Análise de Algoritmos
Aula 07

Prof. Murilo V. G. da Silva

DINF/UFPR

(material da disciplina: André Guedes, Renato Carmo, Murilo da Silva)

Notação $o(1)$

Uma função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ é *assintoticamente nula* se **para todo** $c > 0$ existe $n_c \in \mathbb{N}$ tal que $f(n)$ em valor absoluto nunca ultrapassa c_f de n_f em diante, isto é,

$$|f(n)| \leq c, \text{ para todo } n \geq n_c.$$

Notação $o(1)$

Uma função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ é *assintoticamente nula* se **para todo** $c > 0$ existe $n_c \in \mathbb{N}$ tal que $f(n)$ em valor absoluto nunca ultrapassa c_f de n_f em diante, isto é,

$$|f(n)| \leq c, \text{ para todo } n \geq n_c.$$

O conjunto $o(1)$

O conjunto das funções *assintoticamente nulas* é denotado por $o(1)$, isto é,

$$o(1) = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \mid \forall c \exists n_c,\ |f(n)| \leq c, \text{ para todo } n \geq n_c\}$$

Notação $o(1)$

Uma função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ é *assintoticamente nula* se **para todo** $c > 0$ existe $n_c \in \mathbb{N}$ tal que $f(n)$ em valor absoluto nunca ultrapassa c_f de n_f em diante, isto é,

$$|f(n)| \leq c, \text{ para todo } n \geq n_c.$$

O conjunto $o(1)$

O conjunto das funções *assintoticamente nulas* é denotado por $o(1)$, isto é,

$$o(1) = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \mid \forall c \exists n_c, \ |f(n)| \leq c, \text{ para todo } n \geq n_c\}$$

O uso de $o(1)$ em igualdades segue convenção análoga ao uso de $\mathcal{O}(1)$ em igualdades.

Notação $o(1)$

Uma função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ é *assintoticamente nula* se **para todo** $c > 0$ existe $n_c \in \mathbb{N}$ tal que $f(n)$ em valor absoluto nunca ultrapassa c_f de n_f em diante, isto é,

$$|f(n)| \leq c, \text{ para todo } n \geq n_c.$$

O conjunto $o(1)$

O conjunto das funções *assintoticamente nulas* é denotado por $o(1)$, isto é,

$$o(1) = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \mid \forall c \exists n_c, \ |f(n)| \leq c, \text{ para todo } n \geq n_c\}$$

O uso de $o(1)$ em igualdades segue convenção análoga ao uso de $\mathcal{O}(1)$ em igualdades.

Teorema 29

$$f(n) = o(1) \text{ se e somente se } \lim f(n) = 0.$$

Notação $o(1)$

Uma função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ é *assintoticamente nula* se **para todo** $c > 0$ existe $n_c \in \mathbb{N}$ tal que $f(n)$ em valor absoluto nunca ultrapassa c_f de n_f em diante, isto é,

$$|f(n)| \leq c, \text{ para todo } n \geq n_c.$$

O conjunto $o(1)$

O conjunto das funções *assintoticamente nulas* é denotado por $o(1)$, isto é,

$$o(1) = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \mid \forall c \exists n_c,\ |f(n)| \leq c, \text{ para todo } n \geq n_c\}$$

O uso de $o(1)$ em igualdades segue convenção análoga ao uso de $\mathcal{O}(1)$ em igualdades.

Teorema 29

$$f(n) = o(1) \text{ se e somente se } \lim f(n) = 0.$$

Prova: Exercício??

Notação $o(f(n))$

Notação $o(f(n))$

Dizemos que $g(n)$ *é assintoticamente muito menor que* $f(n)$ se para todo $c > 0$ existe $n_c \in \mathbb{N}$ tal que

$$|g(n)| \leq c|f(n)|, \text{ para todo } n \geq n_c.$$

Notação $o(f(n))$

Dizemos que $g(n)$ *é assintoticamente muito menor que* $f(n)$ se para todo $c > 0$ existe $n_c \in \mathbb{N}$ tal que

$$|g(n)| \leq c|f(n)|, \text{ para todo } n \geq n_c.$$

O conjunto $o(1)$

O conjunto das funções *assintoticamente muito menores do que* $f(n)$ é denotado por $o(f(n))$, isto é,

$$o(f(n)) = \{g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R} \mid \forall c \exists n_c,\ |g(n)| \leq c|f(n)|, \text{ para todo } n \geq n_c\}$$

Notação $o(f(n))$

Dizemos que $g(n)$ *é assintoticamente muito menor que* $f(n)$ se para todo $c > 0$ existe $n_c \in \mathbb{N}$ tal que

$$|g(n)| \leq c|f(n)|, \text{ para todo } n \geq n_c.$$

O conjunto $o(1)$

O conjunto das funções *assintoticamente muito menores do que* $f(n)$ é denotado por $o(f(n))$, isto é,

$$o(f(n)) = \{g \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R} \mid \forall c \exists n_c,\ |g(n)| \leq c|f(n)|, \text{ para todo } n \geq n_c\}$$

Teorema 30

Se

$$g(n) = o(f(n)), \text{ e}$$
$$f(n) = 0 \implies g(n) = 0, \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

então

$$g(n) = o(1)f(n).$$

Teorema 31

Se $g(n) = o(1)f(n)$ então $g(n) = o(f(n))$ e, além disso, $f(n) = 0 \implies g(n) = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Notação $o(1)$ e $o(f(n))$

Notação para *"muito menor"* e *"aproximadamente"*:

Notação $o(1)$ e $o(f(n))$

Notação para *"muito menor"* e *"aproximadamente"*:

$$g(n) \ll f(n) \quad = \quad g(n) = o(f(n)),$$

Notação $o(1)$ e $o(f(n))$

Notação para *"muito menor"* e *"aproximadamente"*:

$$
\begin{aligned}
g(n) \ll f(n) &\quad = \quad g(n) = o(f(n)), \\
g(n) \approx f(n) &\quad = \quad g(n) = (1 + o(1))f(n).
\end{aligned}
$$

Notação $o(1)$ e $o(f(n))$

Notação para *"muito menor"* e *"aproximadamente"*:

$$
\begin{aligned}
g(n) \ll f(n) &\quad = \quad g(n) = o(f(n)), \\
g(n) \approx f(n) &\quad = \quad g(n) = (1 + o(1))f(n).
\end{aligned}
$$

Teorema 32

Se $f(n) = \mathcal{O}(1)$ e $g(n) = o(1)$, então $f(n)g(n) = o(1)$, isto é,

$$\mathcal{O}(1)o(1) = o(1).$$

Notação $o(1)$ e $o(f(n))$

Notação para *"muito menor"* e *"aproximadamente"*:

$$
\begin{aligned}
g(n) \ll f(n) &\quad = \quad g(n) = o(f(n)), \\
g(n) \approx f(n) &\quad = \quad g(n) = (1 + o(1))f(n).
\end{aligned}
$$

Teorema 32

Se $f(n) = \mathcal{O}(1)$ e $g(n) = o(1)$, então $f(n)g(n) = o(1)$, isto é,

$$\mathcal{O}(1)o(1) = o(1).$$

Prova

Exercício 36.

Exemplo 54

Dos Exemplos 39 e 22 temos, respectivamente,

$$S^{+}(n) = \Omega(n), \text{ e}$$
$$B^{+}(n) = \mathcal{O}(\log n)$$

Exemplo 54

Dos Exemplos 39 e 22 temos, respectivamente,

$$S^{+}(n) = \Omega(n), \text{ e}$$
$$B^{+}(n) = \mathcal{O}(\log n)$$

Consequentemente,

Exemplo 54

Dos Exemplos 39 e 22 temos, respectivamente,

$$\begin{aligned} S^+(n) &= \Omega(n), \text{ e} \\ B^+(n) &= \mathcal{O}(\log n) \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\frac{B^+(n)}{S^+(n)} = \frac{\mathcal{O}(\log n)}{\Omega(n)}$$

Exemplo 54

Dos Exemplos 39 e 22 temos, respectivamente,

$$
\begin{aligned}
S^+(n) &= \Omega(n), \text{ e} \\
B^+(n) &= \mathcal{O}(\log n)
\end{aligned}
$$

Consequentemente,

$$
\frac{B^+(n)}{S^+(n)} = \frac{\mathcal{O}(\log n)}{\Omega(n)} \overset{\text{T.10, T.17}}{=} \frac{\mathcal{O}(1)\log n}{\Omega(1)n}
$$

Exemplo 54

Dos Exemplos 39 e 22 temos, respectivamente,

$$\begin{aligned} S^{+}(n) &= \Omega(n), \text{ e} \\ B^{+}(n) &= \mathcal{O}(\log n) \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\frac{B^{+}(n)}{S^{+}(n)} = \frac{\mathcal{O}(\log n)}{\Omega(n)} \overset{\text{T.10, T.17}}{=} \frac{\mathcal{O}(1)\log n}{\Omega(1)n} = \frac{\mathcal{O}(1)}{\Omega(1)}\frac{\log n}{n}$$

Exemplo 54

Dos Exemplos 39 e 22 temos, respectivamente,

$$S^+(n) = \Omega(n), \text{ e}$$
$$B^+(n) = \mathcal{O}(\log n)$$

Consequentemente,

$$\frac{B^+(n)}{S^+(n)} = \frac{\mathcal{O}(\log n)}{\Omega(n)} \overset{\text{T.10, T.17}}{=} \frac{\mathcal{O}(1)\log n}{\Omega(1)n} = \frac{\mathcal{O}(1)}{\Omega(1)}\frac{\log n}{n} \overset{\text{Ex.37}}{=} \mathcal{O}(1)o(1)$$

Exemplo 54

Dos Exemplos 39 e 22 temos, respectivamente,

$$S^+(n) = \Omega(n), \text{ e}$$
$$B^+(n) = \mathcal{O}(\log n)$$

Consequentemente,

$$\frac{B^+(n)}{S^+(n)} = \frac{\mathcal{O}(\log n)}{\Omega(n)} \overset{\text{T.10, T.17}}{=} \frac{\mathcal{O}(1)\log n}{\Omega(1)n} = \frac{\mathcal{O}(1)}{\Omega(1)}\frac{\log n}{n} \overset{\text{Ex.37}}{=} \mathcal{O}(1)o(1) \overset{\text{T.32}}{=} o(1),$$

Exemplo 54

Dos Exemplos 39 e 22 temos, respectivamente,

$$S^+(n) = \Omega(n), \text{ e}$$
$$B^+(n) = \mathcal{O}(\log n)$$

Consequentemente,

$$\frac{B^+(n)}{S^+(n)} = \frac{\mathcal{O}(\log n)}{\Omega(n)} \overset{\text{T.10, T.17}}{=} \frac{\mathcal{O}(1)\log n}{\Omega(1)n} = \frac{\mathcal{O}(1)}{\Omega(1)}\frac{\log n}{n} \overset{\text{Ex.37}}{=} \mathcal{O}(1)o(1) \overset{\text{T.32}}{=} o(1),$$

Portanto,

Exemplo 54

Dos Exemplos 39 e 22 temos, respectivamente,

$$S^+(n) = \Omega(n), \text{ e}$$
$$B^+(n) = \mathcal{O}(\log n)$$

Consequentemente,

$$\frac{B^+(n)}{S^+(n)} = \frac{\mathcal{O}(\log n)}{\Omega(n)} \overset{\text{T.10, T.17}}{=} \frac{\mathcal{O}(1)\log n}{\Omega(1)n} = \frac{\mathcal{O}(1)}{\Omega(1)}\frac{\log n}{n} \overset{\text{Ex.37}}{=} \mathcal{O}(1)o(1) \overset{\text{T.32}}{=} o(1),$$

Portanto,

$$B^+(n) = o(S^+(n)),$$

Exemplo 54

Dos Exemplos 39 e 22 temos, respectivamente,

$$\begin{aligned} S^+(n) &= \Omega(n), \text{ e} \\ B^+(n) &= \mathcal{O}(\log n) \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\frac{B^+(n)}{S^+(n)} = \frac{\mathcal{O}(\log n)}{\Omega(n)} \overset{\text{T.10, T.17}}{=} \frac{\mathcal{O}(1)\log n}{\Omega(1)n} = \frac{\mathcal{O}(1)}{\Omega(1)}\frac{\log n}{n} \overset{\text{Ex.37}}{=} \mathcal{O}(1)o(1) \overset{\text{T.32}}{=} o(1),$$

Portanto,

$$B^+(n) = o(S^+(n)),$$

Ou seja,

Exemplo 54

Dos Exemplos 39 e 22 temos, respectivamente,

$$S^+(n) = \Omega(n), \text{ e}$$
$$B^+(n) = \mathcal{O}(\log n)$$

Consequentemente,

$$\frac{B^+(n)}{S^+(n)} = \frac{\mathcal{O}(\log n)}{\Omega(n)} \overset{\text{T.10, T.17}}{=} \frac{\mathcal{O}(1)\log n}{\Omega(1)n} = \frac{\mathcal{O}(1)}{\Omega(1)}\frac{\log n}{n} \overset{\text{Ex.37}}{=} \mathcal{O}(1)o(1) \overset{\text{T.32}}{=} o(1),$$

Portanto,

$$B^+(n) = o(S^+(n)),$$

Ou seja,

$$B^+(n) \ll S^+(n).$$

Notação $o(1)$ e $o(f(n))$

Exemplo 55: Coeficiente binomial

Do Exemplo 17 temos

$$\binom{n}{2} = \frac{n^2}{2} + \mathcal{O}(n) = \frac{n^2}{2}\left(1 + \frac{\mathcal{O}(n)}{n^2/2}\right) \overset{\text{T.10}}{=} \frac{n^2}{2}\left(1 + \frac{\mathcal{O}(1)n}{n^2/2}\right)$$

$$= \frac{n^2}{2}\left(1 + \frac{\mathcal{O}(1)}{1/2}\,\frac{n}{n^2}\right) = \frac{n^2}{2}\left(1 + \mathcal{O}(1)o(1)\right)$$

$$\overset{\text{T.32}}{=} \frac{n^2}{2}\left(1 + o(1)\right),$$

Notação $o(1)$ e $o(f(n))$

Exemplo 55: Coeficiente binomial

Do Exemplo 17 temos

$$\binom{n}{2} = \frac{n^2}{2} + \mathcal{O}(n) = \frac{n^2}{2}\left(1 + \frac{\mathcal{O}(n)}{n^2/2}\right) \overset{\text{T.10}}{=} \frac{n^2}{2}\left(1 + \frac{\mathcal{O}(1)n}{n^2/2}\right)$$
$$= \frac{n^2}{2}\left(1 + \frac{\mathcal{O}(1)}{1/2}\frac{n}{n^2}\right) = \frac{n^2}{2}\left(1 + \mathcal{O}(1)o(1)\right)$$

$$\overset{\text{T.32}}{=} \frac{n^2}{2}\left(1 + o(1)\right),$$

Ou seja,

Notação $o(1)$ e $o(f(n))$

Exemplo 55: Coeficiente binomial

Do Exemplo 17 temos

$$\binom{n}{2} = \frac{n^2}{2} + \mathcal{O}(n) = \frac{n^2}{2}\left(1 + \frac{\mathcal{O}(n)}{n^2/2}\right) \overset{\text{T.10}}{=} \frac{n^2}{2}\left(1 + \frac{\mathcal{O}(1)n}{n^2/2}\right)$$

$$= \frac{n^2}{2}\left(1 + \frac{\mathcal{O}(1)}{1/2}\frac{n}{n^2}\right) = \frac{n^2}{2}\left(1 + \mathcal{O}(1)o(1)\right)$$

$$\overset{\text{T.32}}{=} \frac{n^2}{2}\left(1 + o(1)\right),$$

Ou seja,

$$\binom{n}{2} \approx \frac{n^2}{2}.$$

Notação $o(1)$ e $o(f(n))$

Exemplo 55: Coeficiente binomial

Do Exemplo 17 temos

$$\binom{n}{2} = \frac{n^2}{2} + \mathcal{O}(n) = \frac{n^2}{2}\left(1 + \frac{\mathcal{O}(n)}{n^2/2}\right) \overset{\text{T.10}}{=} \frac{n^2}{2}\left(1 + \frac{\mathcal{O}(1)n}{n^2/2}\right)$$

$$= \frac{n^2}{2}\left(1 + \frac{\mathcal{O}(1)}{1/2}\frac{n}{n^2}\right) = \frac{n^2}{2}\left(1 + \mathcal{O}(1)o(1)\right)$$

$$\overset{\text{T.32}}{=} \frac{n^2}{2}\left(1 + o(1)\right),$$

Ou seja,

$$\binom{n}{2} \approx \frac{n^2}{2}.$$

Exemplo 56: Stirling

Do Exemplo 3 temos

$$s(n) = \sqrt{2\pi}\left(1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{288n^2} - \frac{139}{51840n^3} - \frac{571}{2488320n^4} + \dots\right)$$

Notação $o(1)$ e $o(f(n))$

Exemplo 55: Coeficiente binomial

Do Exemplo 17 temos

$$\binom{n}{2} = \frac{n^2}{2} + \mathcal{O}(n) = \frac{n^2}{2}\left(1 + \frac{\mathcal{O}(n)}{n^2/2}\right) \stackrel{\text{T.10}}{=} \frac{n^2}{2}\left(1 + \frac{\mathcal{O}(1)n}{n^2/2}\right)$$

$$= \frac{n^2}{2}\left(1 + \frac{\mathcal{O}(1)}{1/2}\frac{n}{n^2}\right) = \frac{n^2}{2}\left(1 + \mathcal{O}(1)o(1)\right)$$

$$\stackrel{\text{T.32}}{=} \frac{n^2}{2}\left(1 + o(1)\right),$$

Ou seja,

$$\binom{n}{2} \approx \frac{n^2}{2}.$$

Exemplo 56: Stirling

Do Exemplo 3 temos

$$s(n) = \sqrt{2\pi}\left(1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{288n^2} - \frac{139}{51840n^3} - \frac{571}{2488320n^4} + \dots\right) = (1 + o(1))\sqrt{2\pi},$$

Exemplo 55: Coeficiente binomial

Do Exemplo 17 temos

$$\binom{n}{2} = \frac{n^2}{2} + \mathcal{O}(n) = \frac{n^2}{2}\left(1 + \frac{\mathcal{O}(n)}{n^2/2}\right) \overset{\text{T.10}}{=} \frac{n^2}{2}\left(1 + \frac{\mathcal{O}(1)n}{n^2/2}\right)$$

$$= \frac{n^2}{2}\left(1 + \frac{\mathcal{O}(1)}{1/2}\frac{n}{n^2}\right) = \frac{n^2}{2}\left(1 + \mathcal{O}(1)o(1)\right)$$

$$\overset{\text{T.32}}{=} \frac{n^2}{2}\left(1 + o(1)\right),$$

Ou seja,

$$\binom{n}{2} \approx \frac{n^2}{2}.$$

Exemplo 56: Stirling

Do Exemplo 3 temos

$$s(n) = \sqrt{2\pi}\left(1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{288n^2} - \frac{139}{51840n^3} - \frac{571}{2488320n^4} + \ldots\right) = (1 + o(1))\sqrt{2\pi},$$

Ou seja,

Notação $o(1)$ e $o(f(n))$

Exemplo 55: Coeficiente binomial

Do Exemplo 17 temos

$$\binom{n}{2} = \frac{n^2}{2} + \mathcal{O}(n) = \frac{n^2}{2}\left(1 + \frac{\mathcal{O}(n)}{n^2/2}\right) \overset{\text{T.10}}{=} \frac{n^2}{2}\left(1 + \frac{\mathcal{O}(1)n}{n^2/2}\right)$$
$$= \frac{n^2}{2}\left(1 + \frac{\mathcal{O}(1)}{1/2}\frac{n}{n^2}\right) = \frac{n^2}{2}\left(1 + \mathcal{O}(1)o(1)\right)$$

$$\overset{\text{T.32}}{=} \frac{n^2}{2}\left(1 + o(1)\right),$$

Ou seja,

$$\binom{n}{2} \approx \frac{n^2}{2}.$$

Exemplo 56: Stirling

Do Exemplo 3 temos

$$s(n) = \sqrt{2\pi}\left(1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{288n^2} - \frac{139}{51840n^3} - \frac{571}{2488320n^4} + \dots\right) = (1 + o(1))\sqrt{2\pi},$$

Ou seja,

$$s(n) \approx \sqrt{2\pi}.$$

Exemplo 57

Dos Exemplos 5 e 56 temos

$$n! = s(n)\left(\frac{n}{e}\right)^{n+1/2} = (1 + o(1))\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^{n},$$

Exemplo 57

Dos Exemplos 5 e 56 temos

$$n! = s(n)\left(\frac{n}{e}\right)^{n+1/2} = (1+o(1))\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^{n},$$

Consequentemente, para todo $b > 1$,

Notação $o(1)$ e $o(f(n))$

Exemplo 57

Dos Exemplos 5 e 56 temos

$$n! = s(n)\left(\frac{n}{e}\right)^{n+1/2} = (1+o(1))\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^{n},$$

Consequentemente, para todo $b > 1$,

$$\begin{aligned}\log_b n! &= n\log_b n - n\log_b e + \frac{1}{2}\log_b n + \log_b(1+o(1))\\ &= n\log_b n - n\log_b e + \frac{1}{2}\log_b n + o(1),\end{aligned}$$

Notação $o(1)$ e $o(f(n))$

Exemplo 57

Dos Exemplos 5 e 56 temos

$$n! = s(n)\left(\frac{n}{e}\right)^{n+1/2} = (1+o(1))\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^{n},$$

Consequentemente, para todo $b > 1$,

$$\begin{aligned}\log_b n! &= n\log_b n - n\log_b e + \frac{1}{2}\log_b n + \log_b(1+o(1))\\ &= n\log_b n - n\log_b e + \frac{1}{2}\log_b n + o(1),\end{aligned}$$

Equivalentemente,

Exemplo 57

Dos Exemplos 5 e 56 temos

$$n! = s(n)\left(\frac{n}{e}\right)^{n+1/2} = (1+o(1))\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^{n},$$

Consequentemente, para todo $b > 1$,

$$\begin{aligned}\log_b n! &= n\log_b n - n\log_b e + \frac{1}{2}\log_b n + \log_b(1+o(1))\\ &= n\log_b n - n\log_b e + \frac{1}{2}\log_b n + o(1),\end{aligned}$$

Equivalentemente,

$$\log_b n! - \left(n\log_b n - n\log_b e + \frac{1}{2}\log_b n\right) = o(1),$$

Exemplo 57 (cont.)

Notação $o(1)$ e $o(f(n))$

Exemplo 57 (cont.)

Ou, menos precisamente,

Exemplo 57 (cont.)

Ou, menos precisamente,

$$\begin{aligned}
\log_b n! &= n\log_b n - n\log_b e + \frac{1}{2}\log_b n + o(1) \\
&= n\log_b n - n\log_b e + \left(1 + \frac{o(1)}{\log_b n}\right)\frac{1}{2}\log_b n \\
&\overset{\text{Ex. ??}}{=} n\log_b n - n\log_b e + (1 + o(1))\frac{1}{2}\log_b n,
\end{aligned}$$

Exemplo 57 (cont.)

Ou, menos precisamente,

$$\begin{aligned}
\log_b n! &= n \log_b n - n \log_b e + \frac{1}{2} \log_b n + o(1) \\
&= n \log_b n - n \log_b e + \left(1 + \frac{o(1)}{\log_b n}\right) \frac{1}{2} \log_b n \\
&\overset{\text{Ex. ??}}{=} n \log_b n - n \log_b e + (1 + o(1)) \frac{1}{2} \log_b n,
\end{aligned}$$

Ou, menos precisamente,

Exemplo 57 (cont.)

Ou, menos precisamente,

$$\begin{aligned}\log_b n! &= n\log_b n - n\log_b e + \frac{1}{2}\log_b n + o(1)\\ &= n\log_b n - n\log_b e + \left(1 + \frac{o(1)}{\log_b n}\right)\frac{1}{2}\log_b n\\ &\overset{\text{Ex. ??}}{=} n\log_b n - n\log_b e + (1+o(1))\frac{1}{2}\log_b n,\end{aligned}$$

Ou, menos precisamente,

$$\begin{aligned}\log_b n! &= n\log_b n - n\log_b e + (1+o(1))\frac{1}{2}\log_b n\\ &= n\log_b n - n\log_b e\left(1 + \frac{1+o(1)}{\frac{1}{2}\log_b n}\right)\\ &\overset{\text{Ex. ??}}{=} n\log_b n - (1+o(1))n\log_b e,\end{aligned}$$

Exemplo 57 (cont.)

Ou, menos precisamente,

Exemplo 57 (cont.)

Ou, menos precisamente,

$$\begin{aligned}
\log_b n! &= n\log_b n - (1 + o(1))n\log_b e \\
&= n\log_b n \left(1 - \frac{(1 + o(1))n\log_b e}{n\log_b n}\right) \\
&= n\log_b n \left(1 - \frac{(1 + o(1))\log_b e}{\log_b n}\right) \\
&= (1 + o(1))n\log_b n,
\end{aligned}$$

Notação $o(1)$ e $o(f(n))$

Exemplo 57 (cont.)

Ou, menos precisamente,

$$\begin{aligned}
\log_b n! &= n\log_b n - (1 + o(1))n\log_b e \\
&= n\log_b n\left(1 - \frac{(1 + o(1))n\log_b e}{n\log_b n}\right) \\
&= n\log_b n\left(1 - \frac{(1 + o(1))\log_b e}{\log_b n}\right) \\
&= (1 + o(1))n\log_b n,
\end{aligned}$$

Ou seja,

Exemplo 57 (cont.)

Ou, menos precisamente,

$$\begin{aligned}\log_b n! &= n\log_b n - (1+o(1))n\log_b e\\ &= n\log_b n\left(1-\frac{(1+o(1))n\log_b e}{n\log_b n}\right)\\ &= n\log_b n\left(1-\frac{(1+o(1))\log_b e}{\log_b n}\right)\\ &= (1+o(1))n\log_b n,\end{aligned}$$

Ou seja,

$$\log_b n! \approx n\log_b n, \text{ para todo } b>1.$$

Notação $o(1)$ e $o(f(n))$

Exemplo58: Soma Harmônica

Do Exemplo 7 temos

$$H(n) = \ln n + \mathcal{O}(1)$$

Exemplo58: Soma Harmônica

Do Exemplo 7 temos

$$H(n) = \ln n + \mathcal{O}(1) = \left(1 + \frac{\mathcal{O}(1)}{\ln n}\right) \ln n$$

Exemplo58: Soma Harmônica

Do Exemplo 7 temos

$$H(n) = \ln n + \mathcal{O}(1) = \left(1 + \frac{\mathcal{O}(1)}{\ln n}\right) \ln n \overset{\text{Ex.??}}{=} (1 + o(1)) \ln n,$$

Notação $o(1)$ e $o(f(n))$

Exemplo58: Soma Harmônica

Do Exemplo 7 temos

$$H(n) = \ln n + \mathcal{O}(1) = \left(1 + \frac{\mathcal{O}(1)}{\ln n}\right) \ln n \overset{\text{Ex.??}}{=} (1 + o(1)) \ln n,$$

Ou seja,

Notação $o(1)$ e $o(f(n))$

Exemplo58: Soma Harmônica

Do Exemplo 7 temos

$$H(n) = \ln n + \mathcal{O}(1) = \left(1 + \frac{\mathcal{O}(1)}{\ln n}\right) \ln n \stackrel{\text{Ex.??}}{=} (1 + o(1)) \ln n,$$

Ou seja,

$$H(n) \approx \ln n.$$

Notação $o(1)$ e $o(f(n))$

Exemplo 59: Série de Taylor

Do Exemplo 8 temos, para todo $x \in \mathbb{R}$ e todo $n \in \mathbb{N}$,

$$e^x = \sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i!} + \mathcal{O}(1)\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

Exemplo 59: Série de Taylor

Do Exemplo 8 temos, para todo $x \in \mathbb{R}$ e todo $n \in \mathbb{N}$,

$$e^x = \sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i!} + \mathcal{O}(1)\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = \sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i!} + \mathcal{O}(1)o(1)$$

Notação $o(1)$ e $o(f(n))$

Exemplo 59: Série de Taylor

Do Exemplo 8 temos, para todo $x \in \mathbb{R}$ e todo $n \in \mathbb{N}$,

$$e^x = \sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i!} + \mathcal{O}(1)\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = \sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i!} + \mathcal{O}(1)o(1) \overset{\text{Ex.??}}{=} \sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i!} + o(1),$$

Exemplo 59: Série de Taylor

Do Exemplo 8 temos, para todo $x \in \mathbb{R}$ e todo $n \in \mathbb{N}$,

$$e^x = \sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i!} + \mathcal{O}(1)\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = \sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i!} + \mathcal{O}(1)o(1) \stackrel{\text{Ex.??}}{=} \sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i!} + o(1),$$

Ou seja,

Exemplo 59: Série de Taylor

Do Exemplo 8 temos, para todo $x \in \mathbb{R}$ e todo $n \in \mathbb{N}$,

$$e^x = \sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i!} + \mathcal{O}(1)\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = \sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i!} + \mathcal{O}(1)o(1) \overset{\text{Ex.??}}{=} \sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i!} + o(1),$$

Ou seja,

$$e^x - \sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i!} = o(1), \text{ para todo } x \in \mathbb{R},$$

Exemplo 59: Série de Taylor

Do Exemplo 8 temos, para todo $x \in \mathbb{R}$ e todo $n \in \mathbb{N}$,

$$e^x = \sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i!} + \mathcal{O}(1)\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = \sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i!} + \mathcal{O}(1)o(1) \stackrel{\text{Ex.??}}{=} \sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i!} + o(1),$$

Ou seja,

$$e^x - \sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i!} = o(1), \text{ para todo } x \in \mathbb{R},$$

Ou, menos precisamente,

Exemplo 59: Série de Taylor

Do Exemplo 8 temos, para todo $x \in \mathbb{R}$ e todo $n \in \mathbb{N}$,

$$e^x = \sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i!} + \mathcal{O}(1)\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = \sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i!} + \mathcal{O}(1)o(1) \overset{\text{Ex.??}}{=} \sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i!} + o(1),$$

Ou seja,

$$e^x - \sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i!} = o(1), \text{ para todo } x \in \mathbb{R},$$

Ou, menos precisamente,

$$e^x \approx \sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i!}, \text{ para todo } x \in \mathbb{R},$$