Análise de Algoritmos
Aula 06

Prof. Murilo V. G. da Silva

DINF/UFPR

(material da disciplina: André Guedes, Renato Carmo, Murilo da Silva)

Notação Θ

A função $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ é *assintoticamente limitada inferior e superiormente por* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ se

Notação Θ

A função $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ é *assintoticamente limitada inferior e superiormente por* $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ se

$$\begin{aligned} g(n) &= \Omega(f(n)), \text{ e} \\ g(n) &= \mathcal{O}(f(n)). \end{aligned}$$

Notação Θ

A função $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ é *assintoticamente limitada inferior e superiormente por* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ se

$$\begin{aligned} g(n) &= \Omega(f(n)), \text{ e} \\ g(n) &= \mathcal{O}(f(n)). \end{aligned}$$

O conjunto $\Theta(f(n))$

O conjunto das funções assintoticamente limitadas inferior e superiormente por $f(n)$ é denotado $\Theta(f(n))$, isto é,

Notação Θ

A função $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ é *assintoticamente limitada inferior e superiormente por* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ se

$$\begin{aligned} g(n) &= \Omega(f(n)), \text{ e} \\ g(n) &= \mathcal{O}(f(n)). \end{aligned}$$

O conjunto $\Theta(f(n))$

O conjunto das funções assintoticamente limitadas inferior e superiormente por $f(n)$ é denotado $\Theta(f(n))$, isto é,

$$\Theta(f(n)) = \Omega(f(n)) \cap \mathcal{O}(f(n)) = \{g : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \mid g(n) = \Omega(f(n)) \text{ e } g(n) = \mathcal{O}(f(n))\}.$$

Notação Θ

A função $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ é *assintoticamente limitada inferior e superiormente por* $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ se

$$\begin{aligned} g(n) &= \Omega(f(n)), \text{ e} \\ g(n) &= \mathcal{O}(f(n)). \end{aligned}$$

O conjunto $\Theta(f(n))$

O conjunto das funções assintoticamente limitadas inferior e superiormente por $f(n)$ é denotado $\Theta(f(n))$, isto é,

$$\Theta(f(n)) = \Omega(f(n)) \cap \mathcal{O}(f(n)) = \{g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R} \mid g(n) = \Omega(f(n)) \text{ e } g(n) = \mathcal{O}(f(n))\}.$$

O uso de $\Theta(f(n))$ em igualdades segue convenções análogas às do uso de $\mathcal{O}(f(n))$.

Notação Θ

Teorema 21

$g(n) = \Theta(f(n))$ se e somente se existem $c^-, c^+ > 0$ e $n_c \in \mathbb{N}$ tais que

$$c^-|f(n)| \leq |g(n)| \leq c^+ f(n), \text{ para todo } n \geq n_c.$$

Notação Θ

Teorema 21

$g(n) = \Theta(f(n))$ se e somente se existem $c^-, c^+ > 0$ e $n_c \in \mathbb{N}$ tais que

$$c^-|f(n)| \leq |g(n)| \leq c^+ f(n), \text{ para todo } n \geq n_c.$$

Prova:

Exercício 35.

Notação Θ

Exemplo 43

Dos Exemplos 16 e 35 temos, respectivamente,

$$\begin{aligned} n! &= \mathcal{O}\left(\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}\right), \text{ e} \\ n! &= \Omega\left(\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}\right), \end{aligned}$$

Notação Θ

Exemplo 43

Dos Exemplos 16 e 35 temos, respectivamente,

$$\begin{aligned} n! &= \mathcal{O}\left(\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}\right), \text{ e} \\ n! &= \Omega\left(\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}\right), \end{aligned}$$

Portanto

Exemplo 43

Dos Exemplos 16 e 35 temos, respectivamente,

$$
\begin{aligned}
n! &= \mathcal{O}\left(\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}\right), \text{ e} \\
n! &= \Omega\left(\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}\right),
\end{aligned}
$$

Portanto

$$n! = \Theta\left(\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}\right).$$

Notação Θ

Exemplo 44

Dos Exemplos 17 e 36 temos

$$\begin{aligned} \binom{n}{2} &= \mathcal{O}(n^2), \text{ e} \\ \binom{n}{2} &= \Omega(n^2), \end{aligned}$$

ou seja,

$$\binom{n}{2} = \Theta(n^2),$$

Notação Θ

Exemplo 45

Dos Exemplos 18 e 37 temos, respectivamente,

$$\begin{aligned} H(n) &= \ln n + \mathcal{O}(1), \text{ e} \\ H(n) &= \ln n + \Omega(1), \end{aligned}$$

Notação Θ

Exemplo 45

Dos Exemplos 18 e 37 temos, respectivamente,

$$\begin{aligned} H(n) &= \ln n + \mathcal{O}(1), \text{ e} \\ H(n) &= \ln n + \Omega(1), \end{aligned}$$

Portanto,

$$H(n) = \ln n + \Theta(1).$$

Exemplo 45

Dos Exemplos 18 e 37 temos, respectivamente,

$$\begin{aligned} H(n) &= \ln n + \mathcal{O}(1), \text{ e} \\ H(n) &= \ln n + \Omega(1), \end{aligned}$$

Portanto,

$$H(n) = \ln n + \Theta(1).$$

Dos mesmos exemplos temos

Notação Θ

Exemplo 45

Dos Exemplos 18 e 37 temos, respectivamente,

$$
\begin{aligned}
H(n) &= \ln n + \mathcal{O}(1), \text{ e} \\
H(n) &= \ln n + \Omega(1),
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$H(n) = \ln n + \Theta(1).$$

Dos mesmos exemplos temos

$$
\begin{aligned}
H(n) &= \mathcal{O}(\log n), \text{ e} \\
H(n) &= \Omega(\log n),
\end{aligned}
$$

Exemplo 45

Dos Exemplos 18 e 37 temos, respectivamente,

$$\begin{aligned} H(n) &= \ln n + \mathcal{O}(1), \text{ e} \\ H(n) &= \ln n + \Omega(1), \end{aligned}$$

Portanto,

$$H(n) = \ln n + \Theta(1).$$

Dos mesmos exemplos temos

$$\begin{aligned} H(n) &= \mathcal{O}(\log n), \text{ e} \\ H(n) &= \Omega(\log n), \end{aligned}$$

Portanto,

Notação Θ

Exemplo 45

Dos Exemplos 18 e 37 temos, respectivamente,

$$\begin{aligned} H(n) &= \ln n + \mathcal{O}(1), \text{ e} \\ H(n) &= \ln n + \Omega(1), \end{aligned}$$

Portanto,

$$H(n) = \ln n + \Theta(1).$$

Dos mesmos exemplos temos

$$\begin{aligned} H(n) &= \mathcal{O}(\log n), \text{ e} \\ H(n) &= \Omega(\log n), \end{aligned}$$

Portanto,

$$H(n) = \Theta(\log n).$$

Exemplo 46

Dos Exemplos 19 e 38 temos, respectivamente,

$$\begin{aligned} e^x &= \sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i!} + \mathcal{O}\left(\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right), \text{ e} \\ e^x &= \sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i!} + \Omega\left(\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right), \end{aligned}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, e todo $x \in \mathbb{R}$, ou seja,

$$e^x = \sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i!} + \Theta\left(\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right), \text{ para todo } n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}.$$

Notação Θ

Exemplo 47

Dos Exemplos 21 e 39 temos, respectivamente,

$$
\begin{aligned}
S^{+}(n) &= \mathcal{O}(n), \text{ e} \\
S^{+}(n) &= \Omega(n),
\end{aligned}
$$

Exemplo 47

Dos Exemplos 21 e 39 temos, respectivamente,

$$\begin{aligned} S^+(n) &= \mathcal{O}(n), \text{ e} \\ S^+(n) &= \Omega(n), \end{aligned}$$

Portanto,

Exemplo 47

Dos Exemplos 21 e 39 temos, respectivamente,

$$\begin{aligned} S^{+}(n) &= \mathcal{O}(n), \text{ e} \\ S^{+}(n) &= \Omega(n), \end{aligned}$$

Portanto,

$$S^{+}(n) = \Theta(n).$$

Notação Θ

Teorema 22

O tempo de execução de pior caso de $S(x, v, a, b)$ é $\Theta(b - a + 1)$, isto é,

> *Existem* $c^-, c^+ > 0$ *e* $n_+ \in \mathbb{N}$
> *tais que*
> *se* $b - a + 1 \geq n_+$
> *então*
> *existe uma instância* (x, v, a, b) *do BVO*
> *para a qual*

$$c^-(b - a + 1) \leq T_S(x, v, a, b) \leq c^+(b - a + 1).$$

Notação Θ

Exemplo 48 (função de custo do melhor caso)

Assim como a função

$$S^{+}(n) = \max\{\, T_S(x, v, a, b) \colon v \text{ tem } n = b - a + 1 \text{ elementos}\},$$

expressa o tempo de pior caso do Algoritmo S em função do tamanho do vetor,

Notação Θ

Exemplo 48 (função de custo do melhor caso)

Assim como a função

$$S^{+}(n) = \max\{T_S(x, v, a, b) \colon v \text{ tem } n = b - a + 1 \text{ elementos}\},$$

expressa o tempo de pior caso do Algoritmo S em função do tamanho do vetor, podemos definir o tempo de melhor caso

Exemplo 48 (função de custo do melhor caso)

Assim como a função

$$S^+(n) = \max\{T_S(x, v, a, b) \colon v \text{ tem } n = b - a + 1 \text{ elementos}\},$$

expressa o tempo de pior caso do Algoritmo S em função do tamanho do vetor, podemos definir o tempo de melhor caso

$$S^-(n) = \min\{T_S(x, v, a, b) \colon v \text{ tem } n = b - a + 1 \text{ elementos}\}.$$

Notação Θ

Exemplo 48 (função de custo do melhor caso)

Assim como a função

$$S^{+}(n) = \max\{T_S(x, v, a, b) \colon v \text{ tem } n = b - a + 1 \text{ elementos}\},$$

expressa o tempo de pior caso do Algoritmo S em função do tamanho do vetor, podemos definir o tempo de melhor caso

$$S^{-}(n) = \min\{T_S(x, v, a, b) \colon v \text{ tem } n = b - a + 1 \text{ elementos}\}.$$

É imediato do exame do Algoritmo S que

$$\begin{aligned} S^{-}(n) &= \Omega(1), \text{ e} \\ S^{-}(n) &= \mathcal{O}(1), \end{aligned}$$

Notação Θ

Exemplo 48 (função de custo do melhor caso)

Assim como a função

$$S^+(n) = \max\{T_S(x, v, a, b) \colon v \text{ tem } n = b - a + 1 \text{ elementos}\},$$

expressa o tempo de pior caso do Algoritmo S em função do tamanho do vetor, podemos definir o tempo de melhor caso

$$S^-(n) = \min\{T_S(x, v, a, b) \colon v \text{ tem } n = b - a + 1 \text{ elementos}\}.$$

É imediato do exame do Algoritmo S que

$$\begin{aligned} S^-(n) &= \Omega(1), \text{ e} \\ S^-(n) &= \mathcal{O}(1), \end{aligned}$$

Portanto,

Notação Θ

Exemplo 48 (função de custo do melhor caso)

Assim como a função

$$S^{+}(n) = \max\{T_S(x, v, a, b) \colon v \text{ tem } n = b - a + 1 \text{ elementos}\},$$

expressa o tempo de pior caso do Algoritmo S em função do tamanho do vetor, podemos definir o tempo de melhor caso

$$S^{-}(n) = \min\{T_S(x, v, a, b) \colon v \text{ tem } n = b - a + 1 \text{ elementos}\}.$$

É imediato do exame do Algoritmo S que

$$\begin{aligned} S^{-}(n) &= \Omega(1), \text{ e} \\ S^{-}(n) &= \mathcal{O}(1), \end{aligned}$$

Portanto,

$$S^{-}(n) = \Theta(1).$$

Notação Θ

Teorema 23

O tempo de execução de melhor caso de $S(x, v, a, b)$ é $\Theta(1)$,
isto é,

> *Existem* $c^-, c^+ > 0$ *e* $n_+ \in \mathbb{N}$
> *tais que,*
> *se* $b - a + 1 \geq n_+$
> *então*
> *existe uma instância* (x, v, a, b) *do BVO*
> *para a qual*
> $$c^- \leq T_S(x, v, a, b) \leq c^+.$$

Notação Θ

Corolário 24

O tempo de execução de $S(x, v, a, b)$ é $\Omega(1)$ e $\mathcal{O}(b - a + 1)$, ou seja,

Existem $c^-, c^+ > 0$ *e* $n_S \in \mathbb{N}$
tais que

$$c^- \leq T_S(x, v, a, b) \leq c^+(b - a + 1),$$

para toda instância do BVO com $b - a + 1 \geq n_S$.

Notação Θ

Exemplo 49

Dos Exemplos 22 e 40 temos, respectivamente,

$$\begin{aligned} B^+(n) &= \mathcal{O}(\log n), \text{ e} \\ B^+(n) &= \Omega(\log n), \end{aligned}$$

Notação Θ

Exemplo 49

Dos Exemplos 22 e 40 temos, respectivamente,

$$\begin{aligned} B^{+}(n) &= \mathcal{O}(\log n), \text{ e} \\ B^{+}(n) &= \Omega(\log n), \end{aligned}$$

Portanto,

Exemplo 49

Dos Exemplos 22 e 40 temos, respectivamente,

$$\begin{aligned} B^+(n) &= \mathcal{O}(\log n), \text{ e} \\ B^+(n) &= \Omega(\log n), \end{aligned}$$

Portanto,

$$B^+(n) = \Theta(\log n).$$

Notação Θ

Teorema 25

O tempo de execução de pior caso de $B(x, v, a, b)$ é $\Theta(\log(b - a + 1))$, isto é,

> *Existem* $c^-, c^+ > 0$ *e* $n_+ \in \mathbb{N}$
> *tais que*
> *se* $b - a + 1 \geq n_+$
> *então*
> *existe uma instância do BVO*
> *para a qual*

$$c^- \log(b - a + 1) \leq T_B(x, v, a, b) \leq c^+ \log(b - a + 1).$$

Notação Θ

Corolário 26 (de Cor.14 e Cor.20)

Sejam $n_0 \in \mathbb{N}$, $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ e $h\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tais que

$$f(n) = f(h(n)) + \Theta(1), \text{ para todo } n \geq n_0.$$

Então

$$f(n) = \Theta(u(n)),$$

onde

$$u(n) = \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid h^k(n) < n_0\right\}.$$

Notação Θ

Exemplo 50

Assim como a função

$$B^{+}(n) = \max\{\, T_B(x, v, a, b) \colon v \text{ tem } n = b - a + 1 \text{ elementos}\},$$

expressa o tempo de pior caso do Algoritmo B em função do tamanho do vetor,

Notação Θ

Exemplo 50

Assim como a função

$$B^{+}(n) = \max\{\, T_B(x, v, a, b) \colon v \text{ tem } n = b - a + 1 \text{ elementos}\},$$

expressa o tempo de pior caso do Algoritmo B em função do tamanho do vetor,

podemos definir o tempo de melhor caso

Exemplo 50

Assim como a função

$$B^{+}(n) = \max\{\, T_B(x, v, a, b) \colon v \text{ tem } n = b - a + 1 \text{ elementos}\},$$

expressa o tempo de pior caso do Algoritmo B em função do tamanho do vetor,

podemos definir o tempo de melhor caso

$$B^{-}(n) = \min\{\, T_B(x, v, a, b) \colon v \text{ tem } n = b - a + 1 \text{ elementos}\}.$$

Exemplo 50 (cont.)

Como
$$B^{-}(n) = B^{-}\left(\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor\right) + \Omega(1), \text{ para todo } n \geq 1,$$
então (T.9, Ex.13),
$$B^{-}(n) = \mathcal{O}(\log n),$$
e (Cor.20, Ex.24)
$$B^{-}(n) = \Omega(\log n),$$
então,
$$B^{-}(n) = \Theta(\log n).$$

Notação Θ

Teorema 27

O tempo de execução de melhor caso de $B(x, v, a, b)$ é $\Theta(\log(b - a + 1))$, isto é,

Existem $c^-, c^+ > 0$ e $n_- \in \mathbb{N}$
tais que,
se $b - a + 1 \geq n_-$,
então
existe uma instância do BVO
para a qual

$$c^- \log(b - a + 1) \leq T_B(x, v, a, b) \leq c^+ \log(b - a + 1).$$

Notação Θ

Corolário 28

O tempo de execução de $B(x, v, a, b)$ é $\Theta(\log(b - a + 1))$, ou seja,

Existem $c^-, c^+ > 0$ e $n_B \in \mathbb{N}$
tais que,
se $b - a + 1 \geq n_B$,
então

$$c^- \log(b - a + 1) \leq T_B(x, v, a, b) \leq c^+ \log(b - a + 1),$$

para toda instância do BVO com $b - a + 1 \geq n_B$.

Exemplo 51

Dos Exemplos 9 e 42 podemos concluir que, para todo $b > 1$,

$$\log_b n! = n \log_b n - n \log_b e + \frac{1}{2} \log_b n + \Theta(1)$$

Exemplo 51

Dos Exemplos 9 e 42 podemos concluir que, para todo $b > 1$,

$$\log_b n! = n \log_b n - n \log_b e + \frac{1}{2} \log_b n + \Theta(1)$$

ou, menos precisamente,

Notação Θ

Exemplo 51

Dos Exemplos 9 e 42 podemos concluir que, para todo $b > 1$,

$$\log_b n! = n \log_b n - n \log_b e + \frac{1}{2} \log_b n + \Theta(1)$$

ou, menos precisamente,

$$\log_b n! = n \log_b n - n \log_b e + \Theta(\log_b n),$$

Notação Θ

Exemplo 51

Dos Exemplos 9 e 42 podemos concluir que, para todo $b > 1$,

$$\log_b n! = n \log_b n - n \log_b e + \frac{1}{2} \log_b n + \Theta(1)$$

ou, menos precisamente,

$$\log_b n! = n \log_b n - n \log_b e + \Theta(\log_b n),$$

ou, menos precisamente,

Exemplo 51

Dos Exemplos 9 e 42 podemos concluir que, para todo $b > 1$,

$$\log_b n! = n \log_b n - n \log_b e + \frac{1}{2} \log_b n + \Theta(1)$$

ou, menos precisamente,

$$\log_b n! = n \log_b n - n \log_b e + \Theta(\log_b n),$$

ou, menos precisamente,

$$\log_b n! = n \log_b n + \Theta(n),$$

Notação Θ

Exemplo 51

Dos Exemplos 9 e 42 podemos concluir que, para todo $b > 1$,

$$\log_b n! = n \log_b n - n \log_b e + \frac{1}{2} \log_b n + \Theta(1)$$

ou, menos precisamente,

$$\log_b n! = n \log_b n - n \log_b e + \Theta(\log_b n),$$

ou, menos precisamente,

$$\log_b n! = n \log_b n + \Theta(n),$$

ou, menos precisamente,

Notação Θ

Exemplo 51

Dos Exemplos 9 e 42 podemos concluir que, para todo $b > 1$,

$$\log_b n! = n \log_b n - n \log_b e + \frac{1}{2} \log_b n + \Theta(1)$$

ou, menos precisamente,

$$\log_b n! = n \log_b n - n \log_b e + \Theta(\log_b n),$$

ou, menos precisamente,

$$\log_b n! = n \log_b n + \Theta(n),$$

ou, menos precisamente,

$$\log_b n! = \Theta(n \log n).$$

Notação $\mathcal{O}^*$ e $\tilde{O}$

Dizemos que $g(n) = \mathcal{O}^*(f(n))$ se

$$\frac{g(n)}{f(n)} = O(n^k), \text{ para algum } k \geq 0,$$

Notação $\mathcal{O}^*$ e $\tilde{\mathcal{O}}$

Dizemos que $g(n) = \mathcal{O}^*(f(n))$ se

$$\frac{g(n)}{f(n)} = O(n^k), \text{ para algum } k \geq 0,$$

ou, mais precisamente (definição verdadeira),

Notação $\mathcal{O}^*$ e $\tilde{\mathcal{O}}$

Dizemos que $g(n) = \mathcal{O}^*(f(n))$ se

$$\frac{g(n)}{f(n)} = O(n^k), \text{ para algum } k \geq 0,$$

ou, mais precisamente (definição verdadeira),

$$g(n) = O(n^k f(n)), \text{ para algum } k \geq 0.$$

Notação $\mathcal{O}^*$ e $\tilde{\mathcal{O}}$

Dizemos que $g(n) = \mathcal{O}^*(f(n))$ se

$$\frac{g(n)}{f(n)} = O(n^k), \text{ para algum } k \geq 0,$$

ou, mais precisamente (definição verdadeira),

$$g(n) = O(n^k f(n)), \text{ para algum } k \geq 0.$$

Exemplo 52: Ignorando fatores polinomiais

Do Exemplo 16 temos

$$n! = \mathcal{O}\left(\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}\right).$$

Notação $\mathcal{O}^*$ e $\tilde{\mathcal{O}}$

Dizemos que $g(n) = \mathcal{O}^*(f(n))$ se

$$\frac{g(n)}{f(n)} = O(n^k), \text{ para algum } k \geq 0,$$

ou, mais precisamente (definição verdadeira),

$$g(n) = O(n^k f(n)), \text{ para algum } k \geq 0.$$

Exemplo 52: Ignorando fatores polinomiais

Do Exemplo 16 temos

$$n! = \mathcal{O}\left(\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}\right).$$

Portanto,

Notação $\mathcal{O}^*$ e $\tilde{\mathcal{O}}$

Dizemos que $g(n) = \mathcal{O}^*(f(n))$ se

$$\frac{g(n)}{f(n)} = O(n^k), \text{ para algum } k \geq 0,$$

ou, mais precisamente (definição verdadeira),

$$g(n) = O(n^k f(n)), \text{ para algum } k \geq 0.$$

Exemplo 52: Ignorando fatores polinomiais

Do Exemplo 16 temos

$$n! = \mathcal{O}\left(\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}\right).$$

Portanto,

$$n! = \mathcal{O}^*\left(\left(\frac{n}{e}\right)^n\right)$$

Dizemos que $g(n) = \tilde{\mathcal{O}}(f(n))$ se

$$\frac{g(n)}{f(n)} = O((\log n)^k), \text{ para algum } k \geq 0,$$

ou, mais precisamente (definição verdadeira),

$$g(n) = O((\log n)^k f(n)), \text{ para algum } k \geq 0.$$

Exemplo 52: Ignorando fatores logarítmicos

Notação $\mathcal{O}^*$ e $\tilde{\mathcal{O}}$

Dizemos que $g(n) = \tilde{\mathcal{O}}(f(n))$ se

$$\frac{g(n)}{f(n)} = O((\log n)^k), \text{ para algum } k \geq 0,$$

ou, mais precisamente (definição verdadeira),

$$g(n) = O((\log n)^k f(n)), \text{ para algum } k \geq 0.$$

Exemplo 52: Ignorando fatores logarítmicos

$$n^3(\log n)^4 = \tilde{\mathcal{O}}(n^3)$$