Análise de Algoritmos
Aula 08

Prof. Murilo V. G. da Silva

DINF/UFPR

(material da disciplina: André Guedes, Renato Carmo, Murilo da Silva)

Vamos provar que

1. $\mathcal{O}(1) \ll (\log_b n)^a \qquad \forall a > 0, \forall b > 1$

Vamos provar que

1. $\mathcal{O}(1) \ll (\log_b n)^a \qquad \forall a > 0, \forall b > 1$
2. $\mathcal{O}((\log n)^a) \ll n^b \qquad \forall a \in \mathbb{R}, \forall b > 0$

Notação Assintótica: Famílias Notáveis

Vamos provar que

1. $\mathcal{O}(1) \ll (\log_b n)^a \qquad \forall a > 0, \forall b > 1$
2. $\mathcal{O}((\log n)^a) \ll n^b \qquad \forall a \in \mathbb{R}, \forall b > 0$
3. $\mathcal{O}(n^b) \ll n^c \qquad$ se e somente se $b < c$

Notação Assintótica: Famílias Notáveis

Vamos provar que

1. $\mathcal{O}(1) \ll (\log_b n)^a \qquad \forall a > 0, \forall b > 1$
2. $\mathcal{O}((\log n)^a) \ll n^b \qquad \forall a \in \mathbb{R}, \forall b > 0$
3. $\mathcal{O}(n^b) \ll n^c \qquad$ se e somente se $b < c$
4. $\mathcal{O}(n^c) \ll d^n \qquad \forall c \in \mathbb{R}, \forall d > 1$

Notação Assintótica: Famílias Notáveis

Vamos provar que

1. $\mathcal{O}(1) \ll (\log_b n)^a \qquad \forall a > 0, \forall b > 1$
2. $\mathcal{O}((\log n)^a) \ll n^b \qquad \forall a \in \mathbb{R}, \forall b > 0$
3. $\mathcal{O}(n^b) \ll n^c$ se e somente se $b < c$
4. $\mathcal{O}(n^c) \ll d^n \qquad \forall c \in \mathbb{R}, \forall d > 1$
5. $\mathcal{O}(d^n) \ll \alpha^n$ se e somente se $d < \alpha$

Vamos provar que

1. $\mathcal{O}(1) \ll (\log_b n)^a \qquad \forall a > 0, \forall b > 1$
2. $\mathcal{O}((\log n)^a) \ll n^b \qquad \forall a \in \mathbb{R}, \forall b > 0$
3. $\mathcal{O}(n^b) \ll n^c$ se e somente se $b < c$
4. $\mathcal{O}(n^c) \ll d^n \qquad \forall c \in \mathbb{R}, \forall d > 1$
5. $\mathcal{O}(d^n) \ll \alpha^n$ se e somente se $d < \alpha$
6. $\mathcal{O}(\alpha^n) \ll n! \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R}$

Notação Assintótica: Famílias Notáveis

Vamos provar que

1. $\mathcal{O}(1) \ll (\log_b n)^a \qquad \forall a > 0, \forall b > 1$
2. $\mathcal{O}((\log n)^a) \ll n^b \qquad \forall a \in \mathbb{R}, \forall b > 0$
3. $\mathcal{O}(n^b) \ll n^c$ se e somente se $b < c$
4. $\mathcal{O}(n^c) \ll d^n \qquad \forall c \in \mathbb{R}, \forall d > 1$
5. $\mathcal{O}(d^n) \ll \alpha^n$ se e somente se $d < \alpha$
6. $\mathcal{O}(\alpha^n) \ll n! \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R}$
7. $\mathcal{O}(n!) \ll n^n$

Notação Assintótica: Famílias Notáveis

Teorema 35

Se $f(n) = \mathcal{O}(1)$, então $f(n) = o((\log_b n)^\alpha)$ para todo $b > 1$ e todo $\alpha > 0$, isto é,

$$\mathcal{O}(1) = o((\log_b n)^\alpha), \text{ para todo } \alpha > 0, b > 1,$$

ou, equivalentemente,

$$\mathcal{O}(1) \ll (\log_b n)^\alpha, \qquad \forall \alpha > 0, b > 1.$$

Notação Assintótica: Famílias Notáveis

Teorema 35

Se $f(n) = \mathcal{O}(1)$, então $f(n) = o((\log_b n)^\alpha)$ para todo $b > 1$ e todo $\alpha > 0$, isto é,

$$\mathcal{O}(1) = o((\log_b n)^\alpha), \text{ para todo } \alpha > 0, b > 1,$$

ou, equivalentemente,

$$\mathcal{O}(1) \ll (\log_b n)^\alpha, \qquad \forall \alpha > 0, b > 1.$$

Prova:

Teorema 35

Se $f(n) = \mathcal{O}(1)$, então $f(n) = o((\log_b n)^\alpha)$ para todo $b > 1$ e todo $\alpha > 0$, isto é,

$$\mathcal{O}(1) = o((\log_b n)^\alpha), \text{ para todo } \alpha > 0, b > 1,$$

ou, equivalentemente,

$$\mathcal{O}(1) \ll (\log_b n)^\alpha, \qquad \forall \alpha > 0, b > 1.$$

Prova:

Sejam $\alpha > 0$ e $b > 1$. Então,

$$\frac{\mathcal{O}(1)}{(\log_b n)^\alpha}$$

Notação Assintótica: Famílias Notáveis

Teorema 35

Se $f(n) = \mathcal{O}(1)$, então $f(n) = o((\log_b n)^\alpha)$ para todo $b > 1$ e todo $\alpha > 0$, isto é,

$$\mathcal{O}(1) = o((\log_b n)^\alpha), \text{ para todo } \alpha > 0, b > 1,$$

ou, equivalentemente,

$$\mathcal{O}(1) \ll (\log_b n)^\alpha, \qquad \forall \alpha > 0, b > 1.$$

Prova:

Sejam $\alpha > 0$ e $b > 1$. Então,

$$\frac{\mathcal{O}(1)}{(\log_b n)^\alpha} = \mathcal{O}(1) \frac{1}{(\log_b n)^\alpha}$$

Notação Assintótica: Famílias Notáveis

Teorema 35

Se $f(n) = \mathcal{O}(1)$, então $f(n) = o((\log_b n)^\alpha)$ para todo $b > 1$ e todo $\alpha > 0$, isto é,

$$\mathcal{O}(1) = o((\log_b n)^\alpha), \text{ para todo } \alpha > 0, b > 1,$$

ou, equivalentemente,

$$\mathcal{O}(1) \ll (\log_b n)^\alpha, \qquad \forall \alpha > 0, b > 1.$$

Prova:

Sejam $\alpha > 0$ e $b > 1$. Então,

$$\frac{\mathcal{O}(1)}{(\log_b n)^\alpha} = \mathcal{O}(1)\frac{1}{(\log_b n)^\alpha} = \mathcal{O}(1)o(1)$$

Teorema 35

Se $f(n) = \mathcal{O}(1)$, então $f(n) = o((\log_b n)^\alpha)$ para todo $b > 1$ e todo $\alpha > 0$, isto é,

$$\mathcal{O}(1) = o((\log_b n)^\alpha), \text{ para todo } \alpha > 0, b > 1,$$

ou, equivalentemente,

$$\mathcal{O}(1) \ll (\log_b n)^\alpha, \qquad \forall \alpha > 0, b > 1.$$

Prova:

Sejam $\alpha > 0$ e $b > 1$. Então,

$$\frac{\mathcal{O}(1)}{(\log_b n)^\alpha} = \mathcal{O}(1)\frac{1}{(\log_b n)^\alpha} = \mathcal{O}(1)o(1) \overset{\text{T.32}}{=} o(1),$$

Notação Assintótica: Famílias Notáveis

Teorema 35

Se $f(n) = \mathcal{O}(1)$, então $f(n) = o((\log_b n)^\alpha)$ para todo $b > 1$ e todo $\alpha > 0$, isto é,

$$\mathcal{O}(1) = o((\log_b n)^\alpha), \text{ para todo } \alpha > 0, b > 1,$$

ou, equivalentemente,

$$\mathcal{O}(1) \ll (\log_b n)^\alpha, \qquad \forall \alpha > 0, b > 1.$$

Prova:

Sejam $\alpha > 0$ e $b > 1$. Então,

$$\frac{\mathcal{O}(1)}{(\log_b n)^\alpha} = \mathcal{O}(1)\frac{1}{(\log_b n)^\alpha} = \mathcal{O}(1)o(1) \overset{\text{T.32}}{=} o(1),$$

Ou seja,

Notação Assintótica: Famílias Notáveis

Teorema 35

Se $f(n) = \mathcal{O}(1)$, então $f(n) = o((\log_b n)^\alpha)$ para todo $b > 1$ e todo $\alpha > 0$, isto é,

$$\mathcal{O}(1) = o((\log_b n)^\alpha), \text{ para todo } \alpha > 0, b > 1,$$

ou, equivalentemente,

$$\mathcal{O}(1) \ll (\log_b n)^\alpha, \qquad \forall \alpha > 0, b > 1.$$

Prova:

Sejam $\alpha > 0$ e $b > 1$. Então,

$$\frac{\mathcal{O}(1)}{(\log_b n)^\alpha} = \mathcal{O}(1)\frac{1}{(\log_b n)^\alpha} = \mathcal{O}(1)o(1) \overset{\text{T.32}}{=} o(1),$$

Ou seja,

$$\mathcal{O}(1) = o((\log_b n)^\alpha).$$

Notação Assintótica: Famílias Notáveis

Lema auxiliar nas próximas provas:

Lema auxiliar nas próximas provas:

Lema 36

Para todo $n > 1$,

$$\log n = n^{\frac{\log \log n}{\log n}}.$$

Notação Assintótica: Famílias Notáveis

Lema auxiliar nas próximas provas:

Lema 36

Para todo $n > 1$,

$$\log n = n^{\frac{\log \log n}{\log n}}.$$

Prova:

Lema auxiliar nas próximas provas:

Lema 36

Para todo $n > 1$,

$$\log n = n^{\frac{\log \log n}{\log n}}.$$

Prova:

Seja $n > 1$.

Notação Assintótica: Famílias Notáveis

Lema auxiliar nas próximas provas:

Lema 36

Para todo $n > 1$,

$$\log n = n^{\frac{\log \log n}{\log n}}.$$

Prova:

Seja $n > 1$.

$$\log n^{\frac{\log \log n}{\log n}} =$$

Notação Assintótica: Famílias Notáveis

Lema auxiliar nas próximas provas:

Lema 36

Para todo $n > 1$,

$$\log n = n^{\frac{\log \log n}{\log n}}.$$

Prova:

Seja $n > 1$.

$$\log n^{\frac{\log \log n}{\log n}} = \frac{\log \log n}{\log n} \log n,$$

Lema auxiliar nas próximas provas:

Lema 36

Para todo $n > 1$,

$$\log n = n^{\frac{\log \log n}{\log n}}.$$

Prova:

Seja $n > 1$.

$$\log n^{\frac{\log \log n}{\log n}} = \frac{\log \log n}{\log n} \log n,$$

Com isso

$$\log n^{\frac{\log \log n}{\log n}} = \log \log n,$$

Notação Assintótica: Famílias Notáveis

Lema auxiliar nas próximas provas:

Lema 36

Para todo $n > 1$,
$$\log n = n^{\frac{\log \log n}{\log n}}.$$

Prova:

Seja $n > 1$.
$$\log n^{\frac{\log \log n}{\log n}} = \frac{\log \log n}{\log n} \log n,$$

Com isso
$$\log n^{\frac{\log \log n}{\log n}} = \log \log n,$$

Portanto,

Notação Assintótica: Famílias Notáveis

Lema auxiliar nas próximas provas:

Lema 36

Para todo $n > 1$,

$$\log n = n^{\frac{\log \log n}{\log n}}.$$

Prova:

Seja $n > 1$.

$$\log n^{\frac{\log \log n}{\log n}} = \frac{\log \log n}{\log n} \log n,$$

Com isso

$$\log n^{\frac{\log \log n}{\log n}} = \log \log n,$$

Portanto,

$$\log n = n^{\frac{\log \log n}{\log n}}.$$

Notação Assintótica: Famílias Notáveis

Teorema 37

Se $f(n) = \mathcal{O}((\log n)^\alpha)$, então $f(n) = o(n^\beta)$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ e todo $\beta > 0$, isto é,

$$\mathcal{O}((\log n)^\alpha) = o(n^\beta), \text{ para todo } \alpha \in \mathbb{R}, \beta > 0,$$

ou, equivalentemente,

$$\mathcal{O}((\log n)^\alpha) \ll n^\beta, \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall \beta > 0.$$

Notação Assintótica: Famílias Notáveis

Teorema 37

Se $f(n) = \mathcal{O}((\log n)^\alpha)$, então $f(n) = o(n^\beta)$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ e todo $\beta > 0$, isto é,

$$\mathcal{O}((\log n)^\alpha) = o(n^\beta), \text{ para todo } \alpha \in \mathbb{R}, \beta > 0,$$

ou, equivalentemente,

$$\mathcal{O}((\log n)^\alpha) \ll n^\beta, \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall \beta > 0.$$

Prova:

Notação Assintótica: Famílias Notáveis

Teorema 37

Se $f(n) = \mathcal{O}((\log n)^\alpha)$, então $f(n) = o(n^\beta)$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ e todo $\beta > 0$, isto é,

$$\mathcal{O}((\log n)^\alpha) = o(n^\beta), \text{ para todo } \alpha \in \mathbb{R}, \beta > 0,$$

ou, equivalentemente,

$$\mathcal{O}((\log n)^\alpha) \ll n^\beta, \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall \beta > 0.$$

Prova:

Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\beta > 0$. Então, para todo $n > 1$,

Notação Assintótica: Famílias Notáveis

Teorema 37

Se $f(n) = \mathcal{O}((\log n)^\alpha)$, então $f(n) = o(n^\beta)$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ e todo $\beta > 0$, isto é,

$$\mathcal{O}((\log n)^\alpha) = o(n^\beta), \text{ para todo } \alpha \in \mathbb{R}, \beta > 0,$$

ou, equivalentemente,

$$\mathcal{O}((\log n)^\alpha) \ll n^\beta, \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall \beta > 0.$$

Prova:

Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\beta > 0$. Então, para todo $n > 1$,

$$\frac{(\log n)^\alpha}{n^\beta}$$

Teorema 37

Se $f(n) = \mathcal{O}((\log n)^\alpha)$, então $f(n) = o(n^\beta)$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ e todo $\beta > 0$, isto é,

$$\mathcal{O}((\log n)^\alpha) = o(n^\beta), \text{ para todo } \alpha \in \mathbb{R}, \beta > 0,$$

ou, equivalentemente,

$$\mathcal{O}((\log n)^\alpha) \ll n^\beta, \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall \beta > 0.$$

Prova:

Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\beta > 0$. Então, para todo $n > 1$,

$$\frac{(\log n)^\alpha}{n^\beta} \stackrel{\text{L.36}}{=} \frac{\left(n^{\frac{\log \log n}{\log n}}\right)^\alpha}{n^\beta}$$

Teorema 37

Se $f(n) = \mathcal{O}((\log n)^\alpha)$, então $f(n) = o(n^\beta)$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ e todo $\beta > 0$, isto é,

$$\mathcal{O}((\log n)^\alpha) = o(n^\beta), \text{ para todo } \alpha \in \mathbb{R}, \beta > 0,$$

ou, equivalentemente,

$$\mathcal{O}((\log n)^\alpha) \ll n^\beta, \qquad \forall\alpha \in \mathbb{R}, \forall\beta > 0.$$

Prova:

Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\beta > 0$. Então, para todo $n > 1$,

$$\frac{(\log n)^\alpha}{n^\beta} \overset{\text{L.36}}{=} \frac{\left(n^{\frac{\log \log n}{\log n}}\right)^\alpha}{n^\beta} = n^{\alpha \frac{\log \log n}{\log n} - \beta}$$

Notação Assintótica: Famílias Notáveis

Teorema 37

Se $f(n) = \mathcal{O}((\log n)^{\alpha})$, então $f(n) = o(n^{\beta})$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ e todo $\beta > 0$, isto é,

$$\mathcal{O}((\log n)^{\alpha}) = o(n^{\beta}), \text{ para todo } \alpha \in \mathbb{R}, \beta > 0,$$

ou, equivalentemente,

$$\mathcal{O}((\log n)^{\alpha}) \ll n^{\beta}, \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall \beta > 0.$$

Prova:

Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\beta > 0$. Então, para todo $n > 1$,

$$\frac{(\log n)^{\alpha}}{n^{\beta}} \overset{\text{L.36}}{=} \frac{\left(n^{\frac{\log \log n}{\log n}}\right)^{\alpha}}{n^{\beta}} = n^{\alpha \frac{\log \log n}{\log n} - \beta} = n^{o(1) - \beta}$$

Teorema 37

Se $f(n) = \mathcal{O}((\log n)^\alpha)$, então $f(n) = o(n^\beta)$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ e todo $\beta > 0$, isto é,

$$\mathcal{O}((\log n)^\alpha) = o(n^\beta), \text{ para todo } \alpha \in \mathbb{R}, \beta > 0,$$

ou, equivalentemente,

$$\mathcal{O}((\log n)^\alpha) \ll n^\beta, \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall \beta > 0.$$

Prova:

Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\beta > 0$. Então, para todo $n > 1$,

$$\frac{(\log n)^\alpha}{n^\beta} \overset{\text{L.36}}{=} \frac{\left(n^{\frac{\log \log n}{\log n}}\right)^\alpha}{n^\beta} = n^{\alpha \frac{\log \log n}{\log n} - \beta} = n^{o(1) - \beta} = \frac{1}{n^{\beta + o(1)}}$$

Teorema 37

Se $f(n) = \mathcal{O}((\log n)^\alpha)$, então $f(n) = o(n^\beta)$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ e todo $\beta > 0$, isto é,

$$\mathcal{O}((\log n)^\alpha) = o(n^\beta),\ \text{para todo } \alpha \in \mathbb{R}, \beta > 0,$$

ou, equivalentemente,

$$\mathcal{O}((\log n)^\alpha) \ll n^\beta, \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall \beta > 0.$$

Prova:

Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\beta > 0$. Então, para todo $n > 1$,

$$\frac{(\log n)^\alpha}{n^\beta} \overset{\text{L.36}}{=} \frac{\left(n^{\frac{\log \log n}{\log n}}\right)^\alpha}{n^\beta} = n^{\alpha \frac{\log\log n}{\log n} - \beta} = n^{o(1) - \beta} = \frac{1}{n^{\beta + o(1)}} = o(1),$$

Teorema 37

Se $f(n) = \mathcal{O}((\log n)^\alpha)$, então $f(n) = o(n^\beta)$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ e todo $\beta > 0$, isto é,

$$\mathcal{O}((\log n)^\alpha) = o(n^\beta), \text{ para todo } \alpha \in \mathbb{R}, \beta > 0,$$

ou, equivalentemente,

$$\mathcal{O}((\log n)^\alpha) \ll n^\beta, \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall \beta > 0.$$

Prova:

Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\beta > 0$. Então, para todo $n > 1$,

$$\frac{(\log n)^\alpha}{n^\beta} \overset{\text{L.36}}{=} \frac{\left(n^{\frac{\log\log n}{\log n}}\right)^\alpha}{n^\beta} = n^{\alpha\frac{\log\log n}{\log n} - \beta} = n^{o(1)-\beta} = \frac{1}{n^{\beta+o(1)}} = o(1),$$

Ou seja,

Teorema 37

Se $f(n) = \mathcal{O}((\log n)^\alpha)$, então $f(n) = o(n^\beta)$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ e todo $\beta > 0$, isto é,

$$\mathcal{O}((\log n)^\alpha) = o(n^\beta), \text{ para todo } \alpha \in \mathbb{R}, \beta > 0,$$

ou, equivalentemente,

$$\mathcal{O}((\log n)^\alpha) \ll n^\beta, \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall \beta > 0.$$

Prova:

Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\beta > 0$. Então, para todo $n > 1$,

$$\frac{(\log n)^\alpha}{n^\beta} \overset{\text{L.36}}{=} \frac{\left(n^{\frac{\log \log n}{\log n}}\right)^\alpha}{n^\beta} = n^{\alpha \frac{\log \log n}{\log n} - \beta} = n^{o(1) - \beta} = \frac{1}{n^{\beta + o(1)}} = o(1),$$

Ou seja,

$$(\log n)^\alpha = o(1) n^\beta$$

Teorema 37

Se $f(n) = \mathcal{O}((\log n)^\alpha)$, então $f(n) = o(n^\beta)$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ e todo $\beta > 0$, isto é,

$$\mathcal{O}((\log n)^\alpha) = o(n^\beta), \text{ para todo } \alpha \in \mathbb{R}, \beta > 0,$$

ou, equivalentemente,

$$\mathcal{O}((\log n)^\alpha) \ll n^\beta, \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall \beta > 0.$$

Prova:

Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\beta > 0$. Então, para todo $n > 1$,

$$\frac{(\log n)^\alpha}{n^\beta} \overset{\text{L.36}}{=} \frac{\left(n^{\frac{\log\log n}{\log n}}\right)^\alpha}{n^\beta} = n^{\alpha\frac{\log\log n}{\log n} - \beta} = n^{o(1)-\beta} = \frac{1}{n^{\beta+o(1)}} = o(1),$$

Ou seja,

$$(\log n)^\alpha = o(1)n^\beta$$

Portanto,

Teorema 37

Se $f(n) = \mathcal{O}((\log n)^\alpha)$, então $f(n) = o(n^\beta)$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ e todo $\beta > 0$, isto é,

$$\mathcal{O}((\log n)^\alpha) = o(n^\beta), \text{ para todo } \alpha \in \mathbb{R}, \beta > 0,$$

ou, equivalentemente,

$$\mathcal{O}((\log n)^\alpha) \ll n^\beta, \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall \beta > 0.$$

Prova:

Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\beta > 0$. Então, para todo $n > 1$,

$$\frac{(\log n)^\alpha}{n^\beta} \overset{L.36}{=} \frac{\left(n^{\frac{\log \log n}{\log n}}\right)^\alpha}{n^\beta} = n^{\alpha \frac{\log \log n}{\log n} - \beta} = n^{o(1) - \beta} = \frac{1}{n^{\beta + o(1)}} = o(1),$$

Ou seja,

$$(\log n)^\alpha = o(1) n^\beta$$

Portanto,

$$\mathcal{O}(\log n)^\alpha$$

Notação Assintótica: Famílias Notáveis

Teorema 37

Se $f(n) = \mathcal{O}((\log n)^\alpha)$, então $f(n) = o(n^\beta)$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ e todo $\beta > 0$, isto é,

$$\mathcal{O}((\log n)^\alpha) = o(n^\beta), \text{ para todo } \alpha \in \mathbb{R}, \beta > 0,$$

ou, equivalentemente,

$$\mathcal{O}((\log n)^\alpha) \ll n^\beta, \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall \beta > 0.$$

Prova:

Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\beta > 0$. Então, para todo $n > 1$,

$$\frac{(\log n)^\alpha}{n^\beta} \overset{\text{L.36}}{=} \frac{\left(n^{\frac{\log \log n}{\log n}}\right)^\alpha}{n^\beta} = n^{\alpha \frac{\log \log n}{\log n} - \beta} = n^{o(1) - \beta} = \frac{1}{n^{\beta + o(1)}} = o(1),$$

Ou seja,

$$(\log n)^\alpha = o(1) n^\beta$$

Portanto,

$$\mathcal{O}(\log n)^\alpha \overset{\text{T.17}}{=} \mathcal{O}(1)(\log n)^\alpha$$

Teorema 37

Se $f(n) = \mathcal{O}((\log n)^\alpha)$, então $f(n) = o(n^\beta)$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ e todo $\beta > 0$, isto é,

$$\mathcal{O}((\log n)^\alpha) = o(n^\beta), \text{ para todo } \alpha \in \mathbb{R}, \beta > 0,$$

ou, equivalentemente,

$$\mathcal{O}((\log n)^\alpha) \ll n^\beta, \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall \beta > 0.$$

Prova:

Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\beta > 0$. Então, para todo $n > 1$,

$$\frac{(\log n)^\alpha}{n^\beta} \overset{L.36}{=} \frac{\left(n^{\frac{\log \log n}{\log n}}\right)^\alpha}{n^\beta} = n^{\alpha \frac{\log \log n}{\log n} - \beta} = n^{o(1) - \beta} = \frac{1}{n^{\beta + o(1)}} = o(1),$$

Ou seja,

$$(\log n)^\alpha = o(1) n^\beta$$

Portanto,

$$\mathcal{O}(\log n)^\alpha \overset{T.17}{=} \mathcal{O}(1)(\log n)^\alpha = \mathcal{O}(1)o(1)n^\beta$$

Notação Assintótica: Famílias Notáveis

Teorema 37

Se $f(n) = \mathcal{O}((\log n)^\alpha)$, então $f(n) = o(n^\beta)$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ e todo $\beta > 0$, isto é,

$$\mathcal{O}((\log n)^\alpha) = o(n^\beta), \text{ para todo } \alpha \in \mathbb{R}, \beta > 0,$$

ou, equivalentemente,

$$\mathcal{O}((\log n)^\alpha) \ll n^\beta, \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall \beta > 0.$$

Prova:

Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\beta > 0$. Então, para todo $n > 1$,

$$\frac{(\log n)^\alpha}{n^\beta} \overset{\text{L.36}}{=} \frac{\left(n^{\frac{\log \log n}{\log n}}\right)^\alpha}{n^\beta} = n^{\alpha \frac{\log \log n}{\log n} - \beta} = n^{o(1) - \beta} = \frac{1}{n^{\beta + o(1)}} = o(1),$$

Ou seja,

$$(\log n)^\alpha = o(1) n^\beta$$

Portanto,

$$\mathcal{O}(\log n)^\alpha \overset{\text{T.17}}{=} \mathcal{O}(1)(\log n)^\alpha = \mathcal{O}(1)o(1)n^\beta \overset{\text{T.32}}{=} o(1)n^\beta$$

Notação Assintótica: Famílias Notáveis

Teorema 37

Se $f(n) = \mathcal{O}((\log n)^\alpha)$, então $f(n) = o(n^\beta)$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ e todo $\beta > 0$, isto é,

$$\mathcal{O}((\log n)^\alpha) = o(n^\beta), \text{ para todo } \alpha \in \mathbb{R}, \beta > 0,$$

ou, equivalentemente,

$$\mathcal{O}((\log n)^\alpha) \ll n^\beta, \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall \beta > 0.$$

Prova:

Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\beta > 0$. Então, para todo $n > 1$,

$$\frac{(\log n)^\alpha}{n^\beta} \stackrel{\text{L.36}}{=} \frac{\left(n^{\frac{\log \log n}{\log n}}\right)^\alpha}{n^\beta} = n^{\alpha \frac{\log \log n}{\log n} - \beta} = n^{o(1) - \beta} = \frac{1}{n^{\beta + o(1)}} = o(1),$$

Ou seja,

$$(\log n)^\alpha = o(1) n^\beta$$

Portanto,

$$\mathcal{O}(\log n)^\alpha \stackrel{\text{T.17}}{=} \mathcal{O}(1)(\log n)^\alpha = \mathcal{O}(1) o(1) n^\beta \stackrel{\text{T.32}}{=} o(1) n^\beta \stackrel{\text{T.30}}{=} o(n^\beta).$$

Teorema 38

Seja $f(n) = \mathcal{O}(n^{\alpha})$. Então $f(n) = o(n^{\beta})$ se e somente se $\alpha < \beta$, isto é,

$$\mathcal{O}(n^{\alpha}) = o(n^{\beta}), \text{ se e somente se } \alpha < \beta,$$

ou, equivalentemente, $\mathcal{O}(n^{\alpha}) \ll n^{\beta}$, se e somente se $\alpha < \beta$.

Prova:

Teorema 38

Seja $f(n) = \mathcal{O}(n^\alpha)$. Então $f(n) = o(n^\beta)$ se e somente se $\alpha < \beta$, isto é,

$$\mathcal{O}(n^\alpha) = o(n^\beta), \text{ se e somente se } \alpha < \beta,$$

ou, equivalentemente, $\mathcal{O}(n^\alpha) \ll n^\beta$, se e somente se $\alpha < \beta$.

Prova:

Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Teorema 38

Seja $f(n) = \mathcal{O}(n^\alpha)$. Então $f(n) = o(n^\beta)$ se e somente se $\alpha < \beta$, isto é,

$$\mathcal{O}(n^\alpha) = o(n^\beta), \text{ se e somente se } \alpha < \beta,$$

ou, equivalentemente, $\mathcal{O}(n^\alpha) \ll n^\beta$, se e somente se $\alpha < \beta$.

Prova:

Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

$$\frac{n^\alpha}{n^\beta}$$

Teorema 38

Seja $f(n) = \mathcal{O}(n^\alpha)$. Então $f(n) = o(n^\beta)$ se e somente se $\alpha < \beta$, isto é,

$$\mathcal{O}(n^\alpha) = o(n^\beta), \text{ se e somente se } \alpha < \beta,$$

ou, equivalentemente, $\mathcal{O}(n^\alpha) \ll n^\beta$, se e somente se $\alpha < \beta$.

Prova:

Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

$$\frac{n^\alpha}{n^\beta} = n^{\alpha-\beta}.$$

Notação Assintótica: Famílias Notáveis

Teorema 38

Seja $f(n) = \mathcal{O}(n^{\alpha})$. Então $f(n) = o(n^{\beta})$ se e somente se $\alpha < \beta$, isto é,

$$\mathcal{O}(n^{\alpha}) = o(n^{\beta}), \text{ se e somente se } \alpha < \beta,$$

ou, equivalentemente, $\mathcal{O}(n^{\alpha}) \ll n^{\beta}$, se e somente se $\alpha < \beta$.

Prova:

Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

$$\frac{n^{\alpha}}{n^{\beta}} = n^{\alpha-\beta}.$$

Como $n^{\alpha-\beta} = o(1)$ se e somente se $\alpha - \beta < 0$, ou seja, se e somente se $\alpha < \beta$, então,

Notação Assintótica: Famílias Notáveis

Teorema 38

Seja $f(n) = \mathcal{O}(n^{\alpha})$. Então $f(n) = o(n^{\beta})$ se e somente se $\alpha < \beta$, isto é,

$$\mathcal{O}(n^{\alpha}) = o(n^{\beta}), \text{ se e somente se } \alpha < \beta,$$

ou, equivalentemente, $\mathcal{O}(n^{\alpha}) \ll n^{\beta}$, se e somente se $\alpha < \beta$.

Prova:

Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

$$\frac{n^{\alpha}}{n^{\beta}} = n^{\alpha-\beta}.$$

Como $n^{\alpha-\beta} = o(1)$ se e somente se $\alpha - \beta < 0$, ou seja, se e somente se $\alpha < \beta$, então,

$$\frac{n^{\alpha}}{n^{\beta}} = o(1), \text{ se e somente se } \alpha < \beta,$$

Teorema 38

Seja $f(n) = \mathcal{O}(n^{\alpha})$. Então $f(n) = o(n^{\beta})$ se e somente se $\alpha < \beta$, isto é,

$$\mathcal{O}(n^{\alpha}) = o(n^{\beta}), \text{ se e somente se } \alpha < \beta,$$

ou, equivalentemente, $\mathcal{O}(n^{\alpha}) \ll n^{\beta}$, se e somente se $\alpha < \beta$.

Prova:

Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

$$\frac{n^{\alpha}}{n^{\beta}} = n^{\alpha-\beta}.$$

Como $n^{\alpha-\beta} = o(1)$ se e somente se $\alpha - \beta < 0$, ou seja, se e somente se $\alpha < \beta$, então,

$$\frac{n^{\alpha}}{n^{\beta}} = o(1), \text{ se e somente se } \alpha < \beta,$$

Consequentemente,

Notação Assintótica: Famílias Notáveis

Teorema 38

Seja $f(n) = \mathcal{O}(n^\alpha)$. Então $f(n) = o(n^\beta)$ se e somente se $\alpha < \beta$, isto é,

$$\mathcal{O}(n^\alpha) = o(n^\beta), \text{ se e somente se } \alpha < \beta,$$

ou, equivalentemente, $\mathcal{O}(n^\alpha) \ll n^\beta$, se e somente se $\alpha < \beta$.

Prova:

Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

$$\frac{n^\alpha}{n^\beta} = n^{\alpha-\beta}.$$

Como $n^{\alpha-\beta} = o(1)$ se e somente se $\alpha - \beta < 0$, ou seja, se e somente se $\alpha < \beta$, então,

$$\frac{n^\alpha}{n^\beta} = o(1), \text{ se e somente se } \alpha < \beta,$$

Consequentemente,

$$\frac{\mathcal{O}(n^\alpha)}{n^\beta}$$

Notação Assintótica: Famílias Notáveis

Teorema 38

Seja $f(n) = \mathcal{O}(n^\alpha)$. Então $f(n) = o(n^\beta)$ se e somente se $\alpha < \beta$, isto é,

$$\mathcal{O}(n^\alpha) = o(n^\beta), \text{ se e somente se } \alpha < \beta,$$

ou, equivalentemente, $\mathcal{O}(n^\alpha) \ll n^\beta$, se e somente se $\alpha < \beta$.

Prova:

Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

$$\frac{n^\alpha}{n^\beta} = n^{\alpha-\beta}.$$

Como $n^{\alpha-\beta} = o(1)$ se e somente se $\alpha - \beta < 0$, ou seja, se e somente se $\alpha < \beta$, então,

$$\frac{n^\alpha}{n^\beta} = o(1), \text{ se e somente se } \alpha < \beta,$$

Consequentemente,

$$\frac{\mathcal{O}(n^\alpha)}{n^\beta} \overset{\text{T.17}}{=} \frac{\mathcal{O}(1)n^\alpha}{n^\beta}$$

Teorema 38

Seja $f(n) = \mathcal{O}(n^{\alpha})$. Então $f(n) = o(n^{\beta})$ se e somente se $\alpha < \beta$, isto é,

$$\mathcal{O}(n^{\alpha}) = o(n^{\beta}), \text{ se e somente se } \alpha < \beta,$$

ou, equivalentemente, $\mathcal{O}(n^{\alpha}) \ll n^{\beta}$, se e somente se $\alpha < \beta$.

Prova:

Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

$$\frac{n^{\alpha}}{n^{\beta}} = n^{\alpha-\beta}.$$

Como $n^{\alpha-\beta} = o(1)$ se e somente se $\alpha - \beta < 0$, ou seja, se e somente se $\alpha < \beta$, então,

$$\frac{n^{\alpha}}{n^{\beta}} = o(1), \text{ se e somente se } \alpha < \beta,$$

Consequentemente,

$$\frac{\mathcal{O}(n^{\alpha})}{n^{\beta}} \overset{\text{T.17}}{=} \frac{\mathcal{O}(1)n^{\alpha}}{n^{\beta}} = \mathcal{O}(1)\frac{n^{\alpha}}{n^{\beta}}$$

Notação Assintótica: Famílias Notáveis

Teorema 38

Seja $f(n) = \mathcal{O}(n^\alpha)$. Então $f(n) = o(n^\beta)$ se e somente se $\alpha < \beta$, isto é,

$$\mathcal{O}(n^\alpha) = o(n^\beta), \text{ se e somente se } \alpha < \beta,$$

ou, equivalentemente, $\mathcal{O}(n^\alpha) \ll n^\beta$, se e somente se $\alpha < \beta$.

Prova:

Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

$$\frac{n^\alpha}{n^\beta} = n^{\alpha-\beta}.$$

Como $n^{\alpha-\beta} = o(1)$ se e somente se $\alpha - \beta < 0$, ou seja, se e somente se $\alpha < \beta$, então,

$$\frac{n^\alpha}{n^\beta} = o(1), \text{ se e somente se } \alpha < \beta,$$

Consequentemente,

$$\frac{\mathcal{O}(n^\alpha)}{n^\beta} \overset{T.17}{=} \frac{\mathcal{O}(1)n^\alpha}{n^\beta} = \mathcal{O}(1)\frac{n^\alpha}{n^\beta} = \mathcal{O}(1)o(1)$$

Teorema 38

Seja $f(n) = \mathcal{O}(n^\alpha)$. Então $f(n) = o(n^\beta)$ se e somente se $\alpha < \beta$, isto é,

$$\mathcal{O}(n^\alpha) = o(n^\beta), \text{ se e somente se } \alpha < \beta,$$

ou, equivalentemente, $\mathcal{O}(n^\alpha) \ll n^\beta$, se e somente se $\alpha < \beta$.

Prova:

Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

$$\frac{n^\alpha}{n^\beta} = n^{\alpha - \beta}.$$

Como $n^{\alpha-\beta} = o(1)$ se e somente se $\alpha - \beta < 0$, ou seja, se e somente se $\alpha < \beta$, então,

$$\frac{n^\alpha}{n^\beta} = o(1), \text{ se e somente se } \alpha < \beta,$$

Consequentemente,

$$\frac{\mathcal{O}(n^\alpha)}{n^\beta} \stackrel{\text{T.17}}{=} \frac{\mathcal{O}(1)n^\alpha}{n^\beta} = \mathcal{O}(1)\frac{n^\alpha}{n^\beta} = \mathcal{O}(1)o(1) \stackrel{\text{T.32}}{=} o(1),$$

Notação Assintótica: Famílias Notáveis

Teorema 38

Seja $f(n) = \mathcal{O}(n^\alpha)$. Então $f(n) = o(n^\beta)$ se e somente se $\alpha < \beta$, isto é,

$$\mathcal{O}(n^\alpha) = o(n^\beta), \text{ se e somente se } \alpha < \beta,$$

ou, equivalentemente, $\mathcal{O}(n^\alpha) \ll n^\beta$, se e somente se $\alpha < \beta$.

Prova:

Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

$$\frac{n^\alpha}{n^\beta} = n^{\alpha-\beta}.$$

Como $n^{\alpha-\beta} = o(1)$ se e somente se $\alpha - \beta < 0$, ou seja, se e somente se $\alpha < \beta$, então,

$$\frac{n^\alpha}{n^\beta} = o(1), \text{ se e somente se } \alpha < \beta,$$

Consequentemente,

$$\frac{\mathcal{O}(n^\alpha)}{n^\beta} \overset{T.17}{=} \frac{\mathcal{O}(1)n^\alpha}{n^\beta} = \mathcal{O}(1)\frac{n^\alpha}{n^\beta} = \mathcal{O}(1)o(1) \overset{T.32}{=} o(1), \text{ se e somente se } \alpha < \beta.$$

Notação Assintótica: Famílias Notáveis

Teorema 39

Se $f(n) = \mathcal{O}(n^\alpha)$, então $f(n) = o(\beta^n)$, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ e todo $\beta > 1$, isto é,

$$\mathcal{O}(n^\alpha) = o(\beta^n), \text{ para todo } \alpha \in \mathbb{R} \text{ e todo } \beta > 1.$$

ou, equivalentemente,

$$\mathcal{O}(n^\alpha) \ll \beta^n, \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R} \text{ e } \forall \beta > 1.$$

Teorema 39

Se $f(n) = \mathcal{O}(n^{\alpha})$, então $f(n) = o(\beta^{n})$, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ e todo $\beta > 1$, isto é,

$$\mathcal{O}(n^{\alpha}) = o(\beta^{n}), \text{ para todo } \alpha \in \mathbb{R} \text{ e todo } \beta > 1.$$

ou, equivalentemente,

$$\mathcal{O}(n^{\alpha}) \ll \beta^{n}, \qquad \forall\alpha \in \mathbb{R} \text{ e } \forall\beta > 1.$$

Prova:

Teorema 39

Se $f(n) = \mathcal{O}(n^\alpha)$, então $f(n) = o(\beta^n)$, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ e todo $\beta > 1$, isto é,

$$\mathcal{O}(n^\alpha) = o(\beta^n), \text{ para todo } \alpha \in \mathbb{R} \text{ e todo } \beta > 1.$$

ou, equivalentemente,

$$\mathcal{O}(n^\alpha) \ll \beta^n, \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R} \text{ e } \forall \beta > 1.$$

Prova:

Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\beta > 1$.

Notação Assintótica: Famílias Notáveis

Teorema 39

Se $f(n) = \mathcal{O}(n^\alpha)$, então $f(n) = o(\beta^n)$, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ e todo $\beta > 1$, isto é,

$$\mathcal{O}(n^\alpha) = o(\beta^n), \text{ para todo } \alpha \in \mathbb{R} \text{ e todo } \beta > 1.$$

ou, equivalentemente,

$$\mathcal{O}(n^\alpha) \ll \beta^n, \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R} \text{ e } \forall \beta > 1.$$

Prova:

Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\beta > 1$. Como n^α

Teorema 39

Se $f(n) = \mathcal{O}(n^\alpha)$, então $f(n) = o(\beta^n)$, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ e todo $\beta > 1$, isto é,

$$\mathcal{O}(n^\alpha) = o(\beta^n), \text{ para todo } \alpha \in \mathbb{R} \text{ e todo } \beta > 1.$$

ou, equivalentemente,

$$\mathcal{O}(n^\alpha) \ll \beta^n, \qquad \forall\alpha \in \mathbb{R} \text{ e } \forall\beta > 1.$$

Prova:

Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\beta > 1$. Como $n^\alpha = \beta^{\log_\beta n^\alpha}$

Notação Assintótica: Famílias Notáveis

Teorema 39

Se $f(n) = \mathcal{O}(n^\alpha)$, então $f(n) = o(\beta^n)$, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ e todo $\beta > 1$, isto é,

$$\mathcal{O}(n^\alpha) = o(\beta^n), \text{ para todo } \alpha \in \mathbb{R} \text{ e todo } \beta > 1.$$

ou, equivalentemente,

$$\mathcal{O}(n^\alpha) \ll \beta^n, \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R} \text{ e } \forall \beta > 1.$$

Prova:

Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\beta > 1$. Como $n^\alpha = \beta^{\log_\beta n^\alpha} = \beta^{\alpha \log_\beta n}$,

Teorema 39

Se $f(n) = \mathcal{O}(n^{\alpha})$, então $f(n) = o(\beta^{n})$, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ e todo $\beta > 1$, isto é,

$$\mathcal{O}(n^{\alpha}) = o(\beta^{n}), \text{ para todo } \alpha \in \mathbb{R} \text{ e todo } \beta > 1.$$

ou, equivalentemente,

$$\mathcal{O}(n^{\alpha}) \ll \beta^{n}, \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R} \text{ e } \forall \beta > 1.$$

Prova:

Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\beta > 1$. Como $n^{\alpha} = \beta^{\log_{\beta} n^{\alpha}} = \beta^{\alpha \log_{\beta} n}$, portanto

Notação Assintótica: Famílias Notáveis

Teorema 39

Se $f(n) = \mathcal{O}(n^\alpha)$, então $f(n) = o(\beta^n)$, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ e todo $\beta > 1$, isto é,

$$\mathcal{O}(n^\alpha) = o(\beta^n), \text{ para todo } \alpha \in \mathbb{R} \text{ e todo } \beta > 1.$$

ou, equivalentemente,

$$\mathcal{O}(n^\alpha) \ll \beta^n, \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R} \text{ e } \forall \beta > 1.$$

Prova:

Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\beta > 1$. Como $n^\alpha = \beta^{\log_\beta n^\alpha} = \beta^{\alpha \log_\beta n}$, portanto

$$\frac{n^\alpha}{\beta^n}$$

Notação Assintótica: Famílias Notáveis

Teorema 39

Se $f(n) = \mathcal{O}(n^\alpha)$, então $f(n) = o(\beta^n)$, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ e todo $\beta > 1$, isto é,

$$\mathcal{O}(n^\alpha) = o(\beta^n), \text{ para todo } \alpha \in \mathbb{R} \text{ e todo } \beta > 1.$$

ou, equivalentemente,

$$\mathcal{O}(n^\alpha) \ll \beta^n, \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R} \text{ e } \forall \beta > 1.$$

Prova:

Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\beta > 1$. Como $n^\alpha = \beta^{\log_\beta n^\alpha} = \beta^{\alpha \log_\beta n}$, portanto

$$\frac{n^\alpha}{\beta^n} = \frac{\beta^{\alpha \log_\beta n}}{\beta^n}$$

Notação Assintótica: Famílias Notáveis

Teorema 39

Se $f(n) = \mathcal{O}(n^\alpha)$, então $f(n) = o(\beta^n)$, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ e todo $\beta > 1$, isto é,

$$\mathcal{O}(n^\alpha) = o(\beta^n), \text{ para todo } \alpha \in \mathbb{R} \text{ e todo } \beta > 1.$$

ou, equivalentemente,

$$\mathcal{O}(n^\alpha) \ll \beta^n, \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R} \text{ e } \forall \beta > 1.$$

Prova:

Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\beta > 1$. Como $n^\alpha = \beta^{\log_\beta n^\alpha} = \beta^{\alpha \log_\beta n}$, portanto

$$\frac{n^\alpha}{\beta^n} = \frac{\beta^{\alpha \log_\beta n}}{\beta^n} = \beta^{\alpha \log_\beta n - n}$$

Teorema 39

Se $f(n) = \mathcal{O}(n^\alpha)$, então $f(n) = o(\beta^n)$, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ e todo $\beta > 1$, isto é,

$$\mathcal{O}(n^\alpha) = o(\beta^n), \text{ para todo } \alpha \in \mathbb{R} \text{ e todo } \beta > 1.$$

ou, equivalentemente,

$$\mathcal{O}(n^\alpha) \ll \beta^n, \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R} \text{ e } \forall \beta > 1.$$

Prova:

Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\beta > 1$. Como $n^\alpha = \beta^{\log_\beta n^\alpha} = \beta^{\alpha \log_\beta n}$, portanto

$$\frac{n^\alpha}{\beta^n} = \frac{\beta^{\alpha \log_\beta n}}{\beta^n} = \beta^{\alpha \log_\beta n - n} \overset{\text{T.37}}{=} \beta^{o(n) - n}$$

Teorema 39

Se $f(n) = \mathcal{O}(n^\alpha)$, então $f(n) = o(\beta^n)$, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ e todo $\beta > 1$, isto é,

$$\mathcal{O}(n^\alpha) = o(\beta^n), \text{ para todo } \alpha \in \mathbb{R} \text{ e todo } \beta > 1.$$

ou, equivalentemente,

$$\mathcal{O}(n^\alpha) \ll \beta^n, \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R} \text{ e } \forall \beta > 1.$$

Prova:

Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\beta > 1$. Como $n^\alpha = \beta^{\log_\beta n^\alpha} = \beta^{\alpha \log_\beta n}$, portanto

$$\frac{n^\alpha}{\beta^n} = \frac{\beta^{\alpha \log_\beta n}}{\beta^n} = \beta^{\alpha \log_\beta n - n} \overset{\text{T.37}}{=} \beta^{o(n) - n} \overset{\text{Ex.41}}{=} o(1),$$

Teorema 39

Se $f(n) = \mathcal{O}(n^\alpha)$, então $f(n) = o(\beta^n)$, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ e todo $\beta > 1$, isto é,

$$\mathcal{O}(n^\alpha) = o(\beta^n), \text{ para todo } \alpha \in \mathbb{R} \text{ e todo } \beta > 1.$$

ou, equivalentemente,

$$\mathcal{O}(n^\alpha) \ll \beta^n, \qquad \forall\alpha \in \mathbb{R} \text{ e } \forall\beta > 1.$$

Prova:

Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\beta > 1$. Como $n^\alpha = \beta^{\log_\beta n^\alpha} = \beta^{\alpha \log_\beta n}$, portanto

$$\frac{n^\alpha}{\beta^n} = \frac{\beta^{\alpha \log_\beta n}}{\beta^n} = \beta^{\alpha \log_\beta n - n} \overset{\text{T.37}}{=} \beta^{o(n) - n} \overset{\text{Ex.41}}{=} o(1),$$

Ou seja, $n^\alpha = o(1)\beta^n$.

Teorema 39

Se $f(n) = \mathcal{O}(n^\alpha)$, então $f(n) = o(\beta^n)$, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ e todo $\beta > 1$, isto é,

$$\mathcal{O}(n^\alpha) = o(\beta^n), \text{ para todo } \alpha \in \mathbb{R} \text{ e todo } \beta > 1.$$

ou, equivalentemente,

$$\mathcal{O}(n^\alpha) \ll \beta^n, \qquad \forall\alpha \in \mathbb{R} \text{ e } \forall\beta > 1.$$

Prova:

Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\beta > 1$. Como $n^\alpha = \beta^{\log_\beta n^\alpha} = \beta^{\alpha \log_\beta n}$, portanto

$$\frac{n^\alpha}{\beta^n} = \frac{\beta^{\alpha \log_\beta n}}{\beta^n} = \beta^{\alpha \log_\beta n - n} \overset{\text{T.37}}{=} \beta^{o(n)-n} \overset{\text{Ex.41}}{=} o(1),$$

Ou seja, $n^\alpha = o(1)\beta^n$.

Consequentemente,

Teorema 39

Se $f(n) = \mathcal{O}(n^\alpha)$, então $f(n) = o(\beta^n)$, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ e todo $\beta > 1$, isto é,

$$\mathcal{O}(n^\alpha) = o(\beta^n), \text{ para todo } \alpha \in \mathbb{R} \text{ e todo } \beta > 1.$$

ou, equivalentemente,

$$\mathcal{O}(n^\alpha) \ll \beta^n, \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R} \text{ e } \forall \beta > 1.$$

Prova:

Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\beta > 1$. Como $n^\alpha = \beta^{\log_\beta n^\alpha} = \beta^{\alpha \log_\beta n}$, portanto

$$\frac{n^\alpha}{\beta^n} = \frac{\beta^{\alpha \log_\beta n}}{\beta^n} = \beta^{\alpha \log_\beta n - n} \overset{\text{T.37}}{=} \beta^{o(n) - n} \overset{\text{Ex.41}}{=} o(1),$$

Ou seja, $n^\alpha = o(1)\beta^n$.

Consequentemente,

$$\mathcal{O}(n^\alpha)$$

Notação Assintótica: Famílias Notáveis

Teorema 39

Se $f(n) = \mathcal{O}(n^\alpha)$, então $f(n) = o(\beta^n)$, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ e todo $\beta > 1$, isto é,

$$\mathcal{O}(n^\alpha) = o(\beta^n), \text{ para todo } \alpha \in \mathbb{R} \text{ e todo } \beta > 1.$$

ou, equivalentemente,

$$\mathcal{O}(n^\alpha) \ll \beta^n, \qquad \forall\alpha \in \mathbb{R} \text{ e } \forall\beta > 1.$$

Prova:

Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\beta > 1$. Como $n^\alpha = \beta^{\log_\beta n^\alpha} = \beta^{\alpha \log_\beta n}$, portanto

$$\frac{n^\alpha}{\beta^n} = \frac{\beta^{\alpha \log_\beta n}}{\beta^n} = \beta^{\alpha \log_\beta n - n} \overset{\text{T.37}}{=} \beta^{o(n) - n} \overset{\text{Ex.41}}{=} o(1),$$

Ou seja, $n^\alpha = o(1)\beta^n$.

Consequentemente,

$$\mathcal{O}(n^\alpha) \overset{\text{T.17}}{=} \mathcal{O}(1)n^\alpha$$

Teorema 39

Se $f(n) = \mathcal{O}(n^\alpha)$, então $f(n) = o(\beta^n)$, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ e todo $\beta > 1$, isto é,

$$\mathcal{O}(n^\alpha) = o(\beta^n), \text{ para todo } \alpha \in \mathbb{R} \text{ e todo } \beta > 1.$$

ou, equivalentemente,

$$\mathcal{O}(n^\alpha) \ll \beta^n, \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R} \text{ e } \forall \beta > 1.$$

Prova:

Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\beta > 1$. Como $n^\alpha = \beta^{\log_\beta n^\alpha} = \beta^{\alpha \log_\beta n}$, portanto

$$\frac{n^\alpha}{\beta^n} = \frac{\beta^{\alpha \log_\beta n}}{\beta^n} = \beta^{\alpha \log_\beta n - n} \overset{\text{T.37}}{=} \beta^{o(n) - n} \overset{\text{Ex.41}}{=} o(1),$$

Ou seja, $n^\alpha = o(1)\beta^n$.

Consequentemente,

$$\mathcal{O}(n^\alpha) \overset{\text{T.17}}{=} \mathcal{O}(1) n^\alpha = \mathcal{O}(1) o(1) \beta^n$$

Notação Assintótica: Famílias Notáveis

Teorema 39

Se $f(n) = \mathcal{O}(n^\alpha)$, então $f(n) = o(\beta^n)$, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ e todo $\beta > 1$, isto é,

$$\mathcal{O}(n^\alpha) = o(\beta^n), \text{ para todo } \alpha \in \mathbb{R} \text{ e todo } \beta > 1.$$

ou, equivalentemente,

$$\mathcal{O}(n^\alpha) \ll \beta^n, \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R} \text{ e } \forall \beta > 1.$$

Prova:

Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\beta > 1$. Como $n^\alpha = \beta^{\log_\beta n^\alpha} = \beta^{\alpha \log_\beta n}$, portanto

$$\frac{n^\alpha}{\beta^n} = \frac{\beta^{\alpha \log_\beta n}}{\beta^n} = \beta^{\alpha \log_\beta n - n} \overset{\text{T.37}}{=} \beta^{o(n) - n} \overset{\text{Ex.41}}{=} o(1),$$

Ou seja, $n^\alpha = o(1)\beta^n$.

Consequentemente,

$$\mathcal{O}(n^\alpha) \overset{\text{T.17}}{=} \mathcal{O}(1)n^\alpha = \mathcal{O}(1)o(1)\beta^n \overset{\text{T.32}}{=} o(1)\beta^n$$

Teorema 39

Se $f(n) = \mathcal{O}(n^\alpha)$, então $f(n) = o(\beta^n)$, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ e todo $\beta > 1$, isto é,

$$\mathcal{O}(n^\alpha) = o(\beta^n), \text{ para todo } \alpha \in \mathbb{R} \text{ e todo } \beta > 1.$$

ou, equivalentemente,

$$\mathcal{O}(n^\alpha) \ll \beta^n, \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R} \text{ e } \forall \beta > 1.$$

Prova:

Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\beta > 1$. Como $n^\alpha = \beta^{\log_\beta n^\alpha} = \beta^{\alpha \log_\beta n}$, portanto

$$\frac{n^\alpha}{\beta^n} = \frac{\beta^{\alpha \log_\beta n}}{\beta^n} = \beta^{\alpha \log_\beta n - n} \overset{\text{T.37}}{=} \beta^{o(n) - n} \overset{\text{Ex.41}}{=} o(1),$$

Ou seja, $n^\alpha = o(1)\beta^n$.

Consequentemente,

$$\mathcal{O}(n^\alpha) \overset{\text{T.17}}{=} \mathcal{O}(1)n^\alpha = \mathcal{O}(1)o(1)\beta^n \overset{\text{T.32}}{=} o(1)\beta^n \overset{\text{T.30}}{=} o(\beta^n).$$

Teorema 40

Seja $f(n) = \mathcal{O}(\alpha^n)$. Então $f(n) = o(\beta^n)$ se e somente se $\alpha < \beta$, isto é,

$$\mathcal{O}(\alpha^n) = o(\beta^n), \text{ se e somente se } \alpha < \beta.$$

ou, equivalentemente, $\mathcal{O}(\alpha^n) \ll \beta^n$, se e somente se $\alpha < \beta$.

Teorema 40

Seja $f(n) = \mathcal{O}(\alpha^n)$. Então $f(n) = o(\beta^n)$ se e somente se $\alpha < \beta$, isto é,

$$\mathcal{O}(\alpha^n) = o(\beta^n), \text{ se e somente se } \alpha < \beta.$$

ou, equivalentemente, $\mathcal{O}(\alpha^n) \ll \beta^n$, se e somente se $\alpha < \beta$.

Prova:

Teorema 40

Seja $f(n) = \mathcal{O}(\alpha^n)$. Então $f(n) = o(\beta^n)$ se e somente se $\alpha < \beta$, isto é,

$$\mathcal{O}(\alpha^n) = o(\beta^n), \text{ se e somente se } \alpha < \beta.$$

ou, equivalentemente, $\mathcal{O}(\alpha^n) \ll \beta^n$, se e somente se $\alpha < \beta$.

Prova:

Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Então

Teorema 40

Seja $f(n) = \mathcal{O}(\alpha^n)$. Então $f(n) = o(\beta^n)$ se e somente se $\alpha < \beta$, isto é,

$$\mathcal{O}(\alpha^n) = o(\beta^n), \text{ se e somente se } \alpha < \beta.$$

ou, equivalentemente, $\mathcal{O}(\alpha^n) \ll \beta^n$, se e somente se $\alpha < \beta$.

Prova:

Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Então

$$\frac{\alpha^n}{\beta^n} = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n$$

Notação Assintótica: Famílias Notáveis

Teorema 40

Seja $f(n) = \mathcal{O}(\alpha^n)$. Então $f(n) = o(\beta^n)$ se e somente se $\alpha < \beta$, isto é,

$$\mathcal{O}(\alpha^n) = o(\beta^n), \text{ se e somente se } \alpha < \beta.$$

ou, equivalentemente, $\mathcal{O}(\alpha^n) \ll \beta^n$, se e somente se $\alpha < \beta$.

Prova:

Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Então

$$\frac{\alpha^n}{\beta^n} = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n$$

$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n = o(1)$ se e somente se $\frac{\alpha}{\beta} < 1$,

Teorema 40

Seja $f(n) = \mathcal{O}(\alpha^n)$. Então $f(n) = o(\beta^n)$ se e somente se $\alpha < \beta$, isto é,

$$\mathcal{O}(\alpha^n) = o(\beta^n), \text{ se e somente se } \alpha < \beta.$$

ou, equivalentemente, $\mathcal{O}(\alpha^n) \ll \beta^n$, se e somente se $\alpha < \beta$.

Prova:

Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Então

$$\frac{\alpha^n}{\beta^n} = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n$$

$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n = o(1)$ se e somente se $\frac{\alpha}{\beta} < 1$, ou seja, se e somente se $\alpha < \beta$,

Teorema 40

Seja $f(n) = \mathcal{O}(\alpha^n)$. Então $f(n) = o(\beta^n)$ se e somente se $\alpha < \beta$, isto é,

$$\mathcal{O}(\alpha^n) = o(\beta^n), \text{ se e somente se } \alpha < \beta.$$

ou, equivalentemente, $\mathcal{O}(\alpha^n) \ll \beta^n$, se e somente se $\alpha < \beta$.

Prova:

Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Então

$$\frac{\alpha^n}{\beta^n} = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n$$

$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n = o(1)$ se e somente se $\frac{\alpha}{\beta} < 1$, ou seja, se e somente se $\alpha < \beta$, isto é,

Teorema 40

Seja $f(n) = \mathcal{O}(\alpha^n)$. Então $f(n) = o(\beta^n)$ se e somente se $\alpha < \beta$, isto é,

$$\mathcal{O}(\alpha^n) = o(\beta^n), \text{ se e somente se } \alpha < \beta.$$

ou, equivalentemente, $\mathcal{O}(\alpha^n) \ll \beta^n$, se e somente se $\alpha < \beta$.

Prova:

Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Então

$$\frac{\alpha^n}{\beta^n} = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n$$

$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n = o(1)$ se e somente se $\frac{\alpha}{\beta} < 1$, ou seja, se e somente se $\alpha < \beta$, isto é,

$$\frac{\alpha^n}{\beta^n} = o(1), \text{ se e somente se } \alpha < \beta,$$

Notação Assintótica: Famílias Notáveis

Teorema 40

Seja $f(n) = \mathcal{O}(\alpha^n)$. Então $f(n) = o(\beta^n)$ se e somente se $\alpha < \beta$, isto é,

$$\mathcal{O}(\alpha^n) = o(\beta^n), \text{ se e somente se } \alpha < \beta.$$

ou, equivalentemente, $\mathcal{O}(\alpha^n) \ll \beta^n$, se e somente se $\alpha < \beta$.

Prova:

Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Então

$$\frac{\alpha^n}{\beta^n} = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n$$

$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n = o(1)$ se e somente se $\frac{\alpha}{\beta} < 1$, ou seja, se e somente se $\alpha < \beta$, isto é,

$$\frac{\alpha^n}{\beta^n} = o(1), \text{ se e somente se } \alpha < \beta,$$

Ou seja, $\alpha^n = o(1)\beta^n$, se e somente se $\alpha < \beta$.

Notação Assintótica: Famílias Notáveis

Teorema 40

Seja $f(n) = \mathcal{O}(\alpha^n)$. Então $f(n) = o(\beta^n)$ se e somente se $\alpha < \beta$, isto é,

$$\mathcal{O}(\alpha^n) = o(\beta^n), \text{ se e somente se } \alpha < \beta.$$

ou, equivalentemente, $\mathcal{O}(\alpha^n) \ll \beta^n$, se e somente se $\alpha < \beta$.

Prova:

Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Então

$$\frac{\alpha^n}{\beta^n} = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n$$

$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n = o(1)$ se e somente se $\frac{\alpha}{\beta} < 1$, ou seja, se e somente se $\alpha < \beta$, isto é,

$$\frac{\alpha^n}{\beta^n} = o(1), \text{ se e somente se } \alpha < \beta,$$

Ou seja, $\alpha^n = o(1)\beta^n$, se e somente se $\alpha < \beta$.

Portanto,

Notação Assintótica: Famílias Notáveis

Teorema 40

Seja $f(n) = \mathcal{O}(\alpha^n)$. Então $f(n) = o(\beta^n)$ se e somente se $\alpha < \beta$, isto é,

$$\mathcal{O}(\alpha^n) = o(\beta^n), \text{ se e somente se } \alpha < \beta.$$

ou, equivalentemente, $\mathcal{O}(\alpha^n) \ll \beta^n$, se e somente se $\alpha < \beta$.

Prova:

Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Então

$$\frac{\alpha^n}{\beta^n} = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n$$

$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n = o(1)$ se e somente se $\frac{\alpha}{\beta} < 1$, ou seja, se e somente se $\alpha < \beta$, isto é,

$$\frac{\alpha^n}{\beta^n} = o(1), \text{ se e somente se } \alpha < \beta,$$

Ou seja, $\alpha^n = o(1)\beta^n$, se e somente se $\alpha < \beta$.

Portanto,

$$\mathcal{O}(\alpha^n) \overset{\text{T.17}}{=} \mathcal{O}(1)\alpha^n \overset{\alpha \leq \beta}{=} \mathcal{O}(1)o(1)\beta^n \overset{\text{T.32}}{=} o(1)\beta^n$$

$$\overset{\text{T.32}}{=} o(\beta^n), \text{ se e somente se } \alpha < \beta.$$

Notação Assintótica: Famílias Notáveis

Teorema 41

Seja $\alpha \in \mathbb{R}$. Se $f(n) = \mathcal{O}(\alpha^n)$, então $f(n) = o(n!)$, isto é,

$$\mathcal{O}(\alpha^n) = o(n!), \text{ para todo } \alpha \in \mathbb{R},$$

ou equivalentemente,

$$\mathcal{O}(\alpha^n) \ll n!, \text{ para todo } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Teorema 41

Seja $\alpha \in \mathbb{R}$. Se $f(n) = \mathcal{O}(\alpha^n)$, então $f(n) = o(n!)$, isto é,

$$\mathcal{O}(\alpha^n) = o(n!), \text{ para todo } \alpha \in \mathbb{R},$$

ou equivalentemente,

$$\mathcal{O}(\alpha^n) \ll n!, \text{ para todo } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Prova:

Teorema 41

Seja $\alpha \in \mathbb{R}$. Se $f(n) = \mathcal{O}(\alpha^n)$, então $f(n) = o(n!)$, isto é,

$$\mathcal{O}(\alpha^n) = o(n!), \text{ para todo } \alpha \in \mathbb{R},$$

ou equivalentemente,

$$\mathcal{O}(\alpha^n) \ll n!, \text{ para todo } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Prova:

Seja $\alpha \in \mathbb{R}$ e seja $a = \lceil \alpha \rceil$.

Notação Assintótica: Famílias Notáveis

Teorema 41

Seja $\alpha \in \mathbb{R}$. Se $f(n) = \mathcal{O}(\alpha^n)$, então $f(n) = o(n!)$, isto é,

$$\mathcal{O}(\alpha^n) = o(n!), \text{ para todo } \alpha \in \mathbb{R},$$

ou equivalentemente,

$$\mathcal{O}(\alpha^n) \ll n!, \text{ para todo } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Prova:

Seja $\alpha \in \mathbb{R}$ e seja $a = \lceil \alpha \rceil$. Então

Notação Assintótica: Famílias Notáveis

Teorema 41

Seja $\alpha \in \mathbb{R}$. Se $f(n) = \mathcal{O}(\alpha^n)$, então $f(n) = o(n!)$, isto é,

$$\mathcal{O}(\alpha^n) = o(n!), \text{ para todo } \alpha \in \mathbb{R},$$

ou equivalentemente,

$$\mathcal{O}(\alpha^n) \ll n!, \text{ para todo } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Prova:

Seja $\alpha \in \mathbb{R}$ e seja $a = \lceil \alpha \rceil$. Então

$$\frac{\alpha^n}{n!}$$

Teorema 41

Seja $\alpha \in \mathbb{R}$. Se $f(n) = \mathcal{O}(\alpha^n)$, então $f(n) = o(n!)$, isto é,

$$\mathcal{O}(\alpha^n) = o(n!), \text{ para todo } \alpha \in \mathbb{R},$$

ou equivalentemente,

$$\mathcal{O}(\alpha^n) \ll n!, \text{ para todo } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Prova:

Seja $\alpha \in \mathbb{R}$ e seja $a = \lceil \alpha \rceil$. Então

$$\frac{\alpha^n}{n!} = \frac{\prod_{i=1}^{a} \alpha}{\prod_{i=1}^{a} i} \times \frac{\prod_{i=a+1}^{n} \alpha}{\prod_{i=a+1}^{n} i}$$

Notação Assintótica: Famílias Notáveis

Teorema 41

Seja $\alpha \in \mathbb{R}$. Se $f(n) = \mathcal{O}(\alpha^n)$, então $f(n) = o(n!)$, isto é,

$$\mathcal{O}(\alpha^n) = o(n!), \text{ para todo } \alpha \in \mathbb{R},$$

ou equivalentemente,

$$\mathcal{O}(\alpha^n) \ll n!, \text{ para todo } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Prova:

Seja $\alpha \in \mathbb{R}$ e seja $a = \lceil \alpha \rceil$. Então

$$\frac{\alpha^n}{n!} = \frac{\prod_{i=1}^{a} \alpha}{\prod_{i=1}^{a} i} \times \frac{\prod_{i=a+1}^{n} \alpha}{\prod_{i=a+1}^{n} i} = \frac{\alpha^a}{a!} \prod_{i=a+1}^{n} \frac{\alpha}{i}$$

Teorema 41

Seja $\alpha \in \mathbb{R}$. Se $f(n) = \mathcal{O}(\alpha^n)$, então $f(n) = o(n!)$, isto é,

$$\mathcal{O}(\alpha^n) = o(n!), \text{ para todo } \alpha \in \mathbb{R},$$

ou equivalentemente,

$$\mathcal{O}(\alpha^n) \ll n!, \text{ para todo } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Prova:

Seja $\alpha \in \mathbb{R}$ e seja $a = \lceil \alpha \rceil$. Então

$$\frac{\alpha^n}{n!} = \frac{\prod_{i=1}^{a} \alpha}{\prod_{i=1}^{a} i} \times \frac{\prod_{i=a+1}^{n} \alpha}{\prod_{i=a+1}^{n} i} = \frac{\alpha^a}{a!} \prod_{i=a+1}^{n} \frac{\alpha}{i} = \mathcal{O}(1)o(1)$$

Notação Assintótica: Famílias Notáveis

Teorema 41

Seja $\alpha \in \mathbb{R}$. Se $f(n) = \mathcal{O}(\alpha^n)$, então $f(n) = o(n!)$, isto é,

$$\mathcal{O}(\alpha^n) = o(n!), \text{ para todo } \alpha \in \mathbb{R},$$

ou equivalentemente,

$$\mathcal{O}(\alpha^n) \ll n!, \text{ para todo } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Prova:

Seja $\alpha \in \mathbb{R}$ e seja $a = \lceil \alpha \rceil$. Então

$$\frac{\alpha^n}{n!} = \frac{\prod_{i=1}^{a} \alpha}{\prod_{i=1}^{a} i} \times \frac{\prod_{i=a+1}^{n} \alpha}{\prod_{i=a+1}^{n} i} = \frac{\alpha^a}{a!} \prod_{i=a+1}^{n} \frac{\alpha}{i} = \mathcal{O}(1)o(1) \stackrel{\text{T.32}}{=} o(1),$$

Notação Assintótica: Famílias Notáveis

Teorema 41

Seja $\alpha \in \mathbb{R}$. Se $f(n) = \mathcal{O}(\alpha^n)$, então $f(n) = o(n!)$, isto é,

$$\mathcal{O}(\alpha^n) = o(n!), \text{ para todo } \alpha \in \mathbb{R},$$

ou equivalentemente,

$$\mathcal{O}(\alpha^n) \ll n!, \text{ para todo } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Prova:

Seja $\alpha \in \mathbb{R}$ e seja $a = \lceil \alpha \rceil$. Então

$$\frac{\alpha^n}{n!} = \frac{\prod_{i=1}^{a} \alpha}{\prod_{i=1}^{a} i} \times \frac{\prod_{i=a+1}^{n} \alpha}{\prod_{i=a+1}^{n} i} = \frac{\alpha^a}{a!} \prod_{i=a+1}^{n} \frac{\alpha}{i} = \mathcal{O}(1) o(1) \overset{\text{T.32}}{=} o(1),$$

Ou seja,

Notação Assintótica: Famílias Notáveis

Teorema 41

Seja $\alpha \in \mathbb{R}$. Se $f(n) = \mathcal{O}(\alpha^n)$, então $f(n) = o(n!)$, isto é,

$$\mathcal{O}(\alpha^n) = o(n!), \text{ para todo } \alpha \in \mathbb{R},$$

ou equivalentemente,

$$\mathcal{O}(\alpha^n) \ll n!, \text{ para todo } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Prova:

Seja $\alpha \in \mathbb{R}$ e seja $a = \lceil \alpha \rceil$. Então

$$\frac{\alpha^n}{n!} = \frac{\prod_{i=1}^{a} \alpha}{\prod_{i=1}^{a} i} \times \frac{\prod_{i=a+1}^{n} \alpha}{\prod_{i=a+1}^{n} i} = \frac{\alpha^a}{a!} \prod_{i=a+1}^{n} \frac{\alpha}{i} = \mathcal{O}(1)o(1) \overset{\text{T.32}}{=} o(1),$$

Ou seja,

$$\alpha^n = o(1)n! = o(n!),$$

Teorema 41

Seja $\alpha \in \mathbb{R}$. Se $f(n) = \mathcal{O}(\alpha^n)$, então $f(n) = o(n!)$, isto é,

$$\mathcal{O}(\alpha^n) = o(n!), \text{ para todo } \alpha \in \mathbb{R},$$

ou equivalentemente,

$$\mathcal{O}(\alpha^n) \ll n!, \text{ para todo } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Prova:

Seja $\alpha \in \mathbb{R}$ e seja $a = \lceil \alpha \rceil$. Então

$$\frac{\alpha^n}{n!} = \frac{\prod_{i=1}^{a} \alpha}{\prod_{i=1}^{a} i} \times \frac{\prod_{i=a+1}^{n} \alpha}{\prod_{i=a+1}^{n} i} = \frac{\alpha^a}{a!} \prod_{i=a+1}^{n} \frac{\alpha}{i} = \mathcal{O}(1)o(1) \overset{\text{T.32}}{=} o(1),$$

Ou seja,

$$\alpha^n = o(1)n! = o(n!),$$

Com isso

Notação Assintótica: Famílias Notáveis

Teorema 41

Seja $\alpha \in \mathbb{R}$. Se $f(n) = \mathcal{O}(\alpha^n)$, então $f(n) = o(n!)$, isto é,

$$\mathcal{O}(\alpha^n) = o(n!), \text{ para todo } \alpha \in \mathbb{R},$$

ou equivalentemente,

$$\mathcal{O}(\alpha^n) \ll n!, \text{ para todo } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Prova:

Seja $\alpha \in \mathbb{R}$ e seja $a = \lceil \alpha \rceil$. Então

$$\frac{\alpha^n}{n!} = \frac{\prod_{i=1}^{a} \alpha}{\prod_{i=1}^{a} i} \times \frac{\prod_{i=a+1}^{n} \alpha}{\prod_{i=a+1}^{n} i} = \frac{\alpha^a}{a!} \prod_{i=a+1}^{n} \frac{\alpha}{i} = \mathcal{O}(1)o(1) \overset{\text{T.32}}{=} o(1),$$

Ou seja,

$$\alpha^n = o(1)n! = o(n!),$$

Com isso

$$\mathcal{O}(\alpha^n)$$

Teorema 41

Seja $\alpha \in \mathbb{R}$. Se $f(n) = \mathcal{O}(\alpha^n)$, então $f(n) = o(n!)$, isto é,

$$\mathcal{O}(\alpha^n) = o(n!), \text{ para todo } \alpha \in \mathbb{R},$$

ou equivalentemente,

$$\mathcal{O}(\alpha^n) \ll n!, \text{ para todo } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Prova:

Seja $\alpha \in \mathbb{R}$ e seja $a = \lceil \alpha \rceil$. Então

$$\frac{\alpha^n}{n!} = \frac{\prod_{i=1}^{a} \alpha}{\prod_{i=1}^{a} i} \times \frac{\prod_{i=a+1}^{n} \alpha}{\prod_{i=a+1}^{n} i} = \frac{\alpha^a}{a!} \prod_{i=a+1}^{n} \frac{\alpha}{i} = \mathcal{O}(1)o(1) \overset{\text{T.32}}{=} o(1),$$

Ou seja,

$$\alpha^n = o(1)n! = o(n!),$$

Com isso

$$\mathcal{O}(\alpha^n) \overset{\text{T.17}}{=} \mathcal{O}(1)\alpha^n$$

Teorema 41

Seja $\alpha \in \mathbb{R}$. Se $f(n) = \mathcal{O}(\alpha^n)$, então $f(n) = o(n!)$, isto é,

$$\mathcal{O}(\alpha^n) = o(n!), \text{ para todo } \alpha \in \mathbb{R},$$

ou equivalentemente,

$$\mathcal{O}(\alpha^n) \ll n!, \text{ para todo } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Prova:

Seja $\alpha \in \mathbb{R}$ e seja $a = \lceil \alpha \rceil$. Então

$$\frac{\alpha^n}{n!} = \frac{\prod_{i=1}^{a} \alpha}{\prod_{i=1}^{a} i} \times \frac{\prod_{i=a+1}^{n} \alpha}{\prod_{i=a+1}^{n} i} = \frac{\alpha^a}{a!} \prod_{i=a+1}^{n} \frac{\alpha}{i} = \mathcal{O}(1)o(1) \overset{\text{T.32}}{=} o(1),$$

Ou seja,

$$\alpha^n = o(1)n! = o(n!),$$

Com isso

$$\mathcal{O}(\alpha^n) \overset{\text{T.17}}{=} \mathcal{O}(1)\alpha^n = \mathcal{O}(1)o(1)n!$$

Notação Assintótica: Famílias Notáveis

Teorema 41

Seja $\alpha \in \mathbb{R}$. Se $f(n) = \mathcal{O}(\alpha^n)$, então $f(n) = o(n!)$, isto é,

$$\mathcal{O}(\alpha^n) = o(n!), \text{ para todo } \alpha \in \mathbb{R},$$

ou equivalentemente,

$$\mathcal{O}(\alpha^n) \ll n!, \text{ para todo } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Prova:

Seja $\alpha \in \mathbb{R}$ e seja $a = \lceil \alpha \rceil$. Então

$$\frac{\alpha^n}{n!} = \frac{\prod_{i=1}^{a} \alpha}{\prod_{i=1}^{a} i} \times \frac{\prod_{i=a+1}^{n} \alpha}{\prod_{i=a+1}^{n} i} = \frac{\alpha^a}{a!} \prod_{i=a+1}^{n} \frac{\alpha}{i} = \mathcal{O}(1)o(1) \overset{\text{T.32}}{=} o(1),$$

Ou seja,

$$\alpha^n = o(1)n! = o(n!),$$

Com isso

$$\mathcal{O}(\alpha^n) \overset{\text{T.17}}{=} \mathcal{O}(1)\alpha^n = \mathcal{O}(1)o(1)n! \overset{\text{T.32}}{=} o(1)n!$$

Teorema 41

Seja $\alpha \in \mathbb{R}$. Se $f(n) = \mathcal{O}(\alpha^n)$, então $f(n) = o(n!)$, isto é,

$$\mathcal{O}(\alpha^n) = o(n!), \text{ para todo } \alpha \in \mathbb{R},$$

ou equivalentemente,

$$\mathcal{O}(\alpha^n) \ll n!, \text{ para todo } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Prova:

Seja $\alpha \in \mathbb{R}$ e seja $a = \lceil \alpha \rceil$. Então

$$\frac{\alpha^n}{n!} = \frac{\prod_{i=1}^{a} \alpha}{\prod_{i=1}^{a} i} \times \frac{\prod_{i=a+1}^{n} \alpha}{\prod_{i=a+1}^{n} i} = \frac{\alpha^a}{a!} \prod_{i=a+1}^{n} \frac{\alpha}{i} = \mathcal{O}(1)o(1) \overset{\text{T.32}}{=} o(1),$$

Ou seja,

$$\alpha^n = o(1)n! = o(n!),$$

Com isso

$$\mathcal{O}(\alpha^n) \overset{\text{T.17}}{=} \mathcal{O}(1)\alpha^n = \mathcal{O}(1)o(1)n! \overset{\text{T.32}}{=} o(1)n! \overset{\text{T.32}}{=} o(n!)$$

Teorema 42

Se $f(n) = \mathcal{O}(n!)$, então $f(n) = o(n^n)$, isto é,

$$\mathcal{O}(n!) = o(n^n),$$

ou, equivalentemente,

$$\mathcal{O}(n!) \ll n^n.$$

Teorema 42

Se $f(n) = \mathcal{O}(n!)$, então $f(n) = o(n^n)$, isto é,

$$\mathcal{O}(n!) = o(n^n),$$

ou, equivalentemente,

$$\mathcal{O}(n!) \ll n^n.$$

Prova:

Como

$$\frac{n!}{n^n} = \frac{\prod_{i=1}^{n} i}{\prod_{i=1}^{n} n}$$

Notação Assintótica: Famílias Notáveis

Teorema 42

Se $f(n) = \mathcal{O}(n!)$, então $f(n) = o(n^n)$, isto é,

$$\mathcal{O}(n!) = o(n^n),$$

ou, equivalentemente,

$$\mathcal{O}(n!) \ll n^n.$$

Prova:

Como

$$\frac{n!}{n^n} = \frac{\prod_{i=1}^{n} i}{\prod_{i=1}^{n} n} = \prod_{i=1}^{n} \frac{i}{n}$$

Notação Assintótica: Famílias Notáveis

Teorema 42

Se $f(n) = \mathcal{O}(n!)$, então $f(n) = o(n^n)$, isto é,

$$\mathcal{O}(n!) = o(n^n),$$

ou, equivalentemente,

$$\mathcal{O}(n!) \ll n^n.$$

Prova:

Como

$$\frac{n!}{n^n} = \frac{\prod_{i=1}^{n} i}{\prod_{i=1}^{n} n} = \prod_{i=1}^{n} \frac{i}{n} = o(1),$$

Notação Assintótica: Famílias Notáveis

Teorema 42

Se $f(n) = \mathcal{O}(n!)$, então $f(n) = o(n^n)$, isto é,

$$\mathcal{O}(n!) = o(n^n),$$

ou, equivalentemente,

$$\mathcal{O}(n!) \ll n^n.$$

Prova:

Como

$$\frac{n!}{n^n} = \frac{\prod_{i=1}^{n} i}{\prod_{i=1}^{n} n} = \prod_{i=1}^{n} \frac{i}{n} = o(1),$$

então,

$$n! = o(1)n^n$$

Teorema 42

Se $f(n) = \mathcal{O}(n!)$, então $f(n) = o(n^n)$, isto é,

$$\mathcal{O}(n!) = o(n^n),$$

ou, equivalentemente,

$$\mathcal{O}(n!) \ll n^n.$$

Prova:

Como

$$\frac{n!}{n^n} = \frac{\prod_{i=1}^n i}{\prod_{i=1}^n n} = \prod_{i=1}^n \frac{i}{n} = o(1),$$

então,

$$n! = o(1)n^n$$

Portanto

Teorema 42

Se $f(n) = \mathcal{O}(n!)$, então $f(n) = o(n^n)$, isto é,

$$\mathcal{O}(n!) = o(n^n),$$

ou, equivalentemente,

$$\mathcal{O}(n!) \ll n^n.$$

Prova:

Como

$$\frac{n!}{n^n} = \frac{\prod_{i=1}^{n} i}{\prod_{i=1}^{n} n} = \prod_{i=1}^{n} \frac{i}{n} = o(1),$$

então,

$$n! = o(1)n^n$$

Portanto

$$\mathcal{O}(n!)$$

Teorema 42

Se $f(n) = \mathcal{O}(n!)$, então $f(n) = o(n^n)$, isto é,

$$\mathcal{O}(n!) = o(n^n),$$

ou, equivalentemente,

$$\mathcal{O}(n!) \ll n^n.$$

Prova:

Como

$$\frac{n!}{n^n} = \frac{\prod_{i=1}^{n} i}{\prod_{i=1}^{n} n} = \prod_{i=1}^{n} \frac{i}{n} = o(1),$$

então,

$$n! = o(1)n^n$$

Portanto

$$\mathcal{O}(n!) \overset{\text{T.17}}{=} \mathcal{O}(1)n!$$

Teorema 42

Se $f(n) = \mathcal{O}(n!)$, então $f(n) = o(n^n)$, isto é,

$$\mathcal{O}(n!) = o(n^n),$$

ou, equivalentemente,

$$\mathcal{O}(n!) \ll n^n.$$

Prova:

Como

$$\frac{n!}{n^n} = \frac{\prod_{i=1}^{n} i}{\prod_{i=1}^{n} n} = \prod_{i=1}^{n} \frac{i}{n} = o(1),$$

então,

$$n! = o(1)n^n$$

Portanto

$$\mathcal{O}(n!) \overset{\text{T.17}}{=} \mathcal{O}(1)n! = \mathcal{O}(1)o(1)n^n$$

Teorema 42

Se $f(n) = \mathcal{O}(n!)$, então $f(n) = o(n^n)$, isto é,

$$\mathcal{O}(n!) = o(n^n),$$

ou, equivalentemente,

$$\mathcal{O}(n!) \ll n^n.$$

Prova:

Como

$$\frac{n!}{n^n} = \frac{\prod_{i=1}^{n} i}{\prod_{i=1}^{n} n} = \prod_{i=1}^{n} \frac{i}{n} = o(1),$$

então,

$$n! = o(1)n^n$$

Portanto

$$\mathcal{O}(n!) \overset{T.17}{=} \mathcal{O}(1)n! = \mathcal{O}(1)o(1)n^n \overset{T.32}{=} o(1)n^n$$

Teorema 42

Se $f(n) = \mathcal{O}(n!)$, então $f(n) = o(n^n)$, isto é,

$$\mathcal{O}(n!) = o(n^n),$$

ou, equivalentemente,

$$\mathcal{O}(n!) \ll n^n.$$

Prova:

Como

$$\frac{n!}{n^n} = \frac{\prod_{i=1}^{n} i}{\prod_{i=1}^{n} n} = \prod_{i=1}^{n} \frac{i}{n} = o(1),$$

então,

$$n! = o(1)n^n$$

Portanto

$$\mathcal{O}(n!) \overset{\text{T.17}}{=} \mathcal{O}(1)n! = \mathcal{O}(1)o(1)n^n \overset{\text{T.32}}{=} o(1)n^n \overset{\text{T.30}}{=} o(n^n)$$