_f.$$

Notação $\Omega(1)$

Exemplo 27: Stirling

Do Exemplo 5 temos

$$n! = s(n)\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n},$$

Notação $\Omega(1)$

Exemplo 27: Stirling

Do Exemplo 5 temos
$$n! = s(n) \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n},$$

Portanto (Exemplo 25),
$$n! = \Omega(1) \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}.$$

Notação $\Omega(1)$

Exemplo 27: Stirling

Do Exemplo 5 temos

$$n! = s(n)\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n},$$

Portanto (Exemplo 25),

$$n! = \Omega(1)\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}.$$

Exemplo 28: Coeficiente binomial

$$\binom{n}{2} = \frac{n^2}{2} - \frac{1}{2}n = \frac{n^2}{2} + \Omega(1)n,$$

Notação $\Omega(1)$

Exemplo 27: Stirling

Do Exemplo 5 temos

$$n! = s(n)\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n},$$

Portanto (Exemplo 25),

$$n! = \Omega(1)\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}.$$

Exemplo 28: Coeficiente binomial

$$\binom{n}{2} = \frac{n^2}{2} - \frac{1}{2}n = \frac{n^2}{2} + \Omega(1)n,$$

ou,

Notação $\Omega(1)$

Exemplo 27: Stirling

Do Exemplo 5 temos

$$n! = s(n)\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n},$$

Portanto (Exemplo 25),

$$n! = \Omega(1)\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}.$$

Exemplo 28: Coeficiente binomial

$$\binom{n}{2} = \frac{n^2}{2} - \frac{1}{2}n = \frac{n^2}{2} + \Omega(1)n,$$

ou,

$$\binom{n}{2} = \frac{n^2}{2} - \frac{1}{2}n = n^2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2n}\right) = \Omega(1)n^2.$$

Notação $\Omega(1)$

Exemplo 29: Soma Harmônica

Do Exemplo 7 temos

$$H(n) = \ln n + f(n),$$

com

$$\lim f(n) = \gamma = 0.5772156649015328606065120900824024310421593359399 2\ldots,$$

Notação $\Omega(1)$

Exemplo 29: Soma Harmônica

Do Exemplo 7 temos
$$H(n) = \ln n + f(n),$$

com

$$\lim f(n) = \gamma = 0.5772156649015328606065120900824024310421593359399 2\ldots,$$

Portanto (Exercício 21),
$$f(n) = \Omega(1),$$

Exemplo 29: Soma Harmônica

Do Exemplo 7 temos
$$H(n) = \ln n + f(n),$$
com
$$\lim f(n) = \gamma = 0.577215664901532860606512090082402431042159335939922\ldots,$$
Portanto (Exercício 21),
$$f(n) = \Omega(1),$$
Consequentemente

Notação $\Omega(1)$

Exemplo 29: Soma Harmônica

Do Exemplo 7 temos
$$H(n) = \ln n + f(n),$$

com

$$\lim f(n) = \gamma = 0.5772156649015328606065120900824024310421593359399 2\ldots,$$

Portanto (Exercício 21),
$$f(n) = \Omega(1),$$

Consequentemente
$$H(n) = \ln n + \Omega(1),$$

Notação $\Omega(1)$

Exemplo 29: Soma Harmônica

Do Exemplo 7 temos

$$H(n) = \ln n + f(n),$$

com

$$\lim f(n) = \gamma = 0.5772156649015328606065120900824024310421593359399 2\ldots,$$

Portanto (Exercício 21),

$$f(n) = \Omega(1),$$

Consequentemente

$$H(n) = \ln n + \Omega(1),$$

Além disso

Notação $\Omega(1)$

Exemplo 29: Soma Harmônica

Do Exemplo 7 temos

$$H(n) = \ln n + f(n),$$

com

$$\lim f(n) = \gamma = 0.5772156649015328606065120900824024310421593359399 2\ldots,$$

Portanto (Exercício 21),

$$f(n) = \Omega(1),$$

Consequentemente

$$H(n) = \ln n + \Omega(1),$$

Além disso

$$H(n) = \ln n + f(n) =$$

Exemplo 29: Soma Harmônica

Do Exemplo 7 temos

$$H(n) = \ln n + f(n),$$

com

$$\lim f(n) = \gamma = 0.5772156649015328606065120900824024310421593359399 2\ldots,$$

Portanto (Exercício 21),

$$f(n) = \Omega(1),$$

Consequentemente

$$H(n) = \ln n + \Omega(1),$$

Além disso

$$H(n) = \ln n + f(n) = \left(1 + \frac{f(n)}{\ln n}\right) \ln n$$

Notação $\Omega(1)$

Exemplo 29: Soma Harmônica

Do Exemplo 7 temos
$$H(n) = \ln n + f(n),$$
com
$$\lim f(n) = \gamma = 0.5772156649015328606065120900824024310421593359399 2\ldots,$$
Portanto (Exercício 21),
$$f(n) = \Omega(1),$$
Consequentemente
$$H(n) = \ln n + \Omega(1),$$
Além disso
$$H(n) = \ln n + f(n) = \left(1 + \frac{f(n)}{\ln n}\right) \ln n \overset{\text{Ex. 21}}{=} \Omega(1) \ln n.$$

Notação $\Omega(1)$

Exemplo 30: Série de Taylor

Do Exemplo 8 temos, para todo $n > 0$,

$$e^x = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \sum_{i \geq 0} \frac{x^i}{(i+n+1)_i} \overset{\text{Ex. 21}}{=} \sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i!} + \Omega(1) \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Notação $\Omega(1)$

Exemplo 31: análise do Algoritmo S

Da análise do Algoritmo S tínhamos

$$S^{+}(n) = c_2 n + c_1,$$

Notação $\Omega(1)$

Exemplo 31: análise do Algoritmo S

Da análise do Algoritmo S tínhamos

$$S^{+}(n) = c_2 n + c_1,$$

Portanto,

Notação $\Omega(1)$

Exemplo 31: análise do Algoritmo S

Da análise do Algoritmo S tínhamos

$$S^+(n) = c_2 n + c_1,$$

Portanto,

$$S^+(n) = c_2 n + \Omega(1), \tag{1}$$

Notação $\Omega(1)$

Exemplo 31: análise do Algoritmo S

Da análise do Algoritmo S tínhamos

$$S^{+}(n) = c_2 n + c_1,$$

Portanto,

$$S^{+}(n) = c_2 n + \Omega(1), \tag{1}$$

Ainda

Notação $\Omega(1)$

Exemplo 31: análise do Algoritmo S

Da análise do Algoritmo S tínhamos

$$S^+(n) = c_2 n + c_1,$$

Portanto,

$$S^+(n) = c_2 n + \Omega(1), \tag{1}$$

Ainda

$$S^+(n) = c_2 n + c_1 = \left(c_2 + \frac{c_1}{n}\right) n$$

Notação $\Omega(1)$

Exemplo 31: análise do Algoritmo S

Da análise do Algoritmo S tínhamos

$$S^+(n) = c_2 n + c_1,$$

Portanto,

$$S^+(n) = c_2 n + \Omega(1), \tag{1}$$

Ainda

$$S^+(n) = c_2 n + c_1 = \left(c_2 + \frac{c_1}{n}\right) n \overset{\text{Ex. 21}}{=} \Omega(1) n.$$

Notação $\Omega(1)$

Exemplo 32: análise do Algoritmo B

Da análise do Algoritmo B e do Exercício 5 temos

$$B^{+}(n) \geq c_2' \lg n + c_1',$$

Notação $\Omega(1)$

Exemplo 32: análise do Algoritmo B

Da análise do Algoritmo B e do Exercício 5 temos

$$B^+(n) \geq c_2' \lg n + c_1',$$

Portanto,

Notação $\Omega(1)$

Exemplo 32: análise do Algoritmo B

Da análise do Algoritmo B e do Exercício 5 temos

$$B^+(n) \geq c_2' \lg n + c_1',$$

Portanto,

$$B^+(n) = c_2' \lg n + \Omega(1),$$

Notação $\Omega(1)$

Exemplo 32: análise do Algoritmo B

Da análise do Algoritmo B e do Exercício 5 temos

$$B^+(n) \geq c'_2 \lg n + c'_1,$$

Portanto,

$$B^+(n) = c'_2 \lg n + \Omega(1),$$

Ainda,

Notação $\Omega(1)$

Exemplo 32: análise do Algoritmo B

Da análise do Algoritmo B e do Exercício 5 temos

$$B^+(n) \geq c_2' \lg n + c_1',$$

Portanto,

$$B^+(n) = c_2' \lg n + \Omega(1),$$

Ainda,

$$B^+(n) \geq c_1' + c_2' \lg n = \left(c_2' + \frac{c_1'}{\lg n}\right) \lg n$$

Notação $\Omega(1)$

Exemplo 32: análise do Algoritmo B

Da análise do Algoritmo B e do Exercício 5 temos

$$B^+(n) \geq c_2' \lg n + c_1',$$

Portanto,

$$B^+(n) = c_2' \lg n + \Omega(1),$$

Ainda,

$$B^+(n) \geq c_1' + c_2' \lg n = \left(c_2' + \frac{c_1'}{\lg n}\right) \lg n \overset{\text{Ex. 21}}{=} \Omega(1) \lg n.$$

Notação $\Omega(1)$

Teorema 16

Sejam $n_0 \in \mathbb{N}$, $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ e $h: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tais que

$$f(n) = f(h(n)) + \Omega(1), \text{ para todo } n \geq n_0.$$

Então

$$f(n) = \Omega(1)u(n),$$

onde

$$u(n) = \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid h^k(n) < n_0\right\}.$$

Notação $\Omega(1)$

Teorema 16

Sejam $n_0 \in \mathbb{N}$, $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ e $h \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tais que

$$f(n) = f(h(n)) + \Omega(1), \text{ para todo } n \geq n_0.$$

Então

$$f(n) = \Omega(1)u(n),$$

onde

$$u(n) = \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid h^k(n) < n_0\right\}.$$

Prova

Exercício 23

Notação $\Omega(1)$

Exemplo 33

De forma análoga à do Exemplo 13 podemos observar que o tempo de execução das 4 primeiras linhas do Algoritmo S tomam tempo $\Omega(1)$ e daí,

$$S^+(n) = S^+(n-1) + \Omega(1), \text{ para todo } n \geq 1,$$

Exemplo 33

De forma análoga à do Exemplo 13 podemos observar que o tempo de execução das 4 primeiras linhas do Algoritmo S tomam tempo $\Omega(1)$ e daí,

$$S^+(n) = S^+(n-1) + \Omega(1), \text{ para todo } n \geq 1,$$

Com isso, concluímos que (T.15)

$$S^+(n) = \Omega(1)u(n),$$

Notação $\Omega(1)$

Exemplo 33

De forma análoga à do Exemplo 13 podemos observar que o tempo de execução das 4 primeiras linhas do Algoritmo S tomam tempo $\Omega(1)$ e daí,

$$S^+(n) = S^+(n-1) + \Omega(1), \text{ para todo } n \geq 1,$$

Com isso, concluímos que (T.15)

$$S^+(n) = \Omega(1)u(n),$$

Onde

Notação $\Omega(1)$

Exemplo 33

De forma análoga à do Exemplo 13 podemos observar que o tempo de execução das 4 primeiras linhas do Algoritmo S tomam tempo $\Omega(1)$ e daí,

$$S^+(n) = S^+(n-1) + \Omega(1), \text{ para todo } n \geq 1,$$

Com isso, concluímos que (T.15)

$$S^+(n) = \Omega(1)u(n),$$

Onde

$$u(n) = \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid h^k(n) < 1\right\} = n,$$

Notação $\Omega(1)$

Exemplo 33

De forma análoga à do Exemplo 13 podemos observar que o tempo de execução das 4 primeiras linhas do Algoritmo S tomam tempo $\Omega(1)$ e daí,

$$S^+(n) = S^+(n-1) + \Omega(1), \text{ para todo } n \geq 1,$$

Com isso, concluímos que (T.15)

$$S^+(n) = \Omega(1)u(n),$$

Onde

$$u(n) = \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid h^k(n) < 1\right\} = n,$$

Ou seja,

Notação $\Omega(1)$

Exemplo 33

De forma análoga à do Exemplo 13 podemos observar que o tempo de execução das 4 primeiras linhas do Algoritmo S tomam tempo $\Omega(1)$ e daí,

$$S^+(n) = S^+(n-1) + \Omega(1), \text{ para todo } n \geq 1,$$

Com isso, concluímos que (T.15)

$$S^+(n) = \Omega(1)u(n),$$

Onde

$$u(n) = \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid h^k(n) < 1\right\} = n,$$

Ou seja,

$$S^+(n) = \Omega(1)n.$$

Notação $\Omega(1)$

Exemplo 34

De forma análoga à do Exemplo 14, podemos observar que o tempo de execução das linhas 1 a 4 do Algoritmo B é $\Omega(1)$ para qualquer instância do BVO e daí expressar a recorrência em termos assintóticos.

$$B^+(n) = B^+(h(n)) + \Omega(1), \text{ para todo } n \geq 1,$$

onde

$$h(n) = \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor.$$

Notação $\Omega(1)$

Exemplo 34

De forma análoga à do Exemplo 14, podemos observar que o tempo de execução das linhas 1 a 4 do Algoritmo B é $\Omega(1)$ para qualquer instância do BVO e daí expressar a recorrência em termos assintóticos.

$$B^+(n) = B^+(h(n)) + \Omega(1), \text{ para todo } n \geq 1,$$

onde

$$h(n) = \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor.$$

Então (T.16)

Notação $\Omega(1)$

Exemplo 34

De forma análoga à do Exemplo 14, podemos observar que o tempo de execução das linhas 1 a 4 do Algoritmo B é $\Omega(1)$ para qualquer instância do BVO e daí expressar a recorrência em termos assintóticos.

$$B^+(n) = B^+(h(n)) + \Omega(1), \text{ para todo } n \geq 1,$$

onde

$$h(n) = \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor.$$

Então (T.16)

$$S^+(n) = \Omega(1)u(n),$$

onde

$$u(n) = \min \left\{ k \in \mathbb{N} \mid h^k(n) < 1 \right\}.$$

Notação $\Omega(1)$

Exemplo 34

De forma análoga à do Exemplo 14, podemos observar que o tempo de execução das linhas 1 a 4 do Algoritmo B é $\Omega(1)$ para qualquer instância do BVO e daí expressar a recorrência em termos assintóticos.

$$B^{+}(n) = B^{+}(h(n)) + \Omega(1), \text{ para todo } n \geq 1,$$

onde

$$h(n) = \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor.$$

Então (T.16)

$$S^{+}(n) = \Omega(1)u(n),$$

onde

$$u(n) = \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid h^{k}(n) < 1\right\}.$$

Como (Ex.24)

$$u(n) = \Omega(1)\lg n,$$

Notação $\Omega(1)$

Exemplo 34

De forma análoga à do Exemplo 14, podemos observar que o tempo de execução das linhas 1 a 4 do Algoritmo B é $\Omega(1)$ para qualquer instância do BVO e daí expressar a recorrência em termos assintóticos.

$$B^+(n) = B^+(h(n)) + \Omega(1), \text{ para todo } n \geq 1,$$

onde

$$h(n) = \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor.$$

Então (T.16)

$$S^+(n) = \Omega(1)u(n),$$

onde

$$u(n) = \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid h^k(n) < 1\right\}.$$

Como (Ex.24)

$$u(n) = \Omega(1)\lg n,$$

Então

Notação $\Omega(1)$

Exemplo 34

De forma análoga à do Exemplo 14, podemos observar que o tempo de execução das linhas 1 a 4 do Algoritmo B é $\Omega(1)$ para qualquer instância do BVO e daí expressar a recorrência em termos assintóticos.

$$B^+(n) = B^+(h(n)) + \Omega(1), \text{ para todo } n \geq 1,$$

onde

$$h(n) = \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor.$$

Então (T.16)

$$S^+(n) = \Omega(1)u(n),$$

onde

$$u(n) = \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid h^k(n) < 1\right\}.$$

Como (Ex.24)

$$u(n) = \Omega(1)\lg n,$$

Então

$$B^+(n) = \Omega(1)u(n) = \Omega(1)\Omega(1)\lg n \overset{\text{Ex. 25}}{=}$$

Notação $\Omega(1)$

Exemplo 34

De forma análoga à do Exemplo 14, podemos observar que o tempo de execução das linhas 1 a 4 do Algoritmo B é $\Omega(1)$ para qualquer instância do BVO e daí expressar a recorrência em termos assintóticos.

$$B^+(n) = B^+(h(n)) + \Omega(1), \text{ para todo } n \geq 1,$$

onde

$$h(n) = \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor.$$

Então (T.16)

$$S^+(n) = \Omega(1)u(n),$$

onde

$$u(n) = \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid h^k(n) < 1\right\}.$$

Como (Ex.24)

$$u(n) = \Omega(1) \lg n,$$

Então

$$B^+(n) = \Omega(1)u(n) = \Omega(1)\Omega(1) \lg n \overset{\text{Ex. 25}}{=} \Omega(1) \lg n.$$

Notação $\Omega(f(n))$

A função $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ é *assintoticamente limitada inferiormente por* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ se existem $c > 0$ e $n_c \in \mathbb{N}$ tais que

$$|g(n)| \geq c|f(n)|, \text{ para todo } n \geq n_c,$$

Notação $\Omega(f(n))$

A função $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ é *assintoticamente limitada inferiormente por* $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ se existem $c > 0$ e $n_c \in \mathbb{N}$ tais que

$$|g(n)| \geq c|f(n)|, \text{ para todo } n \geq n_c,$$

O conjunto $\mathcal{O}(f(n))$

O conjunto das funções *assintoticamente limitadas inferiormente por* $f(n)$ é denotado por $\Omega(f(n))$, isto é,

$$\Omega(f(n)) = \{g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R} \mid \text{ existem } c > 0, n_c \in \mathbb{N} \mid g(n) = \Omega(1)f(n)\}.$$

Notação $\Omega(f(n))$

A função $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ é *assintoticamente limitada inferiormente por* $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ se existem $c > 0$ e $n_c \in \mathbb{N}$ tais que

$$|g(n)| \geq c|f(n)|, \text{ para todo } n \geq n_c,$$

O conjunto $\mathcal{O}(f(n))$

O conjunto das funções *assintoticamente limitadas inferiormente por* $f(n)$ é denotado por $\Omega(f(n))$, isto é,

$$\Omega(f(n)) = \{g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R} \mid \text{ existem } c > 0, n_c \in \mathbb{N} \mid g(n) = \Omega(1)f(n)\}.$$

O uso de $\Omega(f(n))$ em igualdades segue convenções análogas às do uso de $\mathcal{O}(f(n))$.

Teorema 17

Se

$$g(n) = \Omega(f(n)), \text{ e}$$
$$f(n) = 0 \implies g(n) = 0, \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

então

$$g(n) = \Omega(1)f(n).$$

Notação $\Omega(f(n))$

Teorema 17

Se

$$g(n) = \Omega(f(n)), \text{ e}$$
$$f(n) = 0 \implies g(n) = 0, \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

então

$$g(n) = \Omega(1)f(n).$$

Prova:

Notação $\Omega(f(n))$

Teorema 17

Se

$$g(n) = \Omega(f(n)), \text{ e}$$
$$f(n) = 0 \implies g(n) = 0, \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

então

$$g(n) = \Omega(1)f(n).$$

Prova:

Exercício 26.

Notação $\Omega(f(n))$

Teorema 18

Se $g(n) = \Omega(1)f(n)$ então $g(n) = \Omega(f(n))$ e, além disso, $f(n) = 0 \implies g(n) = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Notação $\Omega(f(n))$

Teorema 18

Se $g(n) = \Omega(1)f(n)$ então $g(n) = \Omega(f(n))$ e, além disso, $f(n) = 0 \implies g(n) = 0,$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Prova:

Exercício 27.

Exemplo 35: Stirling

Dos Exemplos 5 e 25 temos

$$n! = \Omega(1)\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n},$$

Exemplo 35: Stirling

Dos Exemplos 5 e 25 temos

$$n! = \Omega(1)\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n},$$

Ou seja (T.18),

Notação $\Omega(f(n))$

Exemplo 35: Stirling

Dos Exemplos 5 e 25 temos

$$n! = \Omega(1)\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n},$$

Ou seja (T.18),

$$n! = \Omega\left(\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}\right),$$

Exemplo 36: Coeficiente binomial

Do Exemplo 28 temos

$$\binom{n}{2} = \frac{n^2}{2} + \Omega(1)n.$$

ou seja (T.18),

$$\binom{n}{2} = \frac{n^2}{2} + \Omega(n).$$

Notação $\Omega(f(n))$

Exemplo 36: Coeficiente binomial

Do Exemplo 28 temos

$$\binom{n}{2} = \frac{n^2}{2} + \Omega(1)n.$$

ou seja (T.18),

$$\binom{n}{2} = \frac{n^2}{2} + \Omega(n).$$

Do mesmo Exemplo temos

$$\binom{n}{2} = \Omega(1)n^2,$$

ou seja (T.18),

$$\binom{n}{2} = \Omega(n^2).$$

Exemplo 37: Soma Harmônica

Do Exemplo 29 temos

$$H(n) = \Omega(1)\ln n.$$

Exemplo 37: Soma Harmônica

Do Exemplo 29 temos

$$H(n) = \Omega(1) \ln n.$$

Ou seja (T.18),

Exemplo 37: Soma Harmônica

Do Exemplo 29 temos

$$H(n) = \Omega(1) \ln n.$$

Ou seja (T.18),

$$H(n) = \Omega(\ln n) \stackrel{\text{Ex. 28}}{=} \Omega(\log n).$$

Notação $\Omega(f(n))$

Exemplo 38: Série de Taylor

Do Exemplo 30 temos

$$e^x = \sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i!} + \Omega(1)\frac{x^{n+1}}{(n+1)!},$$

Exemplo 38: Série de Taylor

Do Exemplo 30 temos

$$e^x = \sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i!} + \Omega(1)\frac{x^{n+1}}{(n+1)!},$$

Ou seja (T.18),

Notação $\Omega(f(n))$

Exemplo 38: Série de Taylor

Do Exemplo 30 temos

$$e^x = \sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i!} + \Omega(1)\frac{x^{n+1}}{(n+1)!},$$

Ou seja (T.18),

$$e^x = \sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i!} + \Omega\left(\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right).$$

Notação $\Omega(f(n))$

Exemplo 39

Do Exemplo 31 temos

$$S^{+}(n) = \Omega(1)n,$$

Exemplo 39

Do Exemplo 31 temos

$$S^+(n) = \Omega(1)n,$$

Ou seja (T.18),

Notação $\Omega(f(n))$

Exemplo 39

Do Exemplo 31 temos

$$S^+(n) = \Omega(1)n,$$

Ou seja (T.18),

$$S^+(n) = \Omega(n).$$

Notação $\Omega(f(n))$

Exemplo 40

Do Exemplo 32 temos

$$B^{+}(n) = \Omega(1) \lg n,$$

Notação $\Omega(f(n))$

Exemplo 40

Do Exemplo 32 temos

$$B^+(n) = \Omega(1) \lg n,$$

Ou seja (T.18, Ex.28),

Exemplo 40

Do Exemplo 32 temos

$$B^+(n) = \Omega(1) \lg n,$$

Ou seja (T.18, Ex.28),

$$B^+(n) = \Omega(\log n).$$

Notação $\Omega(f(n))$

Exemplo 41

Da análise das primeiras aulas tínhamos

$$\frac{S^+(n)}{B^+(n)} = \frac{n}{\lfloor \lg n \rfloor}\left(\frac{c_1 + c_2/n}{c_1' + c_2'/\lfloor \lg n \rfloor}\right) \overset{\text{Ex. 21}}{=} \Omega(1)\frac{n}{\lfloor \lg n \rfloor} \overset{\text{Ex. 20}}{=} \Omega(1)\Omega(1) \overset{\text{Ex. 25}}{=} \Omega(1),$$

e portanto,

$$S^+(n) = \Omega(1)B^+(n),$$

ou seja (T.18),

$$S^+(n) = \Omega(B^+(n)).$$

Notação $\Omega(f(n))$

Podemos chegar à mesma conclusão mais facilmente a partir do seguinte resultado.

Notação $\Omega(f(n))$

Podemos chegar à mesma conclusão mais facilmente a partir do seguinte resultado.

Teorema 19

Se $f, g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, então

$$f(n) = \mathcal{O}(g(n)) \text{ se e somente se } g(n) = \Omega(f(n)).$$

Notação $\Omega(f(n))$

Podemos chegar à mesma conclusão mais facilmente a partir do seguinte resultado.

Teorema 19

Se $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, então

$$f(n) = \mathcal{O}(g(n)) \text{ se e somente se } g(n) = \Omega(f(n)).$$

Prova:

Exercício 29.

Notação $\Omega(f(n))$

Podemos chegar à mesma conclusão mais facilmente a partir do seguinte resultado.

Teorema 19

Se $f, g \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, então

$$f(n) = \mathcal{O}(g(n)) \text{ se e somente se } g(n) = \Omega(f(n)).$$

Prova:

Exercício 29.

Corolário 20 (de T.9 e T.18)

Sejam $n_0 \in \mathbb{N}$, $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ e $h \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tais que

$$f(n) = f(h(n)) + \Omega(1), \text{ para todo } n \geq n_0.$$

Então

$$f(n) = \Omega(u(n)),$$

onde

$$u(n) = \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid h^k(n) < n_0\right\}.$$

Notação $\Omega(f(n))$

Exemplo 42

Do Exemplo 9 temos

$$
\begin{aligned}
\log_b n! &= n\log_b n - n\log_b e + \frac{1}{2}\log_b n + \mathcal{O}(1) \\
&= n\log_b n - n\log_b e + \Omega(1)\log_b n + \mathcal{O}(1) \\
&= n\log_b n - n\log_b e + \left(\Omega(1) + \frac{\mathcal{O}(1)}{\log_b n}\right)\log_b n \\
&\overset{\text{Ex.31}}{=} n\log_b n - n\log_b e + \Omega(1)\log_b n \\
&\overset{\text{T.18, Ex.28}}{=} n\log_b n - n\log_b e + \Omega(\log n),
\end{aligned}
$$

Exemplo 42 (cont.)

Do Exemplo 20 temos

$$\begin{aligned}
\log_b n! &= n \log_b n - n \log_b e + \mathcal{O}(\log n) \\
&= n \log_b n + \Omega(1) n + \mathcal{O}(\log n) \\
&= n \log_b n + \left(\Omega(1) + \frac{\mathcal{O}(\log n)}{n} \right) n \\
&\overset{\text{Ex.31}}{=} n \log_b n + \Omega(1) n \\
&\overset{\text{T.18}}{=} n \log_b n + \Omega(n).
\end{aligned}$$

Notação $\Omega(f(n))$

Exemplo 42 (cont.)

Do mesmo exemplo temos

$$\begin{aligned} \log_b n! &= n \log_b n + \mathcal{O}(n) \\ &= \left(1 + \frac{\mathcal{O}(n)}{n \log_b n}\right) n \log_b n \\ &\overset{\text{Ex.31}}{=} \Omega(1) n \log_b n \\ &\overset{\text{T.18, Ex.28}}{=} \Omega(n \log n). \end{aligned}$$